

1

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών

1.1 Τα σύνολα των Φυσικών ($\mathbb{N}$) και των Ακεραίων ($\mathbb{Z}$)

A) Από τη στιγμή που ο άνθρωπος οργανώθηκε σε πόλεις και χωριά και ανέπτυξε το εμπόριο γεννήθηκε η ανάγκη να μπορεί να ξέρει πόσα προϊόντα έχει αγοράσει ή πουλήσει.

Το σύνολο των αριθμών που χρησιμοποιούμε για να μετρήσουμε αλλά και να βάλουμε στη σειρά κάποια αντικείμενα είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών και συμβολίζουμε...

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Θα παρατηρήσετε ότι ο κάθε ένας από τους αριθμούς αυτούς παράγεται από τον προηγούμενο του προσθέτοντας μία μονάδα.

Οπότε αν συμβολίσουμε με a κάποιον φυσικό αριθμό τότε:

- ο επόμενος του συμβολίζεται με $a + 1$
- ο μεθεπόμενος του συμβολίζεται με $a + 2$
- αν $a \neq 0$, ο προηγούμενος του συμβολίζεται με $a - 1$

Στο σύνολο των Φυσικών αριθμών ορίζουμε τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, ως προς τις οποίες λέμε ότι **το σύνολο είναι κλειστό**.

Δηλαδή το άθροισμα όπως και το γινόμενο δύο Φυσικών είναι Φυσικός αριθμός.

B) Από τη στιγμή που οι συναλλαγές μεταξύ των ανθρώπων αναπτύχθηκαν ακόμα περισσότερο, και πουλούσαν ή αγόραζαν ακόμα και επί πιστώσει έπρεπε τη δυνατότητα να χρωστά κάποιος 10 νομίσματα να συμβολίζεται με διαφορετικό τρόπο από το να έχει 10 νομίσματα. Έτσι άρχισαν να χρησιμοποιούνται οι λεγόμενοι αρνητικοί αριθμοί και συμβολίζουμε:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Στο σύνολο αυτό ορίζουμε τις πράξεις της πρόσθεσης-πολλαπλασιασμού και αφαίρεσης ως προς τις οποίες είναι κλειστό.

Τους αριθμούς του συνόλου αυτού τους χωρίζουμε σε δύο ομάδες ανάλογα με το υπόλοιπο που αφήνουν με την διαίρεση τους με το 2. Συγκεκριμένα όλοι

- οι ακέραιοι που είναι πολλαπλάσιοι του 2 ή όπου διαιρούμενοι με το 2 αφήνουν υπόλοιπο 0 λέγονται **άρτιοι** και συμβολίζονται με $a = 2 \cdot v$ με $v \in \mathbb{Z}$.
- ενώ όσοι διαιρούμενοι με το 2 αφήνουν υπόλοιπο 1 λέγονται **περιττοί** και συμβολίζονται με $a = 2 \cdot v + 1$ με $v \in \mathbb{Z}$.

Π.χ. ο αριθμός 9 είναι περιττός γιατί γράφεται: $9 = 2 \cdot 4 + 1$

Όμοια ο αριθμός -9 είναι περιττός γιατί γράφεται: $-9 = 2 \cdot (-5) + 1$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Να αποδείξετε ότι το άθροισμα δύο οποιονδήποτε περιττών ακεραίων είναι άρτιος

Με τη βοήθεια παραδειγμάτων είμαστε σε θέση να επιβεβαιώσουμε την αλήθεια της παραπάνω μαθηματικής πρότασης, όμως αυτό αρκεί για να ισχυριστούμε ότι η πρόταση αυτή είναι αληθής για κάθε ζεύγος περιττών ακεραίων;

Με το ερώτημα αυτό έρχεται η ανάγκη της γενίκευσης της εργασίας που κάνουμε για να ισχυριστούμε αν μία πρόταση είναι αληθής ή όχι.

Υπάρχει λοιπόν η ανάγκη του **συμβολισμού** – γενικά – δύο περιττών ακεραίων καθώς επίσης και η σαφής ακολουθία λογικών βημάτων που θα οδηγήσουν στη δικαιολόγηση της πρότασης. Η διαδικασία αυτή λέγεται **απόδειξη** της πρότασης.

