

ΘΕΜΑΤΑ ΚΦΕ -51
Θέματα Τελικών 2024 -ΜΗΧΑΝΙΚΗ

Επιμέλεια : Β. Καράβολας

1 Ερωτήσεις Πολλαπλής Επιλογής

1.1 Ερώτηση 1η

Εκφώνηση: Ένας σκιέρ κινείται με ταχύτητα 11 m/s και προσεγγίζει τη βάση ενός κεκλιμένου επιπέδου κλίσης 19 μοιρών και διανύει μια απόσταση 15 m μέχρι να σταματήσει. Ποιος είναι ο μέσος συντελεστής τριβής; (Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$)

Επιλέξτε ένα:

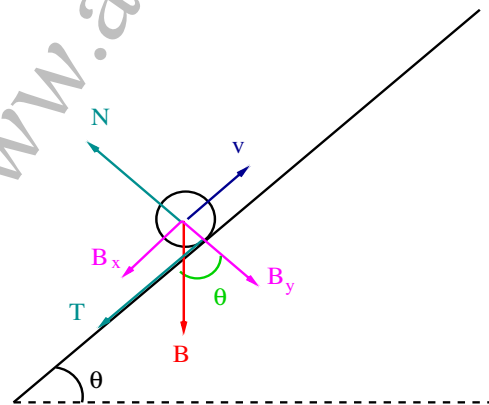
1. 0.072
2. 0.016
3. Άλλο
4. 0.091

Λύση

Έστω άξονας x ο άξονας του κεκλιμένου επιπέδου και άξονας y ο άξονας ο κάθετος στο κεκλιμένο επίπεδο.

Αναλύουμε το βάρος σε δύο συνιστώσες:

$$\begin{cases} B_x = mg \sin \theta \\ B_y = mg \cos \theta \end{cases}$$



Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί, επομένως:

$$\sum F = 0 \iff N = mg \cos \theta$$

Η τριβή ολίσθησης θα είναι:

$$\begin{cases} T = \mu N \\ N = mg \cos \theta \end{cases} \iff T = \mu mg \cos \theta$$

Παίρνουμε ένα ΘΜΚΕ για την άνοδο του σώματος στο κ.ε.

$$\left[\begin{array}{l} K_f - K_i = W_B + W_N + W_T \\ K_f = 0 \\ K_i = \frac{mv^2}{2} \\ W_B = -mg \sin \theta x \\ W_T = -\mu mg \cos \theta x \\ W_N = 0 \\ g = 10 \text{ m/s}^2 \end{array} \right] \Leftrightarrow -\frac{mv^2}{2} = -mg \sin \theta x - \mu mg \cos \theta x \Leftrightarrow$$
$$\mu = \frac{v^2 - 2g \sin \theta x}{2g \cos \theta x} = 0.082$$

Με βάση αυτά η σωστή απάντηση είναι *iii*. Όμως:

$$\left[\begin{array}{l} K_f - K_i = W_B + W_N + W_T \\ K_f = 0 \\ K_i = \frac{mv^2}{2} \\ W_B = -mg \sin \theta x \\ W_T = -\mu mg \cos \theta x \\ W_N = 0 \\ g = 9.8 \text{ m/s}^2 \end{array} \right] \Leftrightarrow -\frac{mv^2}{2} = -mg \sin \theta x - \mu mg \cos \theta x \Leftrightarrow$$
$$\mu = \frac{v^2 - 2g \sin \theta x}{2g \cos \theta x} = 0.091$$

Με βάση μια καλύτερη προσέγγιση του g η σωστή απάντηση είναι *iv*.

1.2 Ερώτηση 2η

Εκφώνηση: Μια μάζα των 0.25 kg που βρίσκεται αναρτημένη στο άκρο ενός ελατηρίου ταλαντώνεται 2.2 φορές το δευτερόλεπτο με πλάτος ταλάντωσης 0.15 m . Να υπολογίσετε τη συνολική ενέργεια του συστήματος.

Επιλέξτε ένα:

1. 0.88 J
2. 0.23 J
3. Άλλο
4. 0.54 J

Λύση

Η συχνότητα της ταλάντωσης είναι $f = 2/2 \text{ Hz}$. Η ενέργεια της ταλάντωσης θα είναι:

$$\left[\begin{array}{l} E = \frac{DA^2}{2} \\ D = m\omega^2 \\ \omega = 2\pi f \\ m = 0.25 \text{ kg} \end{array} \right] \iff E = \frac{4\pi^2 m f^2 A^2}{2} = 0.54 \text{ J}$$

$A = 0.15 \text{ m}$

Η σωστή απάντηση είναι η.

