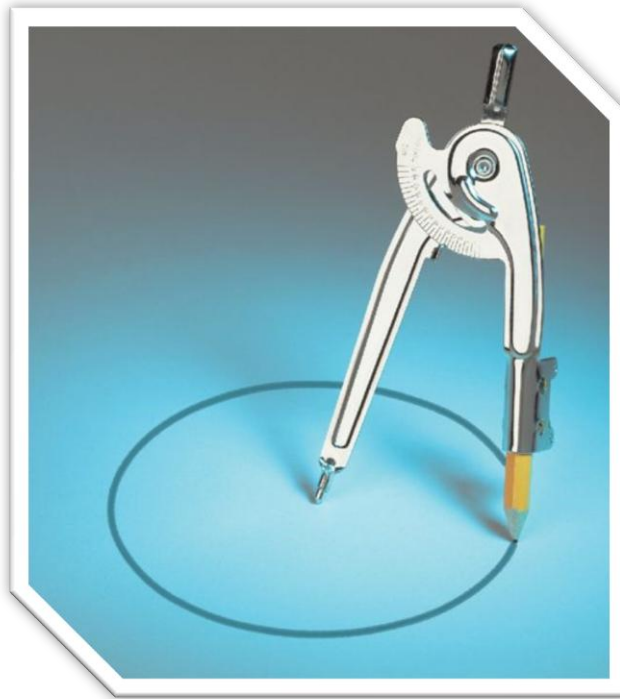


3. Μέτρηση Κύκλου



Λύσεις ασκήσεων Γεωμετρίας Β' Γυμνασίου

3.1 Εγγεγραμμένες γωνίες

σχ. βιβλίο (σ.σ. 177-179)

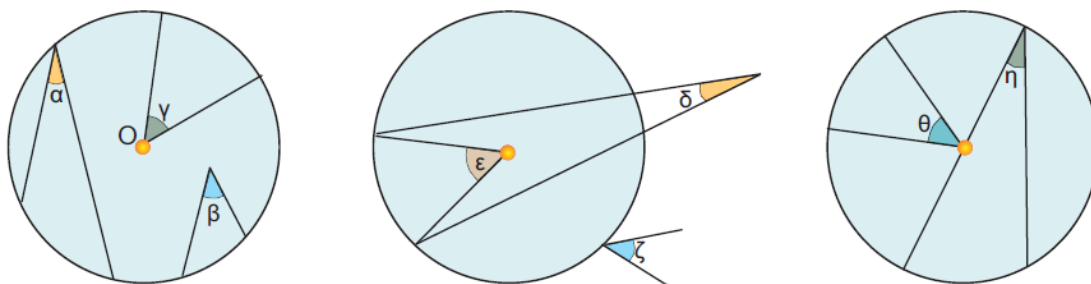
Λύσεις Ασκήσεων Μαθηματικών Β' Γυμνασίου σχ. βιβλίου (σσ. 177-179)

Μέρος Β' - 3.1 Εγγεγραμμένες γωνίες

Ερωτήσεις κατανόησης

Ερώτηση 1

Στα παρακάτω σχήματα ποιες από τις γωνίες είναι εγγεγραμμένες και ποιες επίκεντρες ;



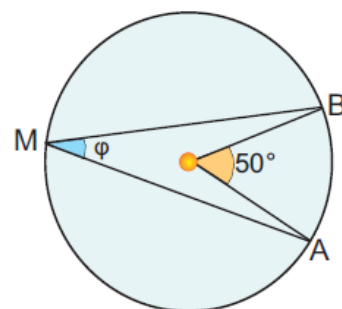
Απάντηση

Εγγεγραμμένες είναι οι γωνίες α και η
Επίκεντρες είναι οι γωνίες γ , ϵ και θ

Ερώτηση 2

Στον παρακάτω πίνακα να βάλετε σε κύκλο την σωστή απάντηση

	A	B	Γ
α) Το μέτρο της γωνίας φ είναι:	50°	25°	100°
β) Το μέτρο του τόξου \widehat{AB} είναι:	50°	25°	100°



Απάντηση

α) Η $\hat{\varphi}$ είναι το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης άρα $\hat{\varphi} = 25^\circ$