Απόδειξη

Ας συμβολίσουμε με $a = 2v + 1$ και $\beta = 2\mu + 1$ τους δύο τυχαίους περιττούς ακέραιους όπου μ, v ακέραιοι, τότε ισχύει:

$$a + \beta = (2v + 1) + (2\mu + 1) = 2v + 1 + 2\mu + 1 = 2v + 2\mu + 2 = 2(v + \mu + 1),$$

επειδή το σύνολο των ακεραίων είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση το άθροισμα $v + \mu + 1$ είναι ακέραιος, οπότε μπορούμε να το συμβολίσουμε π.χ με ρ .

Άρα έχουμε τελικά ότι $a + \beta = 2(v + \mu + 1) = 2\rho$ άρα το άθροισμα δύο οποιονδήποτε περιττών ακεραίων είναι ένα άρτιος ακέραιος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Αποδείξτε ότι:

1. Το γινόμενο δύο περιττών ακεραίων είναι περιττός
2. Το τετράγωνο ενός άρτιου ακεραίου είναι άρτιος
3. Το τετράγωνο ενός περιττού ακεραίου είναι περιττός.
4. Το γινόμενο ενός άρτιου και ενός περιττού ακεραίου είναι άρτιος
5. Το γινόμενο δύο διαδοχικών μη μηδενικών ακεραίων είναι άρτιος αριθμός.

1.2 Τρόποι μαθηματικής απόδειξης

A) Υπόθεση – συμπέρασμα μιας μαθηματικής πρότασης

Προηγουμένως αντιμετωπίσαμε την άσκηση: «το τετράγωνο ενός περιττού ακεραίου είναι περιττός ακέραιος»

Η πρόταση αυτή μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής: Αν a περιττός ακέραιος τότε ο a^2 είναι περιττός ακέραιος.

Με τη διατύπωση αυτή γίνεται φανερό ότι η συγκεκριμένη πρόταση χωρίζεται σε δύο διακεκριμένα μέρη

1ο μέρος: Αν a περιττός ακέραιος

2ο μέρος: τότε ο a^2 είναι περιττός ακέραιος

Το πρώτο μέρος το ονομάζουμε **υπόθεση** και το δεύτερο **συμπέρασμα** της μαθηματικής πρότασης.

Την πρόταση αυτή μπορούμε γρηγορότερα να τη διατυπώσουμε με χρήση συμβόλων ως εξής: a περιττός $\Rightarrow a^2$ περιττός, (το σύμβολο $\Rightarrow$ λέγεται συνεπάγεται)

B) Η ευθεία απόδειξη

Ας δούμε την απόδειξη της πρότασης αυτής:

Έστω $a = 2v + 1$ τότε

$$a^2 = (2v + 1)^2 = 4v^2 + 4v + 1 = 2(2v^2 + 2v) + 1 \stackrel{p = 2v^2 + 2v}{=} 2p + 1 \text{ περιττός}$$

Η αποδεικτική διαδικασία η οποία «ξεκινά» από τις υποθέσεις και καταλήγει στο συμπέρασμα λέγεται **ευθεία απόδειξη**.

Γ) Η μέθοδος «Εis άτοπο απαγωγή»

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Αν το τετράγωνο ενός ακεραίου είναι περιττός αριθμός τότε ο ακέραιος είναι περιττός.

Θα παρατηρήσετε ότι η υπόθεση και το συμπέρασμα της πρότασης αυτής είναι αντίστοιχα το συμπέρασμα και η υπόθεση της προηγούμενης.

Δύο τέτοιες μαθηματικές προτάσεις λέγονται **αντίστροφες**.

Αν προσπαθήσετε να την αποδείξετε θα παρατηρήσετε ότι η απόδειξη της πρότασης αυτής παρουσιάζει δυσκολίες και ότι όλες οι προσπάθειες σας παρουσιάζουν λογικά κενά.

