ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

41η ΕΘΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ
«Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»
24 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2024

Θέματα τάξεων Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

(Α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς κ, λ, μ ισχύει:

$$(\kappa+\lambda+\mu)^2 \geq 3(\kappa\lambda+\lambda\mu+\mu\kappa).$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

(Β) Αν x, y, z είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί και α, β πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε

$$\alpha(x+y+z)=\beta(xy+yz+zx)=xyz,$$

να αποδείξετε ότι $\alpha \geq 3\beta^2$. Πότε ισχύει η ισότητα;

Πρόβλημα 2

Θεωρούμε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και τον περιγεγραμμένο κύκλο του ω. Με κέντρο το σημείο Α γράφουμε κύκλο γ που τέμνει το τόξο ΑΒ του κύκλου ω, που δεν περιέχει το Γ, στο σημείο Δ και το τόξο ΑΓ, που δεν περιέχει το Β, στο σημείο Ε. Υποθέτουμε ότι το σημείο τομής Κ των ευθειών ΒΕ και ΓΔ ανήκει στον κύκλο γ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΚ είναι κάθετη στην ευθεία ΒΓ.

Πρόβλημα 3

Να εξετάσετε αν μπορούμε να τοποθετήσουμε τους δεκαέξι θετικούς διαιρέτες του 2024 στα κελιά του διπλανού πίνακα έτσι ώστε το άθροισμα των τεσσάρων αριθμών μιας οποιασδήποτε γραμμής ή στήλης να είναι πολλαπλάσιο του 3.

Πρόβλημα 4

Να αποδείξετε ότι υπάρχουν άπειρες τριάδες θετικών ακέραιων αριθμών (x, y, z) τέτοιες ώστε

$$x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx=6xyz.$$

Να απαντήσετε και στα 4 προβλήματα
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες

Καλή επιτυχία

Πρόβλημα 1

(Α) $(\kappa+\lambda+\mu)^2 = \kappa^2+\lambda^2+\mu^2+2\kappa\lambda+2\kappa\mu+2\lambda\mu$

Ή πρός απόδειξη γίνεται

$\kappa^2+\lambda^2+\mu^2 \geq \kappa\lambda+\lambda\mu+\kappa\mu$ (είναι γνωστή ανισότητα)

πού ισχύει γιατί

$\kappa^2+\lambda^2+\mu^2-(\kappa\lambda+\lambda\mu+\kappa\mu) = \frac{1}{2}\left[(\kappa-\mu)^2+(\kappa-\lambda)^2+(\lambda-\mu)^2\right]$

Ή ισότητα ισχύει αν καί μόνο αν $\kappa=\lambda=\mu$

Β.

Αφού $xyz \neq 0$ μπορούμε νά διαιρέσουμε.

Παίρνουμε ότι

$$\alpha\left(\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}+\frac{1}{xy}\right)=1$$

$$\beta\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1$$

Άρα $\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}+\frac{1}{xy}=\frac{1}{\alpha}$

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{\beta}$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα του Α

