

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ  
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34  
106 79 ΑΘΗΝΑ  
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025  
e-mail : info@hms.gr  
www.hms.gr



GREEK MATHEMATICAL SOCIETY  
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street  
GR. 106 79 - Athens - HELLAS  
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025  
e-mail : info@hms.gr  
www.hms.gr

**41<sup>η</sup> ΕΘΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ**  
**«Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»**  
**24 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2024**  
**Θέματα τάξεων Γυμνασίου**

**Πρόβλημα 1**

(A) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς  $\kappa, \lambda, \mu$  ισχύει:

$$(\kappa + \lambda + \mu)^2 \geq 3(\kappa\lambda + \lambda\mu + \mu\kappa).$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

(B) Αν  $x, y, z$  είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί και  $\alpha, \beta$  πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε

$$\alpha(x + y + z) = \beta(xy + yz + zx) = xyz,$$

να αποδείξετε ότι  $\alpha \geq 3\beta^2$ . Πότε ισχύει η ισότητα;

**Πρόβλημα 2**

Θεωρούμε οξυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  και τον περιγεγραμμένο κύκλο του  $\omega$ . Με κέντρο το σημείο  $A$  γράφουμε κύκλο  $\gamma$  που τέμνει το τόξο  $AB$  του κύκλου  $\omega$ , που δεν περιέχει το  $\Gamma$ , στο σημείο  $\Delta$  και το τόξο  $A\Gamma$ , που δεν περιέχει το  $B$ , στο σημείο  $E$ . Υποθέτουμε ότι το σημείο τομής  $K$  των ευθειών  $BE$  και  $\Gamma\Delta$  ανήκει στον κύκλο  $\gamma$ . Να αποδείξετε ότι η ευθεία  $AK$  είναι κάθετη στην ευθεία  $B\Gamma$ .

**Πρόβλημα 3**

Να εξετάσετε αν μπορούμε να τοποθετήσουμε τους δεκαέξι θετικούς διαιρέτες του 2024 στα κελιά του διπλανού πίνακα έτσι ώστε το άθροισμα των τεσσάρων αριθμών μιας οποιασδήποτε γραμμής ή στήλης να είναι πολλαπλάσιο του 3.


**Πρόβλημα 4**

Να αποδείξετε ότι υπάρχουν άπειρες τριάδες θετικών ακέραιων αριθμών  $(x, y, z)$  τέτοιες ώστε

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = 6xyz.$$

*Να απαντήσετε και στα 4 προβλήματα*  
*Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες*  
*Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες*

*Καλή επιτυχία*