Στη θέση αυτή έφθασαν πριν από σας και οι μαθηματικοί της Αρχαίας Ελλάδας, κατόρθωσαν

όμως να προσπεράσουν τις δυσκολίες επινοώντας μία νέα μέθοδο απόδειξης, την οποία ονόμασαν, εις άτοπο απαγωγή.

Ας παρακολουθήσουμε τη σκέψη τους.

(Υ) το τετράγωνο ενός ακέραιου είναι περιττός

(Σ) ο ακέραιος είναι περιττός.

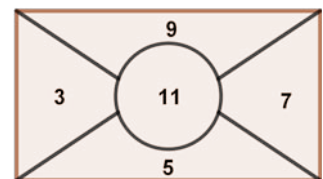
1. Ας υποθέσουμε ότι ο ακέραιος δεν είναι περιττός,
2. άρα θα είναι άρτιος
3. τότε το τετράγωνο του θα είναι άρτιος,
4. πράγμα που έρχεται σε αντίφαση με τις υποθέσεις της άσκησης, καταλήγουμε δηλαδή σε άτοπο (συμπέρασμα που δεν έχει τόπο να σταθεί).
5. Στο άτοπο καταλήξαμε γιατί ξεκινήσαμε από λάθος υπόθεση, ότι δηλαδή ο ακέραιος είναι άρτιος
6. άρα θα είναι περιττός.

Η μέθοδος αυτή προκαλεί όταν την αντιμετωπίζουμε για πρώτη φορά σύγχυση και απορία. Όμως διακρίνεται από απλότητα και λειτουργικότητα που ξαφνιάζει ακόμα και σήμερα για το μεγαλείο της μαθηματικής σκέψης που είχαν φθάσει οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί.

Η λογική της «ξεκινά» με την υιοθέτηση ως υπόθεσης της άρνησης του συμπεράσματος της πρότασης που θέλουμε να δείξουμε, έπειτα με λογικούς συλλογισμούς θα καταλήξουμε σε κάτι άτοπο - ψευδές, οπότε το γεγονός ότι καταλήξαμε σε άτοπο οφείλεται στην αρχική λαθεμένη υπόθεση άρα η ζητούμενη πρόταση είναι σωστή.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Αποδείξτε ότι αν το τετράγωνο ενός ακεραίου είναι άρτιος τότε ο ακέραιος είναι άρτιος.
2. Να εξετάσετε αν υπάρχουν φυσικοί αριθμοί n, μ έτσι ώστε $4n^2 = 2\mu + 1$
3. Τρία βελάκια πετυχαίνουν τον στόχο του σχήματος. Μπορεί η συνολική βαθμολογία να είναι ίση με 22;



1.3 Το σύνολο $\mathbb{Q}$ των Ρητών αριθμών

Με τη πρόοδο που σημείωνε ο άνθρωπος κατά τη διάρκεια των ετών έφθασε στην ανάγκη οι μετρήσεις του να γίνουν ακριβέστερες. Έτσι οι χονδροειδείς κατά προσέγγιση μετρήσεις της απόστασης αλλά και του χρόνου δεν επαρκούσαν. Με τον τρόπο αυτό νέοι αριθμοί χρησιμοποιήθηκαν..., τα κλάσματα.

Το σύνολο των αριθμών που μπορούν να γραφούν με τη μορφή κλάσματος λέγεται σύνολο των ρητών αριθμών.

Τους αριθμούς αυτούς τους συμβολίζουμε:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{\kappa}{\lambda}, \text{ όπου } \kappa, \lambda \text{ ακέραιοι με } \lambda \neq 0 \right\}$$

Στο σύνολο αυτό ορίζουμε τις πράξεις της πρόσθεσης-αφαίρεσης-πολλαπλασιασμού και διαίρεσης ως προς τις οποίες είναι κλειστό.

Οι Φυσικοί, οι Ακέραιοι και οι γνωστοί σας Δεκαδικοί αριθμοί είναι Ρητοί, γιατί μπορούν να γραφούν ως κλάσματα, για παράδειγμα...

$$-3 = \frac{-3}{1}, \quad 5 = \frac{5}{1}, \quad 0,4 = \frac{4}{10}, \quad -3,01 = \frac{-301}{100}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $0,444\dots$ (οι τρεις τελίτσες σημαίνουν ότι τα τεσσάρια συνεχίζουν επ' άπειρον) είναι ρητός.

