

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

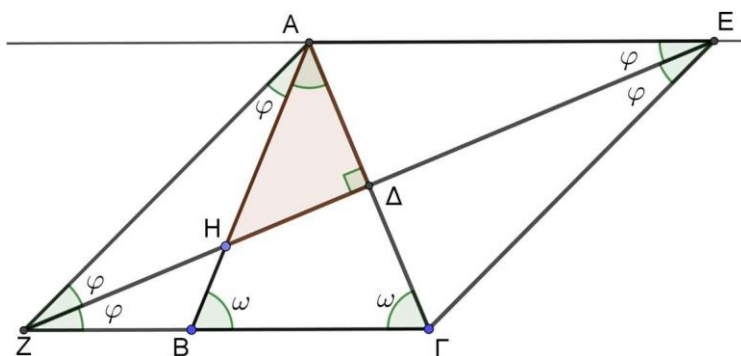
Πρόβλημα 1

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Η μεσοκάθετη της πλευράς $A\Gamma$ τέμνει την παράλληλη ευθεία από το σημείο A προς την ευθεία $B\Gamma$ στο σημείο E , την πλευρά AB στο σημείο H και την ευθεία $B\Gamma$ στο σημείο Z . Δίνεται ότι: $A\hat{Z}H = Z\hat{A}H$.

(α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

(β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AZ\Gamma E$ είναι ρόμβος.

Λύση



Έστω $A\hat{Z}H = Z\hat{A}H = \varphi$ και $B\hat{A} = \Gamma\hat{A} = \omega$, οπότε $A\hat{A} = 180^\circ - 2\omega$.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο $AZ\Delta$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \Delta\hat{A}Z + \Delta\hat{Z}A &= 90^\circ \iff 180^\circ - 2\omega + \varphi + \varphi = 90^\circ \\ &\quad - \omega - \varphi = 45^\circ \end{aligned} \quad (1)$$

Λόγω συμμετρίας ως προς τη μεσοκάθετη της πλευράς $A\Gamma$, έχουμε $A\hat{Z}H = H\hat{Z}B = \varphi$,

οπότε από το τρίγωνο ABZ και την εξωτερική του γωνία AĤΓ έχουμε

$$\omega = A\hat{B}\Gamma = 3\varphi \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) λαμβάνουμε

$$2\varphi = 45^\circ \Leftrightarrow \varphi = 22,5^\circ \text{ και } \omega = 67,5^\circ.$$

Άρα έχουμε

$$\hat{B} = \hat{\Gamma} = \omega = 67,5^\circ \text{ και } \hat{A} = 180^\circ - 2\omega = 45^\circ.$$

(β) Επειδή AE ∥ ZΓ έχουμε

$$\Gamma\hat{Z}E = A\hat{E}Z \text{ (εντός εναλλάξ).}$$

Επίσης λόγω συμμετρίας ως προς τη μεσοκάθετη ZE της ΑΓ έχουμε

$$\Gamma\hat{Z}E = A\hat{Z}E = \varphi.$$

Άρα είναι $A\hat{Z}E = A\hat{E}Z = \varphi$, οπότε το τρίγωνο AZE είναι ισοσκελές με $AZ = AE$. Λόγω συμμετρίας ως προς τη μεσοκάθετη ZE της ΑΓ έχουμε τελικά $AZ = AE = \Gamma E = \Gamma Z$.

Επίσης, λόγω συμμετρίας ως προς τη μεσοκάθετη της πλευράς ΑΓ, έχουμε

$$\Gamma\hat{E}Z = A\hat{E}Z = \varphi = A\hat{Z}E,$$

οπότε οι ευθείες AZ και ΓE τεμνόμενες από την ευθεία ZE σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, οπότε $\Gamma E \parallel AZ$.

Επομένως το τετράπλευρο AZΓE είναι παραλληλόγραμμο που έχει τις τέσσερις πλευρές του ίσες, οπότε είναι ρόμβος.

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη πραγματικών αριθμών (x, y) τα οποία ικανοποιούν την εξίσωση:

$$(x^2 + 1)(y^2 + 1) + 4(x - 1)(y - 1) + 4(x + y - 1) = 0.$$

Λύση

Μετά τις πράξεις η εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$(xy + 1)^2 + (x + y)^2 = 0 \Leftrightarrow xy + 1 = 0 \text{ και } x + y = 0 \Leftrightarrow xy = -1 \text{ και } y = -x \\ - x^2 = 1 \text{ και } y = -x \Leftrightarrow (x, y) = (1, -1) \text{ ή } (x, y) = (-1, 1).$$

Πρόβλημα 3 (8 μονάδες)

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί με $\alpha \neq 0$ τέτοιοι ώστε:

$$\frac{\beta}{\beta^2 + \beta + 1} = \alpha.$$

(α) Να εκφράσετε την παράσταση $\frac{\beta^2}{\beta^4 + \beta^2 + 1}$ συναρτήσει του α .