1.3 Ερώτηση 3η

Εκφώνηση: Πόσο ψηλά θα ανέλθει μια πέτρα μάζας 1.85 kg από το σημείο που απελευθερώθηκε αν εκτοξευθεί κατακόρυφα προς τα πάνω από κάποιον που παράγει έργο ίσο με 80 J . Στην απάντηση που αθ δώσετε αγνοείστε την αντίσταση του αέρα (Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$).

Επιλέξτε ένα:

1. 2.12 m
2. 5.25 m
3. Άλλο
4. 4.32 m

Λύση

θα πάρουμε ΘΜΚΕ:

$$\left| \begin{array}{l} K_f - K_i = W_B \\ K_f = 0 \\ K_i = \frac{mv^2}{2} = W_F = 80 \\ W_B = -mgh \\ m = 1.85 \\ g = 10 \text{ m/s}^2 \end{array} \right| \Longleftrightarrow -80 = -mgh \Longleftrightarrow h = 4.32 \text{ m}$$

Η σωστή απάντηση είναι iv.

1.4 Ερώτηση 4n

Εκφώνηση: Ένα κοντάρι μήκους 1.8 m ισορροπεί κατακόρυφα με το άκρο του στο έδαφος. Το κοντάρι αρχίζει να πέφτει χωρίς το χαμηλότερο άκρο του να ολισθαίνει. Ποια θα είναι η ταχύτητα του άνω άκρο του μια στιγμή πριν αυτό χτυπήσει στο έδαφος; (Δίνεται $g = 9.8 \text{ m/s}^2$).

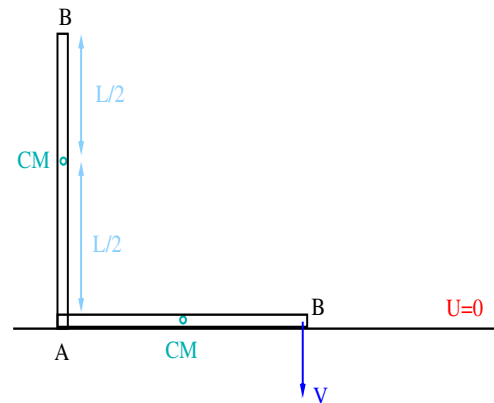
Επιλέξτε ένα:

1. 6.54 m/s
2. 2.34 m/s
3. Άλλο
4. 7.27 m/s

Λύση

Το κοντάρι εκτελεί περιστροφική κίνηση με άξονα το σημείο επαφής του με το έδαφος

. Η ροπή αδράνειας ράβδου ως προς το άκρο της είναι $I = \frac{mL^2}{3}$ όπου L το μήκος της ράβδου. Το κοντάρι (αν και δεν αναφέρεται στην εκφώνηση) θα πρέπει να είναι ομογενές, επομένως θα πρέπει το κέντρο μάζας του να ταυτίζεται με το γεωμετρικό του κέντρο που στην περίπτωση αυτή είναι στο μέσο του. Λαμβάνοντας υπόψη μας ότι η δυναμική βαρυτική ενέργεια είναι η δυναμική βαρυτική ενέργεια του κέντρου μάζας του παίρνουμε μια ΑΔΜΕ:



$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

$$K_i = 0$$

$$U_i = mg \frac{L}{2}$$

$$K_f = \frac{I\omega^2}{2}$$

$$U_f = 0$$

$$I = \frac{mL^2}{3}$$

$$g = 9.8 \text{ m/s}^2$$

$$\Leftrightarrow mg \frac{L}{2} = \frac{\omega^2 mL^2}{2 \cdot 3} \Leftrightarrow$$

$$\omega^2 = \frac{3g}{L} \Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{29.4}{1.80}} = 4.04 \text{ r/s}$$

Η ταχύτητα του κινούμενου άκρου του θα είναι:

$$\begin{cases} v = L\omega \\ L = 1.8 \text{ m} \\ \omega = 4.04 \text{ r/s} \end{cases} \Leftrightarrow v = 7.27 \text{ m/s}$$

Η σωστή απάντηση είναι iv.

1.5 Ερώτηση 5η

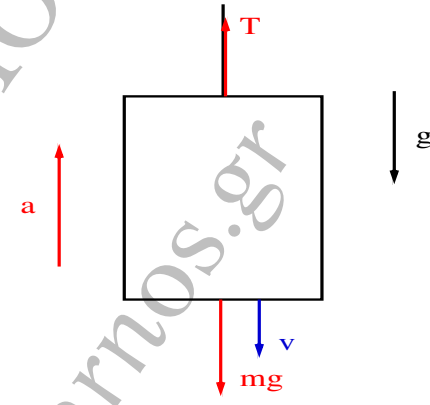
Εκφώνηση: Ένας ανελκυστήρας σε ένα ψηλό κτήριο μπορεί κατά την κάθοδο να κινείται με ταχύτητα ίση με 3.5 m/s . Πόση πρέπει να είναι η τάση στο καλώδιο ώστε να σταματήσει σε απόσταση 2.6 m αν η μάζα του μαζί με τους επιβάτες είναι 1450 kg (Δίνεται $g = 9.8 \text{ m/s}^2$).