Απόδειξη

Ας συμβολίσουμε ότι $a = 0,444\dots$ (1)

(το ενοχλητικό εδώ είναι όλα αυτά τα 4, πρέπει να βρούμε έναν τρόπο να τα διώξουμε...)

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της (1) επί 10 και έχουμε:

$$10a = 10 \cdot 0,444\dots \quad \text{ή} \quad 10a = 4,444\dots \quad (2)$$

Αφαιρούμε από την (2) την (1) και έχουμε:

$$10a - a = 4,444\dots - 0,444\dots \quad \text{ή} \quad 9a = 4, \text{ άρα } a = \frac{4}{9}$$

Επιβεβαιώστε το συμπέρασμα και με ένα κομπιουτεράκι – πληκτρολογήστε το κλάσμα $\frac{4}{9}$, τι αποτέλεσμα δίνει;

Πληκτρολογήστε τα κλάσματα $\frac{12}{99}$, $\frac{301}{999}$, τι υποψιάζεστε ότι ισχύει;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δικαιολογήστε γιατί ισχύουν οι ισότητες:

$$0,888\dots = \frac{8}{9}, \quad 0,999\dots = 1, \quad 0,232323\dots = \frac{23}{99}$$

2. Γράψτε ως ρητούς τους αριθμούς:

$$1,333\dots, \quad 0,0333\dots, \quad 2,0121212\dots, \quad 1,5123123123\dots$$

3. Να υπολογίσετε το άθροισμα: $0,777\dots + 0,888\dots + 0,444\dots$

1.4 Το σύνολο $\mathbb{Q}'$ των Άρρητων αριθμών

Υπάρχει ένα πολύ παλιό πρόβλημα στα Μαθηματικά...

Αν υποθέσουμε ότι έχουμε ένα τετράγωνο πλευράς 1 cm, άρα και εμβαδού 1 cm² και θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα τετράγωνο που να έχει διπλάσιο εμβαδόν.

Η κατασκευή ενός τέτοιου τετραγώνου παρουσιάζεται στο διπλανό σχήμα... είναι το τετράγωνο που έχει ως πλευρά του την διαγώνιο του αρχικού τετραγώνου (γιατί ισχύει κάτι τέτοιο;).

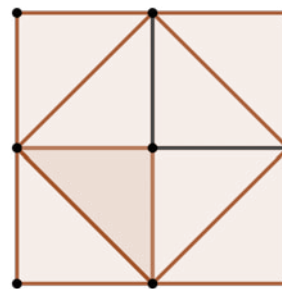
Το ερώτημα που τέθηκε είναι... πόση είναι η πλευρά του νέου τετραγώνου;

Οι μαθηματικοί προσπάθησαν χρόνια ολόκληρα να το υπολογίσουν αλλά στο τέλος αρκούνταν σε μία καλή προσέγγιση του!!

Λέγεται ότι ο πρώτος μαθηματικός που συνειδητοποίησε ότι ο αριθμός αυτός δεν μπορεί να βρεθεί, δηλαδή δεν μπορεί να γραφεί ως κλάσμα ή ως πολλαπλάσιο κάποιου από τους γνωστούς σε όλους μας φυσικούς αριθμούς ήταν ο **Ίππασος**.

Ο Ίππασος άνηκε σε μία μυστικιστική οργάνωση μαθηματικών με αρχηγό το **Πυθαγόρα**. Οι Πυθαγόρειοι, έτσι ονομάζονταν όλοι οι μαθηματικοί, μαθητές του Πυθαγόρα, είχαν την έδρα τους στον Κρότωνα στην Νότια Ιταλία. Ήταν πεποίθηση των Πυθαγορείων ότι όλα τα μεγέθη, μήκη, εμβαδά, όγκοι εκφράζονται με τη βοήθεια των φυσικών αριθμών. Για αυτό οι μόνοι αριθμοί που χρειαζόμαστε είναι οι ρητοί, δηλαδή οι αριθμοί που προκύπτουν ως λόγοι δύο φυσικών αριθμών.

