

$$E_{AEFZ} = \frac{1}{2} \cdot AF \cdot EZ = AB \cdot EF \Rightarrow \frac{\alpha\sqrt{5}}{2} \cdot EZ = \alpha \cdot \frac{5\alpha}{4} \Rightarrow EZ = \frac{\alpha\sqrt{5}}{2}. \quad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε: $AF = 2 \cdot EZ$

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1. Θεωρούμε τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς a, b, c έτσι ώστε οι αριθμοί $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}$ και $\frac{c}{a}$ να είναι ακέραιοι. Να βρεθούν όλες οι δυνατές τιμές της παράστασης

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι οι ακέραιοι αριθμοί $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}$ και $\frac{c}{a}$ έχουν γινόμενο

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} = 1$$

Συνεπώς, είτε και οι τρεις θα είναι ίσοι με 1 είτε ένας εξ αυτών θα ισούται με 1 και οι άλλοι δύο με -1 .

(1ος τρόπος) Στην πρώτη περίπτωση παίρνουμε $a = b = c$, οπότε

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 3a \cdot \frac{3}{a} = 9.$$

Στη δεύτερη περίπτωση, λόγω κυκλικής συμμετρίας, ας υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι

$$\frac{a}{b} = 1, \quad \frac{b}{c} = \frac{c}{a} = -1 \Rightarrow a = b = -c \Rightarrow b + c = 0 = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0,$$

οπότε

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = a \cdot \frac{1}{a} = 1.$$

(2ος τρόπος) Ισχύει ότι

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = \left(1 + \frac{a}{b} \right) \left(1 + \frac{b}{c} \right) \left(1 + \frac{c}{a} \right) + 1$$

Έτσι, αν και οι τρεις αριθμοί $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}$ και $\frac{c}{a}$ είναι ίσοι με 1, τότε η τιμή της παράστασης είναι ίση με $2 \cdot 2 \cdot 2 + 1 = 9$, ενώ αν ένας εξ αυτών ισούται με 1 και οι άλλοι δύο με -1 , τότε η τιμή της παράστασης είναι ίση με $0 + 1 = 1$.

Συνεπώς, οι δυνατές τιμές της παράστασης $(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$ είναι το 9 και το 1.

Πρόβλημα 2. Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς x, y , με $y \neq -2$, ώστε να ισχύουν οι σχέσεις:

$$x^2 - 4x + \frac{5}{y+2} = 2 \quad \text{και} \quad 3(x-2)^2 - \frac{4}{y+2} = -1.$$

Λύση

Αν θέσουμε

$$\alpha = (x - 2)^2 \text{ και } \beta = \frac{1}{y + 2}$$

προκύπτει το σύστημα:

$$\{\alpha + 5\beta = 6, \quad 3\alpha - 4\beta = -1\} \Leftrightarrow \alpha = 1, \beta = 1.$$

Άρα έχουμε:

$$\alpha = (x - 2)^2 = 1 \text{ και } \beta = \frac{1}{y + 2} = 1 \Leftrightarrow x - 2 = \pm 1, y = -1$$

$$\Leftrightarrow (x, y) = (1, -1) \text{ ή } (x, y) = (3, -1).$$

Πρόβλημα 3. Να εξετάσετε αν υπάρχει θετικός ακέραιος n τέτοιος, ώστε ο αριθμός

$$A = 2023 \cdot 10^n + 1,$$

να ισούται με τετράγωνο ακεραίου αριθμού.

Λύση. (1ος τρόπος). Θα αποδείξουμε ότι δεν υπάρχει τέτοιος αριθμός.

Έστω $A = 2023 \cdot 10^n + 1 = x^2$, για κάποιο ακέραιο x . Το άθροισμα των ψηφίων του A είναι ίσο με 8, οπότε ο A δεν είναι πολλαπλάσιο του 3, άρα ούτε και ο x . Τότε

$$A - 1 = 2023 \cdot 10^n = x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1).$$

με $x - 1$ ή $x + 1$ πολλαπλάσιο του 3, άτοπο, αφού το άθροισμα των ψηφίων του $A - 1$ είναι ίσο με 7.