για $\kappa=\frac{1}{x}$, $\lambda=\frac{1}{y}$, $\mu=\frac{1}{z}$

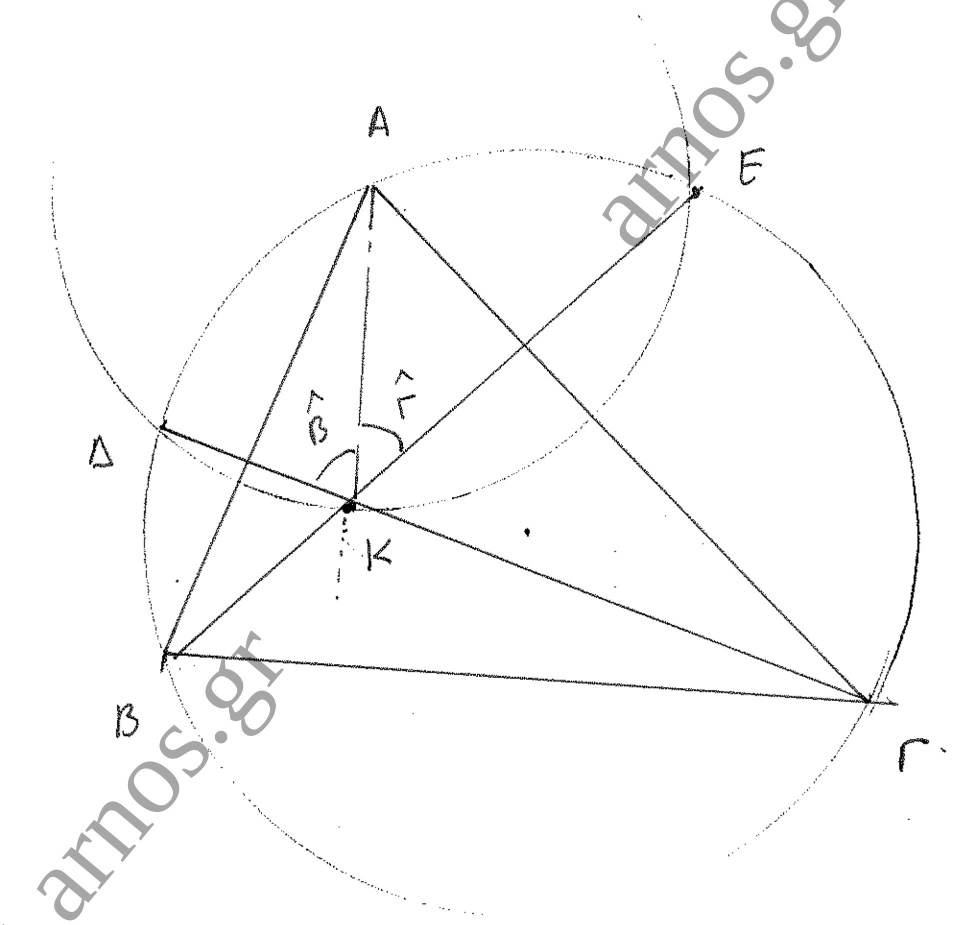
έχουμε ότι

$$\left(\frac{1}{\beta}\right)^2 \geqslant 3\cdot\frac{1}{\alpha}$$ Δηλαδή $\alpha \geqslant 3\beta^2$

Για να έχουμε ισότητα πρέπει και

αρκεί $\frac{1}{x}=\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$ δηλαδή $x=y=z$.

Πρόβλημα 2



$A\hat{E}B = \hat{\Gamma}$

$A\hat{K}E = A\hat{E}B = \hat{\Gamma}$ λόγω ισοσκελούς

$A\hat{\Delta}\Gamma = \hat{B}$

$A\hat{\Delta}K = A\hat{K}\Delta = \hat{B}$ λόγω ισοσκελούς

Άρα $\Gamma\hat{K}E = 2^{L} - \hat{B} - \hat{\Gamma} = \hat{A}$

$B\hat{E}\Gamma = \hat{A}$

Άρα $K\overset{\triangle}{\Gamma}E$ ισοσκελές στο Γ

Επειδή $A\Delta = AE$ (απέναντι κύκλω)

Είναι $\Delta\hat{\Gamma}A = A\hat{\Gamma}E$

Άρα στο τρίγωνο ΚΓΕ η ΑΓ είναι διχοτόμος οπότε και ύψος

Άρα $A\Gamma \perp BE$

Όμοια $\Gamma\Delta \perp AB$

Άρα ΒΕ, ΓΔ είναι πάνω στα ύψη

Άρα Κ ορθόκεντρο.

Άρα $AK \perp B\Gamma$

Πρόβλημα 3.

1η λυση

Οταν ενας αριθμός διαιρεθει με το 3 δινει υπολοιπο 0, 1, 2

Επειδή το 3 δεν διαιρει το 2024 καί θε διαιρετης του δεν θά διαιρειται με το 3.

Θά δινει υπολοιπο 1 ή 2

$2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$

Οι διαιρέτες του ειναι

$1, \ 2, \ 2^2, \ 2^3$

$11, \ 2.11, \ 2^2.11, \ 2^3.11$

$23, \ 2.23, \ 2^2.23, \ 2^3.23$

$23.11, \ 2.23.11, \ 2^2.23.11, \ 2^3.23.11$

Τά υπόλοιπα των διαιρέσεων τους με το 3 ειναι

1, 2, 1, 2

2, 1, 2, 1

2, 1, 2, 1

1, 2, 1, 2

Παρατηρούμε ότι σέ κάθε γραμμή καί κάθε στήλη τό άθροισμα είναι 6 καί διαιρείται μέ τό 3

Αρκεί λοιπόν νά βάλουμε στά κελιά τοῦ πίνακα τούς διαιρέτες τοῦ 2024 όπως τούς γράψαμε.

2η λυση

Ενας ακεραιος εχει μιά από τίς τρεις παρακάτω μορφές $3k, 3k+1, 3k-1$ όπου k ακεραιος

Αυτό γιατί αν τό υπολοιπο της διαίρεσης μέ τό 3 ειναι 2 τότε θά ειναι $3\lambda+2 = 3\lambda+3+2-3 = 3(\lambda+1)-1$