Όμως η πιο γνωστή ανακάλυψη τους το γνωστό σε όλους μας πυθαγόρειο θεώρημα έμελλε να φέρει αναστάτωση σε ολόκληρη την κοινότητα. Το μήκος της υποτείνουσας ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές ίσες με 1 είναι ένα μήκος, που δεν μπορεί να γραφεί ως λόγος δύο φυσικών αριθμών. Τον αριθμό αυτόν και όλους τους άλλους όμοιους του, που βρέθηκαν αργότερα τους ονόμαζαν μήκη «άλογα» - «ανέκφραστα» - «άρρητα».



Οπότε **Άρρητους αριθμούς** – συμβολίζουμε με $\mathbb{Q}'$, ονομάζουμε τους αριθμούς που δεν μπορούν να γραφούν ως κλάσμα ή το σύνολο των μη περιοδικών δεκαδικών με άπειρο πλήθος δεκαδικών ψηφίων.

Άρρητοι είναι και οι αριθμοί όπως: $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, π , 0,12345678910111213... ο τελευταίος είναι γνωστός ως ο αριθμός των αριθμών.

Στο σύνολο $\mathbb{Q}'$ των αρρήτων ορίζουμε και τις τέσσερις πράξεις ως προς τις οποίες όμως δεν είναι κλειστό, το γεγονός αυτό μπορούμε να το δείξουμε με την βοήθεια **αντιπαραδειγμάτων**.

Ας δούμε το άθροισμα 0,10110111011110... + 0,01001000100001... τι αριθμός είναι; ρητός ή άρρητος.

Παρατηρείστε τον τρόπο με τον οποίο είναι κατασκευασμένοι οι αριθμοί αυτοί... Το άθροισμά τους είναι ίσο με 0,111... ο οποίος είναι ρητός (γιατί;)

Ας δούμε το γινόμενο $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$ τι αριθμός είναι; ρητός ή άρρητος.

Το γινόμενο είναι ίσο με $\sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$, άρα ρητός.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι άρρητος

Η απόδειξη είναι αρκετά δύσκολη, ας την παρακολουθήσουμε...

Καταρχήν πρέπει να θυμηθούμε την πρόταση

(Π) «το τετράγωνο κάθε άρτιου αριθμού είναι αριθμός άρτιος και αντίστροφα, αν δηλαδή το τετράγωνο ενός αριθμού είναι άρτιος τότε και ο αριθμός είναι άρτιος»

Θα στηριχθούμε στην μέθοδο της εις άτοπο απαγωγής

Έτοιμοι!! ξεκινάμε ...

1. Ας υποθέσουμε ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι ρητός.
2. Υπάρχουν λοιπόν φυσικοί αριθμοί μ, ν ώστε $\sqrt{2} = \frac{\mu}{\nu}$. Ο λόγος αυτός υποθέτουμε ότι δεν μπορεί να απλοποιηθεί, ειδάλλως θα τον απλοποιούσαμε. (Λέμε ότι το κλάσμα μ/ν είναι ανάγωγο)
3. Υψώνουμε και τα δύο μέλη της ισότητας στη δευτέρα και έχουμε $2 = \frac{\mu^2}{\nu^2}$ ή $\mu^2 = 2\nu^2$ (1)
4. Άρα ο αριθμός μ^2 είναι πολλαπλάσιος του 2, δηλαδή άρτιος οπότε σύμφωνα με την πρόταση (Π) και ο μ είναι άρτιος. Ας τον συμβολίσουμε $\mu = 2m$.
5. Οπότε η (1) γράφεται $4m^2 = 2\nu^2$ ή $\nu^2 = 2m^2$. Άρα ο ν^2 είναι άρτιος άρα και ο ν είναι άρτιος. Ας τον συμβολίσουμε $\nu = 2n$.
6. Ο αριθμός $\sqrt{2}$ μπορεί πλέον να γραφεί στη μορφή $\sqrt{2} = \frac{\mu}{\nu} = \frac{2m}{2n} = \frac{m}{n}$ πράγμα άτοπο, διότι εξ αρχής είχαμε υποθέσει ότι το κλάσμα $\frac{\mu}{\nu}$ είναι ανάγωγο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Να αποδείξετε ότι: Αν p ρητός αριθμός και a άρρητος, τότε ο αριθμός $a + p$ είναι άρρητος.