(2ος τρόπος) Θεωρώντας τις περιπτώσεις $x = 3k, x = 3k + 1, x = 3k + 2$, με k ακέραιο, βλέπουμε ότι το τετράγωνο x^2 ενός ακέραιου αριθμού x αφήνει υπόλοιπο 0 ή 1 κατά τη διαίρεση του με το 3. Αφού

$$A = 2022999 \dots 9 + 2 = \text{πολ. } 3 + 2$$

όπου το 9 εμφανίζεται n φορές, ο A δεν μπορεί να είναι τέλειο τετράγωνο.

Πρόβλημα 4. Σε ένα κύκλο $c(O, R)$ θεωρούμε τα σημεία A, B, Γ και Δ τέτοια ώστε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ να είναι ισοσκελές τραπέζιο με $AB \parallel \Delta\Gamma$. Έστω E το σημείο τομής της διχοτόμου της γωνίας A του τραπέζιου με τον κύκλο $c(O, R)$. Αν η παράλληλη από το E στην $\Delta\Gamma$ τέμνει την ευθεία $B\Gamma$ στο Z , να δειχθεί ότι η ευθεία OZ είναι κάθετη στην $E\Gamma$.

Λύση

Δίνεται ότι η ΑΕ διχοτομεί τη γωνία

$\hat{A}$, και $EZ \parallel \Delta\Gamma$, ενώ γνωρίζουμε ότι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο είναι ίσες. Έτσι, έχουμε

$$Z\hat{E}\Gamma = E\hat{\Gamma}\Delta = \Delta\hat{A}E = \frac{\hat{A}}{2}.$$

Αφού το $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές

τραπέζιο, έχουμε $\hat{A} = \hat{B}$, και αφού $EZ \parallel \Delta\Gamma$ είναι

$$E\hat{Z}\Gamma = \Delta\hat{\Gamma}B = 180^\circ - \hat{B} = 180^\circ - \hat{A}.$$

Άρα στο τρίγωνο $EZ\Gamma$ είναι

$$E\hat{\Gamma}Z = 180^\circ - E\hat{Z}\Gamma - Z\hat{E}\Gamma = 180^\circ - (180^\circ - \hat{A}) - \frac{\hat{A}}{2} = \frac{\hat{A}}{2} = Z\hat{E}\Gamma.$$

Επομένως, το τρίγωνο $EZ\Gamma$ είναι ισοσκελές με $EZ = \Gamma Z$. Αφού $OE = OG$, τα σημεία O και Z ορίζουν την μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος EG . Συνεπώς, η ευθεία OZ είναι κάθετη στην EG .

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1. Θεωρούμε τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς a, b, c, d έτσι ώστε οι αριθμοί $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{d}$ και $\frac{d}{a}$ να είναι ακέραιοι. Να βρεθούν όλες οι δυνατές τιμές της παράστασης

$$(a + b + c + d) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right).$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι οι ακέραιοι αριθμοί $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{d}$ και $\frac{d}{a}$ έχουν γινόμενο

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{d}{a} = 1.$$

Συνεπώς, όλοι τους είναι ίσοι με 1 ή δύο εξ αυτών είναι ίσοι με 1 και οι άλλοι δύο με -1 ή όλοι τους είναι ίσοι με -1 .

Στην πρώτη περίπτωση παίρνουμε $a = b = c = d$, οπότε

$$(a + b + c + d) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right) = 4a \cdot \frac{4}{a} = 16.$$

Στη δεύτερη περίπτωση όπου δύο εξ αυτών είναι ίσοι με 1 και οι άλλοι δύο με -1 , αν

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = -1 \text{ ή } \frac{b}{c} = \frac{d}{a} = -1,$$

τότε $a + b + c + d = 0$, οπότε η τιμή της παράστασης είναι ίση με 0.