$2024 = 2022+2$

Αρα εχει την μορφή $3k-1$

Γιά κάθε διαιρετη x τού 2024 θά υπαρχει διαιρετης y τού 2024 μέ $xy = 2024$

Επειδή τό 2024 εχει την μορφή $3k-1$

Ενα από τά x, y θά εχει την μορφη $3k+1$, τό αλλο $3k-1$

Επειδή $\sqrt{2024}$ δεν είναι φυσικός

όταν $xy=2024$ θα είναι $x \neq y$

Συνάγουμε ότι οι μισοί διαιρέτες

του 2024 είναι της μορφής $3k+1$

και οι άλλοι μισοί της μορφής $3k-1$

Ξεκινώντας το k αν τους

βάλουμε

1	-1	1	-1
-1	1	-1	1
1	-1	1	-1
-1	1	-1	1

Έχουμε το ζητούμενο

Πρόβλημα 4

Ας κάνουμε κάποιες παρατηρήσεις

1) Η τριάδα $(1,1,1)$ είναι λύση

2) Αν η τριάδα (a, b, c) είναι λύση τότε είναι και οι τριάδες
(a, c, b), (b, a, c) (b, c, a)
(c, a, b), (c, b, a)

3) και σπουδαιότερη

Η σχέση γράφεται

$$x^2 + x(y+z-6yz) + y^2+z^2+yz=0$$

Δηλαδή αν την δούμε ως προς x είναι τριώνυμο.

Εσω (a,b,c) μιά λυση

Τό a θά ειναι ριζα της εξισωσης

$$x^2+x(b+c-6bc)+b^2+c^2+bc=0$$

Αυτη εχει και αλλη ριζα εστω p

Θα εχουμε $a+p=-(b+c-6bc)$

Δηλαδή $p=6bc-b-c-a$

Αν τα a,b,c ειναι ακέραιοι τότε και τό p ειναι ακεραιος

Δηλαδή τελικά αν (a,b,c) λυση τότε και $(6bc-b-c-a,\ b,\ c)$ λύση

Γιά νά αποδείξουμε ότι έχει άπειρες λύσεις αρκεί νά αποδείξουμε ότι γιά κάθε λύση (a, b, c) μέ a, b, c θετικούς ακέραιους υπάρχει λύση (a_1, b_1, c_1) μέ $a_1 > a$ καί b_1, c_1 θετικοί ακέραιοι.

Λόγω του 2 καί 3

~~θα~~ από την (a, b, c) (b, c, a) (c, b, a) προκύπτουν οι λύσεις

$(6bc-b-c-a,\ b,\ c)$

$(6ca-a-c-b,\ c,\ a)$

$(6ba-b-a-c,\ b,\ a)$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι ένας από τους

$$6bc-b-c-a,\ 6ca-a-c-b,\ 6ba-b-a-c$$

είναι μεγαλύτερος του a

Αν δεν συνέβαινε αυτό θα είχαμε

$$6bc-b-c-a \leq a$$

$$6ca-a-c-b \leq a$$

$$6ba-b-a-c \leq a$$

Προσθέτοντας παίρνουμε

$$6(bc+ca+ba)-3a-3b-3c \leq 3a$$

Δηλαδή

$$6(bc+ca+ba) \leq 6a+3b+3c \quad (1)$$

Επειδή $a,b,c \geq 1$ έχουμε

$6ca \geqslant 6a$

$6bc > 3bc \geqslant 3c$

$6ba > 3ba \geqslant 3b$

Άρα

$$6(ca+bc+ba) > 6a+3b+3c$$

Άτοπο λόγω της (1)

Άρα υπάρχει λύση (a_1, b_1, c_1)

με $a_1 > a$.

Άρα υπάρχουν άπειρες λύσεις

Θέμα 4 (2η λύση)

$$x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz=6xyz$$

Για $z=1$ γίνεται

$$x^2+y^2+1+xy+x+y=6xy$$ που

γράφεται

$$x^2-x(5y-1)+y^2+y+1=0 \quad (1)$$

ή $$y^2-y(5x-1)+x^2+x+1=0 \quad (2)$$

Μια λύση είναι η $x=1,\ y=1$

Αν υπάρχουν πεπερασμένες πλήθους λύσεις τότε θα υπάρχει μια λύση (α,b) ώστε για κάθε άλλη λύση (x,y) να είναι

$$x\le \max(\alpha,b)$$

$$y\le \max(\alpha,b)$$

Έστω $\max(a,b)=a$

Τό b θά είναι λύση της

$$y^2-y(5a-1)+a^2+a+1=0$$

Σαν τριώνυμο θά έχει ακόμα μια λύση έστω p ώστε

$$p+b=5a-1$$

Προφανώς τό p είναι φυσικός

Επίσης $p=5a-1-b \geq 5a-1-a=4a-1>a$

Ή (a,p) είναι λύση μέ $p>a$ ΑΤΟΠΟ.

Όμοια οδηγούμεθα σέ άτοπο αν $\max(a,b)=b$.

Άρα γιά $z=1$ υπάρχουν άπειρες λύσεις οπότε και ή αρχική έχει άπειρες λύσεις