Απόδειξη

Θα δουλέψουμε με την μέθοδο της εις άτοπο απαγωγής

Έστω ότι ο αριθμός $a + p$ είναι ρητός, για παράδειγμα έστω ότι υπάρχει ο ρητός p' ώστε να ισχύει $p' = a + p$

Η ισότητα αυτή γράφεται και ως $p' - p = a$

Παρατηρείστε ότι το πρώτο μέλος της ισότητας είναι ρητός αριθμός ως διαφορά ρητών, ενώ το δεύτερο μέλος είναι άρρητος αριθμός.

Η ισότητα αυτή δεν μπορεί να ισχύει. Καταλήξαμε σε άτοπο.

Άρα ο αριθμός $a + p$ είναι άρρητος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να αποδείξετε ότι η διαφορά ενός ρητού αριθμού p από έναν άρρητο αριθμό a είναι άρρητος αριθμός.

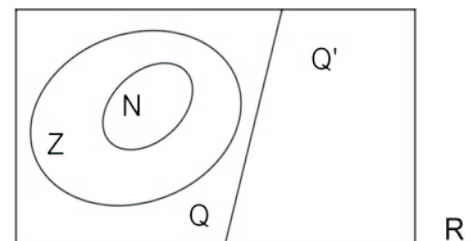
1.5 Το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών

Το σύνολο που περιλαμβάνει τους ρητούς και τους άρρητους μαζί λέγεται σύνολο των πραγματικών αριθμών, δηλαδή: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$ (το σύμβολο $\cup$ διαβάζεται ένωση – union).



John Venn
(1834-1923)

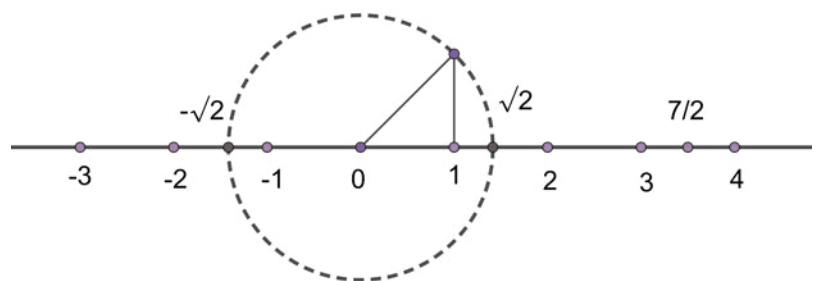
Με την βοήθεια διαγραμμάτων του Venn τα σύνολα $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}', \mathbb{R}$ μπορούν να παρουσιαστούν όπως στο διπλανό σχήμα



Άξονας των πραγματικών αριθμών

Θεωρούμε μία ευθεία (ϵ) και ένα σημείο της O , δεξιά του O θεωρούμε το σημείο A .

Αν στο σημείο O αντιστοιχίσουμε τον αριθμό 0 και στο A τον αριθμό 1 τότε λέμε ότι έχουμε ορίσει μία **προσανατολισμένη ευθεία** με αρχή το O και **μονάδα** το μήκος του τμήματος OA .



Στην ευθεία αυτή μπορούμε κάθε πραγματικό αριθμό να τον αντιστοιχίσουμε σε ένα ακριβώς σημείο της.

Π.χ. τους αριθμούς: $0, 1, 5, -3, \frac{7}{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Τοποθετήστε στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς $-2, 5/2, \sqrt{2}, 0,333...$ και δικαιολογήστε τις ενέργειές σας.
2. Τοποθετήστε στον άξονα των πραγματικών αριθμών έναν αριθμό μεγαλύτερο του 3,40 και μικρότερο του 3,41.

Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών ορίζουμε τις τέσσερις πράξεις για τις οποίες ισχύουν τα παρακάτω:

Ιδιότητες	Πρόσθεση	Πολλαπλασιασμός
Αντιμεταθετική	$\alpha + \beta = \beta + \alpha$ Δηλαδή δεν έχει σημασία η σειρά των προσθετέων	$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ Δηλαδή δεν έχει σημασία η σειρά των παραγόντων
Προσεταιριστική	$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$ Δηλαδή για να προσθέσουμε τρεις πραγματικούς αριθμούς, προσθέτουμε πρώτα τους δύο και στο άθροισμά τους προσθέτουμε και τον τρίτο	$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$ Δηλαδή για να πολλαπλασιάσουμε τρεις πραγματικούς αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε πρώτα τους δύο και στο γινόμενο τους πολλαπλασιάζουμε και τον τρίτο
Επιμεριστική	$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$	
Ουδέτερο στοιχείο	$\alpha + 0 = \alpha$	$\alpha \cdot 1 = \alpha$
Συμμετρικό στοιχείο	$\alpha + (-\alpha) = 0$ Οι αριθμοί $\alpha, -\alpha$ λέγονται αντίθετοι	$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = \alpha, \alpha \neq 0$ Ο αριθμοί $\alpha, \frac{1}{\alpha}$ λέγονται αντίστροφοι

Με τις ιδιότητες αυτές...

Η **αφαίρεση** του β από τον α ορίζεται ως το άθροισμα του αντίθετου του β στον α , δηλαδή:

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$$

Η **διαίρεση** του α με το β ορίζεται το γινόμενο του α με τον αντίστροφο του β , δηλαδή:

$$\alpha \div \beta = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}, \beta \neq 0$$

1.6 Άλλες ιδιότητες των πραγματικών αριθμών

Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ πραγματικοί αριθμοί ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες ...

1. Αν $\alpha = \beta$ και $\gamma = \delta$ τότε
- $$\alpha + \gamma = \beta + \delta$$
- $$\alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \delta$$

Δηλαδή μπορούμε να προσθέτουμε ή να πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη δύο ισότητες.

2. $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma$

Δηλαδή μπορούμε να προσθέτουμε και στα δύο μέλη μιας ισότητας τον ίδιο αριθμό και αντίστροφα να διαγράφουμε και από τα δύο μέλη μιας ισότητας τον ίδιο προσθετέο.

3. Αν $\alpha = \beta$ τότε $\alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$

Δηλαδή μπορούμε να πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη μιας ισότητας με τον ίδιο αριθμό.

4. Αν $\alpha \cdot \gamma = \beta$ και $\gamma \neq 0$ τότε $\alpha = \beta$

Δηλαδή μπορούμε να απλοποιούμε από τα δύο μέλη μιας ισότητας τον ίδιο παράγοντα, αρκεί να γνωρίζουμε ότι είναι διάφορος του μηδενός

5. $\alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0$

Δηλαδή αν ένα γινόμενο δύο ή περισσότερων πραγματικών αριθμών είναι μηδέν τότε ένας τουλάχιστον από αυτούς είναι ίσος με το μηδέν.

Την ιδιότητα αυτή τη χρησιμοποιούμε στην επίλυση εξισώσεων

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Να λυθεί η εξίσωση: $(x - 1) \cdot (x - 2) = 0$.

Λύση

Έχουμε διαδοχικά: $(x - 1) \cdot (x - 2) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \text{ ή } x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 2$

Το σύμβολο $\Leftrightarrow$ το ονομάζουμε «ισοδύναμα» και το χρησιμοποιούμε για να συνδέσουμε δύο μαθηματικές προτάσεις αν γνωρίζουμε ότι η αλήθεια της 1ης οδηγεί στην αλήθεια της 2ης αλλά και αντίστροφα, αν η αλήθεια της 2ης οδηγεί στην αλήθεια της 1ης.

6. $\alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ και } \beta \neq 0$

Δηλαδή αν ένα γινόμενο δύο ή περισσότερων πραγματικών αριθμών είναι διάφορο του μηδενός τότε κανείς από τους αριθμούς δεν είναι μηδέν.