οπότε σωστή απάντηση η Β

β) Το μέτρο του τόξου AB είναι ίσο με το μέτρο της αντίστοιχης επίκεντρης

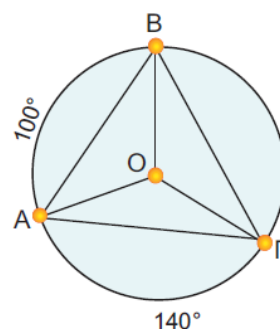
άρα $AB = 50^\circ$

	A	B	Γ
α) Το μέτρο της γωνίας φ είναι:	50°	25°	100°
β) Το μέτρο του τόξου \widehat{AB} είναι:	50°	25°	100°

Ερώτηση 3

Στον παρακάτω πίνακα να βάλετε σε κύκλο την σωστή απάντηση

	A	B	Γ
α) Το μέτρο της γωνίας $\widehat{B\hat{A}G}$ είναι:	60°	70°	50°
β) Το μέτρο της γωνίας $\widehat{A\hat{O}G}$ είναι:	120°	140°	100°
γ) Το μέτρο της γωνίας $\widehat{A\hat{B}G}$ είναι:	60°	70°	50°
δ) Το μέτρο της γωνίας $\widehat{A\hat{\Gamma}B}$ είναι:	60°	70°	50°



Απάντηση

Επειδή $AB = 100^\circ$ και $AG = 140^\circ$,

$$B\Gamma = 360^\circ - (100^\circ + 140^\circ) = 360^\circ - 240^\circ = 120^\circ$$

Το μέτρο της επίκεντρης γωνίας είναι ίσο με το μέτρο του αντιστοίχου τόξου και το μέτρο της εγγεγραμμένης γωνίας είναι ίσο με το μισό του μέτρου του αντιστοίχου τόξου. Άρα :

	A	B	Γ
α) Το μέτρο της γωνίας $\widehat{B\hat{A}G}$ είναι:	60°	70°	50°
β) Το μέτρο της γωνίας $\widehat{A\hat{O}G}$ είναι:	120°	140°	100°
γ) Το μέτρο της γωνίας $\widehat{A\hat{B}G}$ είναι:	60°	70°	50°
δ) Το μέτρο της γωνίας $\widehat{A\hat{\Gamma}B}$ είναι:	60°	70°	50°

Ερώτηση 4

Αν σε κύκλο φέρουμε δύο κάθετες διαμέτρους, τότε τα τέσσερα ίσα τόξα είναι

$$Α : 80^\circ \quad Β : 180^\circ \quad (Γ) : 90^\circ \quad Δ : 45^\circ$$

Βάλτε σε κύκλο την σωστή απάντηση

Απάντηση

Οι επίκεντρες γωνίες είναι ορθές.

$$Α: 80^\circ \quad Β: 180^\circ \quad \boxed{Γ: 90^\circ} \quad Δ: 45^\circ.$$

Ερώτηση 5

Στον παρακάτω πίνακα να βάλετε σε κύκλο την σωστή απάντηση

	A	B	Γ
α) Το μέτρο μιας εγγεγραμμένης γωνίας που βαίνει σε ημικύκλιο είναι:	180°	60°	90°
β) Αν σ' έναν κύκλο μια επίκεντρη γωνία είναι ίση με μια εγγεγραμμένη, τότε για τα αντίστοιχα τόξα ισχύει:	είναι ίσα	Το τόξο της επίκεντρης είναι διπλάσιο από το τόξο της εγγεγραμμένης	Το τόξο της επίκεντρης είναι ίσο με το μισό του τόξου της εγγεγραμμένης
γ) Η άκρη του ωροδείκτη ενός ρολογιού σε 3 ώρες διαγράφει τόξο:	60°	90°	30°
δ) Η άκρη του λεπτοδείκτη ενός ρολογιού σε 45 λεπτά διαγράφει τόξο:	45°	90°	270°

Απάντηση

α) Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή

β) Κάθε εγγεγραμμένη γωνία έχει μέτρο ίσο με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου της.