Επιλέξτε ένα:

1. 6.54 m/s
2. 2.34 m/s
3. Άλλο
4. 7.27 m/s

Λύση

Από τον Δεύτερο Νόμο του Newton θα έχουμε ότι $T - mg = ma$. Θα πρέπει πρώτα να βρούμε την επιτάχυνση (θεωρώντας ότι η κίνηση είναι ομαλά επιβραδυνόμενη - κάτι που δεν το αναφέρει η εκφώνηση):

$$\left[\begin{array}{l} v = v_0 - at \\ s = v_0 t - \frac{at^2}{2} \\ v = 0 \\ s = 2.6 \text{ m} \\ v_0 = 3.5 \text{ m/s} \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{v_0}{a} \\ s = \frac{v_0^2}{a} - \frac{v_0^2}{2a^2} = \frac{v_0^2}{2a} \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \frac{v_0^2}{2s} = 2.36 \text{ m/s}^2 \end{array} \right]$$


Θ
Τότε:

$$\left[\begin{array}{l} T - mg = ma \\ m = 1450 \text{ kg} \\ g = 9.8 \text{ m/s}^2 \\ a = 2.36 \text{ m/s}^2 \end{array} \right] \Leftrightarrow T = m(g + a) = 17625 \text{ N}$$

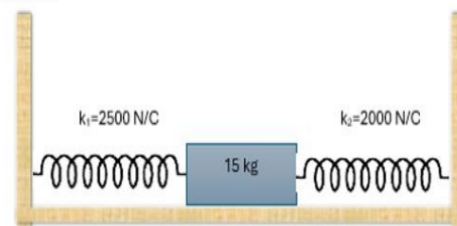
Η σωστή απάντηση είναι *iii*.

2 Θέματα Ανάπτυξης

2.1 Θέμα 1ο

Εκφώνηση: Θεωρήστε το σύστημα του σχήματος που βρίσκεται σε ισορροπία. μετακινούμε το σώμα προς τα δεξιά κατά 15 cm και το αφήνουμε ελεύθερο.

1. Πόση είναι η μέγιστη ταχύτητα που θα αποκτήσει και σε ποια θέση από τη Θέση ισορροπίας θα την αποκτήσει;
2. Πόση είναι η μέγιστη συσπείρωση του αριστερού ελατηρίου;



Λύση

Η εκφώνηση δεν μας δηλώνει αν τα δύο ελατήρια είναι στις θέσεις Φυσικού μήκους όταν βρίσκονται σε ισορροπία. Επομένως θα πρέπει να πάρουμε τη γενική περίπτωση, δεχόμενοι ότι οι θέσεις Φυσικού Μήκους είναι διαφορετικές.

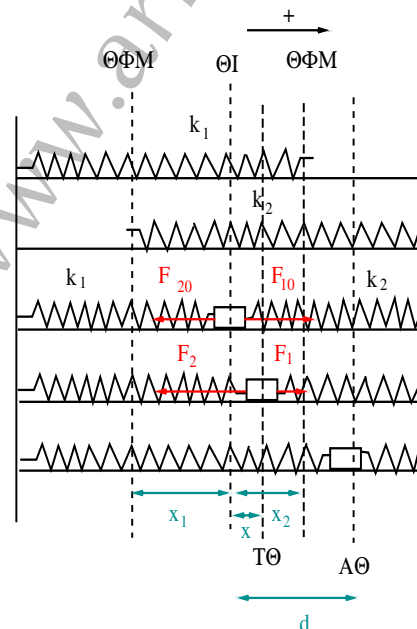
1. Στο σχήμα βλέπουμε τις δύο θέσεις φυσικού μήκους, τη θέση ισορροπίας, την ακραία θέση και την τυχαία θέση.

Στη Θέση ισορροπίας θα έχουμε:

$$\left[\begin{array}{l} \sum F = 0 \iff F_{10} - F_{20} = 0 \\ F_{10} = k_1 x_1 \\ F_{20} = k_2 x_2 \\ k_1 x_1 = k_2 x_2 \end{array} \right] \iff$$

Στην Τυχαία Θέση θα έχουμε:

$$\left[\begin{array}{l} \sum F = F_1 - F_2 \\ F_1 = k_1(x_1 - x) \\ F_2 = k_2(x_2 + x) \\ k_1 x_1 = k_2 x_2 \end{array} \right] \iff \sum F = -(k_1 + k_2)x$$



Επομένως το σύστημα εκτελεί Απλή Αρμονική Ταλάντωση με σταθερά $D = k_1 + k_2 = 4500 \text{ N/m}$.