(β) Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές του α ώστε

$$\frac{\beta^2}{\beta^4 + \beta^2 + 1} = \alpha.$$

Λύση

(α) Από την δεδομένη ισότητα έχουμε

$$\frac{\beta}{\beta^2 + \beta + 1} = \alpha \Rightarrow \frac{1}{\beta + \frac{1}{\beta} + 1} = \alpha \Rightarrow \beta + \frac{1}{\beta} = \frac{1 - \alpha}{\alpha}.$$

Άρα έχουμε

$$\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)^2 = \left(\frac{1 - \alpha}{\alpha}\right)^2 \Rightarrow \beta^2 + \frac{1}{\beta^2} + 2 = \left(\frac{1 - \alpha}{\alpha}\right)^2 \Rightarrow \beta^2 + \frac{1}{\beta^2} = \frac{1 - 2\alpha - \alpha^2}{\alpha^2},$$

μέσω της οποίας προκύπτει

$$\frac{\beta^2}{\beta^4 + \beta^2 + 1} = \frac{1}{\beta^2 + \frac{1}{\beta^2} + 1} = \frac{1}{\frac{1 - 2\alpha - \alpha^2}{\alpha^2} + 1} = \frac{\alpha^2}{1 - 2\alpha}.$$

(β) Έχουμε

$$\beta^4 + \beta^2 + 1 = \alpha \iff \alpha = \frac{\alpha^2}{1 - 2\alpha} \iff 1 - 2\alpha = \alpha \iff \alpha = \frac{1}{3}.$$

2ος τρόπος

(α) Είναι $\beta^2 + \beta + 1 = \frac{1}{\alpha}$, οπότε $\beta^2 + 1 = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\beta$, και άρα

$$\beta^4 + 2\beta^2 + 1 = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 \beta^2 = \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{2}{\alpha} + 1\right) \beta^2.$$

Έτσι έχουμε

$$\beta^4 + \beta^2 + 1 = \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{2}{\alpha} + 1\right) \beta^2 = \frac{1 - 2\alpha}{\alpha^2} \beta^2,$$

οπότε $1 - 2\alpha \neq 0$ και

$$\frac{\beta^2}{\beta^4 + \beta^2 + 1} = \frac{\alpha^2}{1 - 2\alpha}.$$

(β) Αρχικά παρατηρούμε ότι

$$\beta^4 + \beta^2 + 1 = (\beta^4 + 2\beta^2 + 1) - \beta^2 = (\beta^2 + 1)^2 - \beta^2 = (\beta^2 + \beta + 1)(\beta^2 - \beta + 1),$$

οπότε

$$\frac{\beta^2}{\beta^4 + \beta^2 + 1} = \frac{\beta}{\beta^2 + \beta + 1} \cdot \frac{\beta}{\beta^2 - \beta + 1} = \alpha \cdot \frac{\beta}{\beta^2 - \beta + 1}$$

Αφού $\alpha \neq 0$, από την παραπάνω ισότητα παίρνουμε

$$\frac{\beta^2}{\beta^4 + \beta^2 + 1} = \alpha \Leftrightarrow \beta = \beta^2 - \beta + 1 \Leftrightarrow 3\beta = \beta^2 + \beta + 1 \\ - \frac{\beta}{\beta^2 + \beta + 1} = \frac{1}{3} \iff \alpha = \frac{1}{3}.$$

Σχόλια. Η παραγοντοποίηση στη λύση του (β) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δώσει μια ακόμη λύση στο (α) ως εξής:

Έχουμε

$$\frac{\beta^2 - \beta + 1}{\beta} = \frac{\beta^2 + \beta + 1}{\beta} - 2 = \frac{1}{\alpha} - 2 = \frac{1 - 2\alpha}{\alpha}.$$

Έτσι $1 - 2\alpha \neq 0$ και

$$\frac{\beta}{\beta^2 - \beta + 1} = \frac{\alpha}{1 - 2\alpha}.$$

οπότε

$$\frac{\beta^2}{\beta^4 + \beta^2 + 1} = \frac{\beta}{\beta^2 + \beta + 1} \cdot \frac{\beta}{\beta^2 - \beta + 1} = \frac{\alpha^2}{1 - 2\alpha}.$$