$$\gamma) \frac{3}{12} 360^\circ = \frac{1}{4} 360^\circ = 90^\circ$$

δ) $\frac{3}{4} 360^\circ = 270^\circ$

	A	B	Γ
α) Το μέτρο μιας εγγεγραμμένης γωνίας που βαίνει σε ημικύκλιο είναι:	180°	60°	90°
β) Αν σ' έναν κύκλο μια επίκεντρη γωνία είναι ίση με μια εγγεγραμμένη, τότε για τα αντίστοιχα τόξα ισχύει:	είναι ίσα	Το τόξο της επίκεντρης είναι διπλάσιο από το τόξο της εγγεγραμμένης	Το τόξο της επίκεντρης είναι ίσο με το μισό του τόξου της εγγεγραμμένης
γ) Η άκρη του ωροδείκτη ενός ρολογιού σε 3 ώρες διαγράφει τόξο:	60°	90°	30°
δ) Η άκρη του λεπτοδείκτη ενός ρολογιού σε 45 λεπτά διαγράφει τόξο:	45°	90°	270°

Απολαύστε τη διδασκαλία στα βίντεο του www.arnos.gr

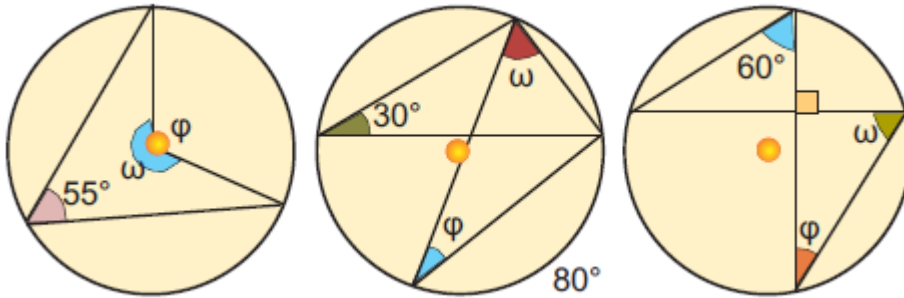
Κατανοείτε σε βάθος τη μεθοδολογία επίλυσης!

 ...Πράξεις Παιδείας!

Ασκήσεις

Άσκηση 1

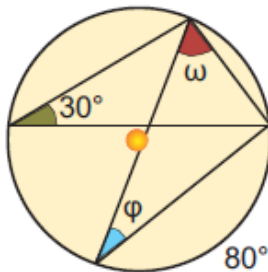
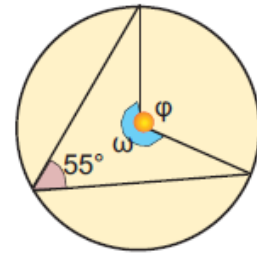
Να υπολογίσετε τις γωνίες ϕ και ω που υπάρχουν στα παρακάτω σχήματα



Λύση

Η γωνία ϕ σαν επίκεντρη είναι διπλάσια της αντίστοιχης εγγεγραμμένης. Άρα $\phi = 110^\circ$, οπότε

$$\omega = 360^\circ - \phi = 360^\circ - 110^\circ = 250^\circ$$



$\phi = 30^\circ$ ως εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο και

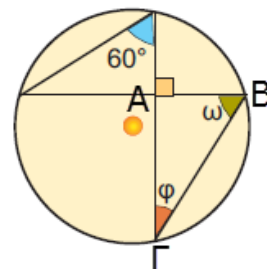
$\omega = 40^\circ$ ως εγγεγραμμένη σε τόξο 80°

$\omega = 60^\circ$ ως εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο.

Το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο με

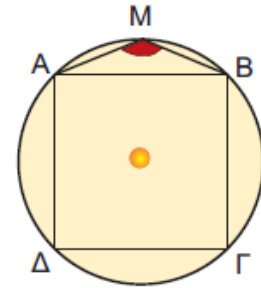
$$\omega + \phi + 90^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + \phi + 90^\circ = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow \phi = 30^\circ$$



Άσκηση 2

Στο διπλανό σχήμα, το $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο και το M είναι σημείο του τόξου AB . Να υπολογίσετε τη γωνία $A\hat{M}B$.