Από ΑΔΕ στην ταλάντωση:

$$\left[\begin{array}{l} K_i + U_i = K_f + U_f \\ K_i = 0 \\ U_i = \frac{DA^2}{2} \\ K_f = \frac{mV^2}{2} \\ U_f = 0 \\ D = 4500 \text{ N/m} \\ A = 0.15 \text{ m} \\ m = 15 \text{ kg} \end{array} \right] \iff \frac{DA^2}{2} = \frac{mV^2}{2} \iff V = A \sqrt{\frac{D}{m}} = 2.6 \text{ m/s}$$

Την ταχύτητα αυτή την έχει στη Θέση Ισορροπίας.

2. Για να βρούμε την μέγιστη συσπείρωση του αριστερού ελατηρίου θα πρέπει να ξέρουμε τη συσπείρωση του στη Θέση ισορροπίας. **Δεχόμενοι ότι στη Θέση ισορροπίας τα ελατήρια είναι στη Θέση Φυσικού Μήκους** μπορούμε να πούμε ότι η μέγιστη συσπείρωση του αριστερού ελατηρίου θα είναι ίση με A , το πλάτος της ταλάντωσης που εδώ είναι 0.15 m .

2.1.1 Θέμα 2ο

Εκφώνηση:

Ένας τροχός φέρει ηλεκτροκινητήρα που εφαρμόζει ροπή στρέψης ως προς τον άξονα του τροχού ώστε αυτός να επιταχύνει.

Αν ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ του τροχού και του δρόμου είναι μ , βρείτε τη μέγιστη ροπή τ , του ηλεκτροκινητήρα· ώστε να μην ολισθήσει ο τροχός (να μην σπινιάρει). Δικαιολογείστε την απάντησή σας κάνοντας και το απαραίτητο διάγραμμα ελεύθερου σώματος. Θεωρήστε ότι ο τροχός έχει συνολική μάζα m και ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα του I .



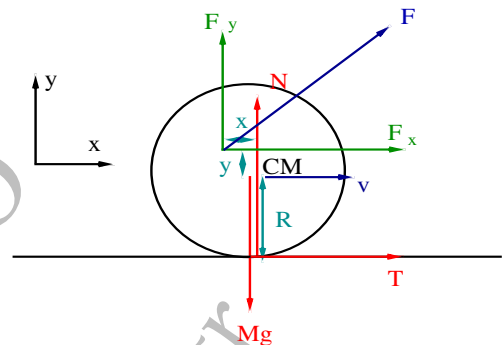
Λύση

Παρατηρήσεις :

- Η εκφώνηση δεν μας δηλώνει αν ο δρόμος στον οποίο κινείται ο τροχός είναι οριζόντιος ή όχι. Θα δεχθούμε ότι είναι οριζόντιος.
- Επίσης η εκφώνηση δεν μας αναφέρει σε ποιο σημείο του τροχού ασκείται η δύναμη του κινητήρα η οποία παράγει αυτή τη ροπή.

Αρχικά θα πάρουμε ισορροπία ως προς τον κατακόρυφο άξονα (y).

$$\begin{cases} \sum F_y = 0 \\ \sum F_y = Mg - N \end{cases} \iff Mg = N$$



Ο κινητήρας θα πρέπει να ασκεί μια δύναμη $\vec{F}$ στον τροχό που γενικά θα έχει μια οριζόντια συνιστώσα και μια κατακόρυφη συνιστώσα. Στον οριζόντιο άξονα το σώμα επιταχύνεται (παίρνοντας μέγιστη τριβή, την τριβή ολίσθησης):

$$\begin{cases} \sum F_x = ma & \text{Μεταφορική Κίνηση} \\ \sum \tau = I a_y & \text{Περιστροφική Κίνηση} \\ \sum \tau = \tau_k - TR \\ \sum F = F - T \\ T = \mu N = \mu Mg \\ \tau_k = Fx \\ a = a_y R \end{cases} \iff \begin{cases} F - T = ma \\ Fx + F_y y - TR = I \frac{a}{R} \end{cases}$$

όπου τ_k η ροπή του κινητήρα. Σε αυτή την περίπτωση όμως $T \neq \mu mg$ καθώς υπάρχει η F_y .

Θα δεχθούμε ότι $F_x = 0$ και $F_y = 0$ (ουσιαστικά θεωρούμε ότι η μέση τιμή αυτών των δυνάμεων είναι μηδενικές), αλλά υπάρχει η ροπή του κινητήρα. Σε αυτή την περίπτωση:

$$\begin{cases} T = \mu mg = ma \iff a = \mu g \\ \tau_k - TR = I \frac{a}{R} \end{cases} \iff \tau_k = \mu mg R + I \frac{\mu g}{R}$$