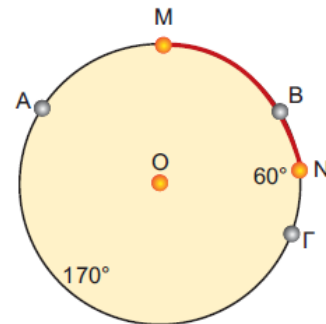


Λύση

Επειδή το $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο, είναι $\Delta\hat{A} = \Delta\hat{\Gamma} = \Gamma\hat{B} = 90^\circ$. Άρα $\Delta\hat{A}\Gamma\hat{B} = 270^\circ$,
οπότε $A\hat{M}B = 135^\circ$ ως αντίστοιχη εγγεγραμμένη

Άσκηση 3

Έστω M και N τα μέσα των τόξων AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα ενός κύκλου κέντρου O και ακτίνας r .
Αν $B\hat{\Gamma} = 60^\circ$ και $A\hat{\Gamma} = 170^\circ$, να βρείτε το μέτρο του τόξου MN .



Λύση

$$AB = 360^\circ - A\hat{\Gamma} - B\hat{\Gamma} = 360^\circ - 170^\circ - 60^\circ = 130^\circ$$

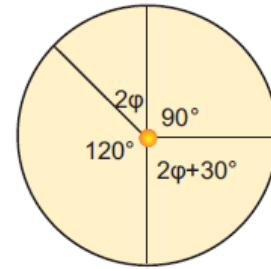
Το M είναι μέσο του τόξου AB άρα $M\hat{B} = M\hat{A} = \frac{AB}{2}$

Το N είναι μέσο του τόξου $B\Gamma$ άρα $\Gamma\hat{N} = B\hat{N} = \frac{B\hat{\Gamma}}{2}$

Άρα $M\hat{N} = M\hat{B} + B\hat{N} = \frac{AB}{2} + \frac{B\hat{\Gamma}}{2} = 65^\circ + 30^\circ = 95^\circ$

Άσκηση 4

Να υπολογίσετε την γωνία φ στο διπλανό σχήμα



Λύση

Στο αριστερό ημικύκλιο έχουμε:

$$120^\circ + 2\varphi = 180^\circ \text{ άρα } 2\varphi = 60^\circ \text{ άρα } \varphi = 30^\circ$$

Το αποτέλεσμα συμφωνεί με τις γωνίες στο δεξί ημικύκλιο.

$$90^\circ + 2\varphi + 30^\circ = 90^\circ + 2 \cdot 30^\circ + 30^\circ = 180^\circ$$

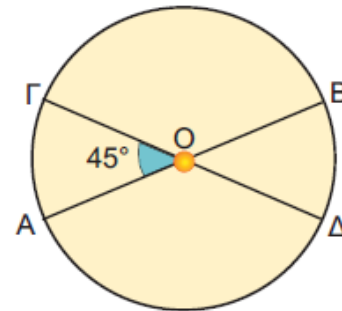
Άσκηση 5

Στον κύκλο κέντρου O και ακτίνας ρ του

διπλανού σχήματος να υπολογίσετε τα τόξα

AB , ΔB , $B\Gamma$

και ΓA , αν γνωρίζουμε ότι $\angle AOG = 45^\circ$ και ότι οι AB , $\Gamma\Delta$ είναι διάμετροι του κύκλου.



Λύση

Αφού η AB είναι διάμετρος, το τόξο AB είναι ημικύκλιο, άρα $AB = 180^\circ$.

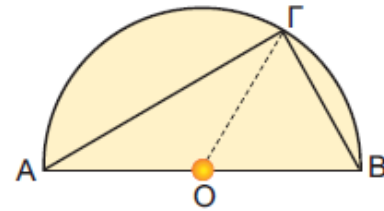
$\angle AOG = 45^\circ$, άρα $\Gamma A = 45^\circ$ ως αντίστοιχο τόξο επίκεντρης.

$$B\Gamma = A\Gamma B - \Gamma A = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$

$\angle BO\Delta = 45^\circ$ επειδή είναι κατακορυφήν με την $\angle AOG$, άρα $\Delta B = 45^\circ$

Άσκηση 6

Σε ημικύκλιο διαμέτρου $AB = 6\text{cm}$ δίνεται σημείο Γ έτσι ώστε $A\Gamma = 2B\Gamma$. Να υπολογίσετε τις πλευρές και τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.



Λύση

$$A\Gamma + B\Gamma = 180^\circ \text{ άρα } 2B\Gamma + B\Gamma = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow 3B\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow B\Gamma = 60^\circ \text{ οπότε } A\Gamma = 120^\circ$$

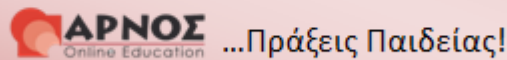
$B = 60^\circ$ ως εγγεγραμμένη σε τόξο 120° .

$A = 30^\circ$ ως εγγεγραμμένη σε τόξο 60°

$\Gamma = 90^\circ$ ως εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο.

Απολαύστε τη διδασκαλία στα βίντεο του www.arnos.gr

Κατανοείτε σε βάθος τη μεθοδολογία επίλυσης!

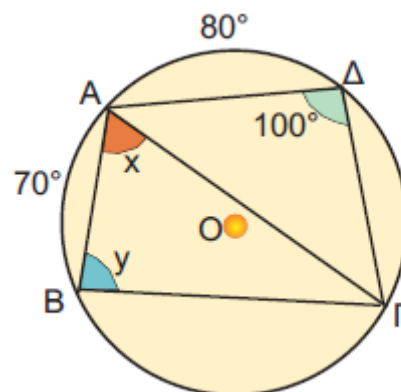


Άσκηση 7

Να υπολογίσετε τις γωνίες x και y του διπλανού σχήματος

Λύση

$\angle A\Delta\Gamma = 100^\circ$ άρα $\angle AB\Gamma = 200^\circ$ ως αντίστοιχο τόξο εγγεγραμμένης.



Και επειδή $\widehat{AB} = 70^\circ$, θα είναι

$$\widehat{B\Gamma} = \widehat{AB\Gamma} - \widehat{AB} = 200^\circ - 70^\circ = 130^\circ$$

τότε $x = 65^\circ$ ως εγγεγραμμένη σε τόξο 130° .

$\widehat{AB\Gamma} + \widehat{\Gamma\Delta A} = 360^\circ$ άρα $200^\circ + \widehat{\Gamma\Delta A} = 360^\circ$ οπότε $\widehat{\Gamma\Delta A} = 160^\circ$ οπότε $y = 80^\circ$ ως εγγεγραμμένη σε τόξο 160°

Άσκηση 8

Σε έναν κύκλο θεωρούμε τρία διαδοχικά τόξα $\widehat{AB} = 100^\circ$, $\widehat{B\Gamma} = 160^\circ$ και $\widehat{\Gamma\Delta} = 80^\circ$
 Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$

Λύση

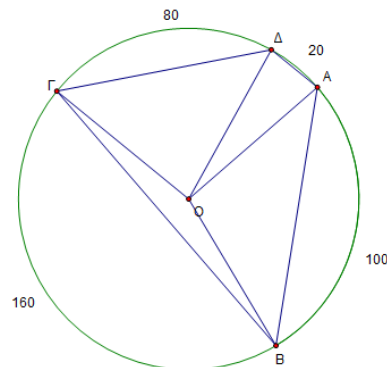
$$\widehat{\Delta A} = 360^\circ - 160^\circ - 100^\circ - 80^\circ = 20^\circ$$

$\widehat{B\Gamma\Delta} = \widehat{B\Gamma} + \widehat{\Gamma\Delta} = 240^\circ$ άρα $\widehat{\Delta A B} = 120^\circ$ ως εγγεγραμμένη σε τόξο 240°

$$\widehat{AB\Gamma} = \widehat{AB} + \widehat{B\Gamma} = 260^\circ \text{ άρα } \widehat{\Gamma\Delta A} = 130^\circ$$

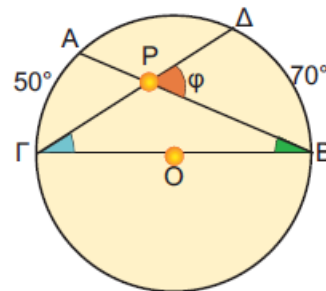
$\widehat{A B \Gamma} = 50^\circ$ ως εγγεγραμμένη σε τόξο 100°

και $\widehat{\Delta \Gamma B} = 60^\circ$ ως εγγεγραμμένη σε τόξο 120°



Άσκηση 9

Στον κύκλο κέντρου O οι χορδές AB και $\Gamma\Delta$ τέμνονται στο P . Αν $\widehat{A\Gamma} = 50^\circ$ και $\widehat{B\Delta} = 70^\circ$ να υπολογίσετε την γωνία ϕ



Λύση

$\widehat{A B \Gamma} = 25^\circ$ ως εγγεγραμμένη σε τόξο 50°

$\Delta \Gamma \text{ B} = 35^\circ$ ως εγγεγραμμένη σε τόξο 70°

Στο τρίγωνο ΒΡΓ είναι $\Delta \Gamma \text{ B} + \text{A B } \Gamma + \text{B P } \Gamma = 180^\circ$ άρα

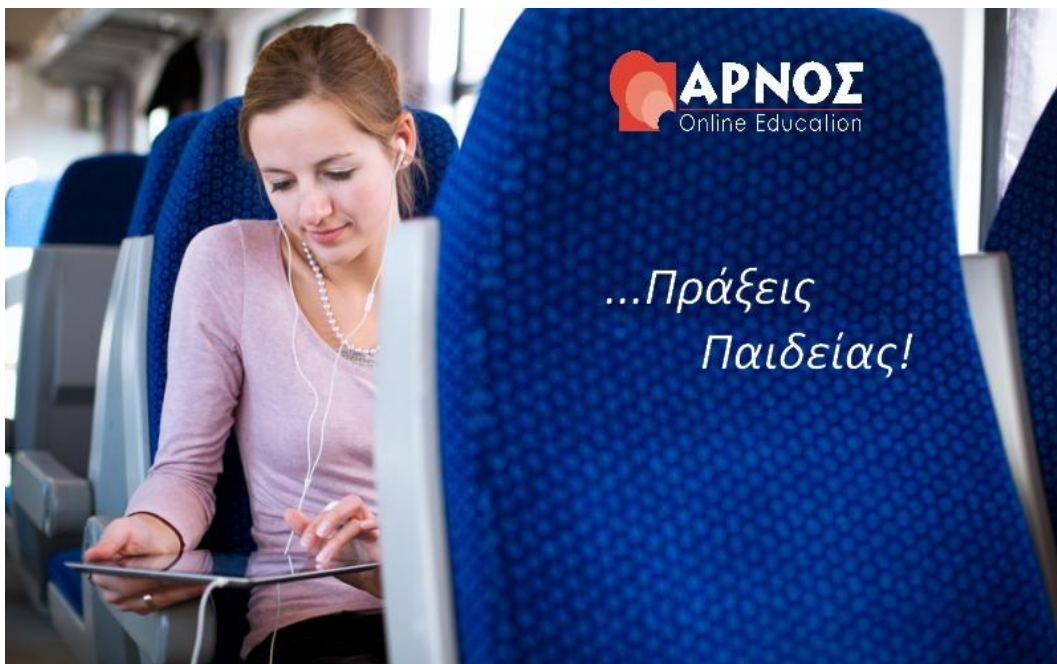
$$35^\circ + 25^\circ + \text{B P } \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow \text{B P } \Gamma = 120^\circ$$

οπότε $\varphi = 60^\circ$ ως παραπληρωματική της Β Ρ Γ.

Επιμέλεια: Βασίλης Γκιμίσης MEd - Μαθηματικός

Φροντιστηριακό e-μάθημα

Γυμνάσιο: 9.000 μαθήματα με βίντεο-διδασκαλία για όλο το σχολικό έτος **μόνο με 150 ευρώ!**



Μελέτη όπου, όποτε και όσο εσύ θες!



Διδάσκουμε μεθοδικά σε βίντεο τη θεωρία του σχολικού βιβλίου και λύνουμε όλες τις ασκήσεις

Δημιουργούμε συνεχώς νέα βίντεο με διδασκαλία για τις εκπαιδευτικές σου απαιτήσεις



Παίζουμε και μαθαίνουμε με on line test αξιολόγησης & SOS διαγωνίσματα προσομοίωσης για τις εξετάσεις

Λύνουμε απορίες ζωντανά on line καθημερινά 3 μ.μ. - 8 μ.μ.





...Πράξεις Παιδείας!