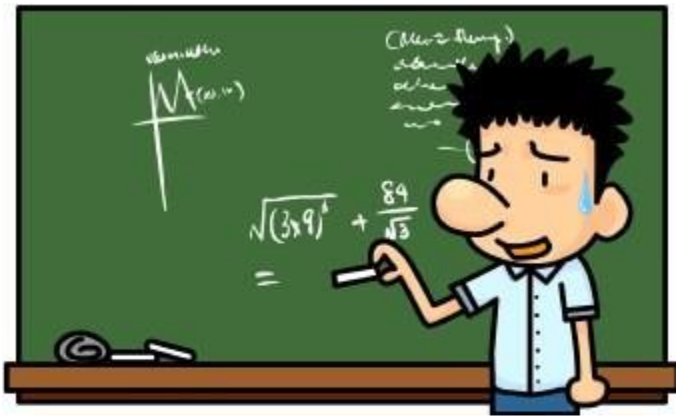
2. Πραγματικοί Αριθμοί



Λύσεις ασκήσεων Μαθηματικών Β' Γυμνασίου

2.3 Προβλήματα

σχ. βιβλίο (σσ. 51-52)

ΑΡΝΟΣ
Online Education

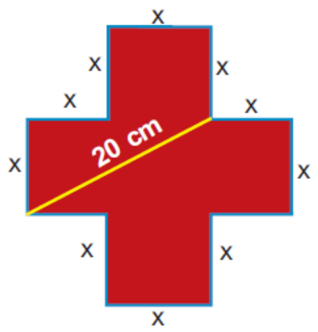
Λύσεις Ασκήσεων Μαθηματικών Β΄ Γυμνασίου σχ. βιβλίου (σσ. 51-52)

2.3 Προβλήματα

Ασκήσεις

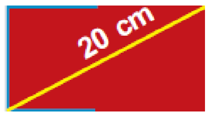
Άσκηση 1

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σταυρού του διπλανού σχήματος.



Απάντηση

Ο σταυρός αποτελείται από 5 τετραγωνάκια πλευράς x, που το καθένα έχει εμβαδόν x^2 Άρα το εμβαδόν Ε του σταυρού είναι ίσο με $5x^2$



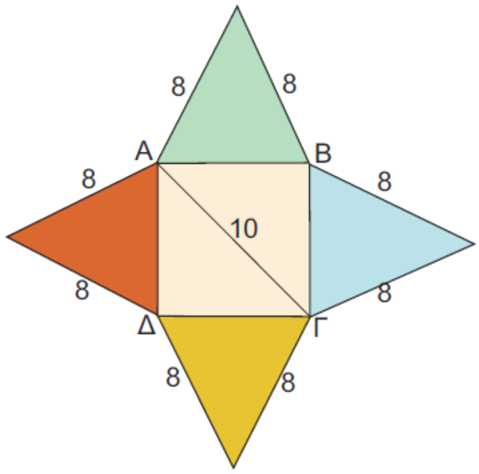
Αποκόπτοντας από το σταυρό το ορθογώνιο τμήμα με διαγώνιο 20 cm δημιουργούνται δύο ορθογώνια τρίγωνα με κάθετες πλευρές 2x και x και υποτείνουσα 20 cm . Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα σε ένα από αυτά έχουμε $x^2 + (2x)^2 = 400$

$x^2 + (2x)^2 = 400 \Leftrightarrow 5x^2 = 400$

Άρα $E = 5x^2 = 400$ cm^2

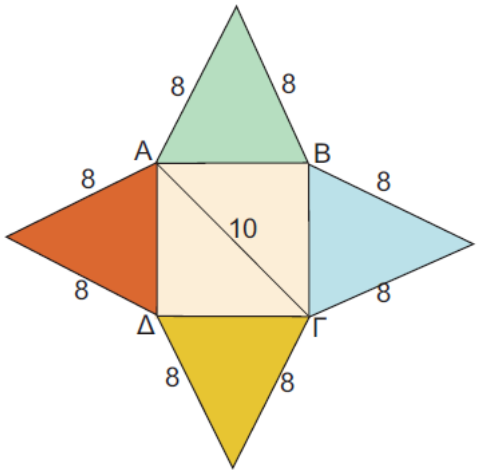
Άσκηση 2

Το ανάπτυγμα σε χαρτόνι μιας πυραμίδας αποτελείται από το τετράγωνο ΑΒΓΔ ,που η διαγώνιος του είναι 10 cm, και τέσσερα ισοσκελή τρίγωνα, που οι ίσες πλευρές τους είναι 8cm. Να βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας της πυραμίδας



Απάντηση

Το εμβαδόν της επιφάνειας της πυραμίδας είναι ίσο με το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ και το εμβαδόν των τεσσάρων ισοσκελών τριγώνων.



Το εμβαδόν του τετραγώνου είναι ίσο με AB^2 Άρα πρέπει να υπολογίσουμε το AB^2.

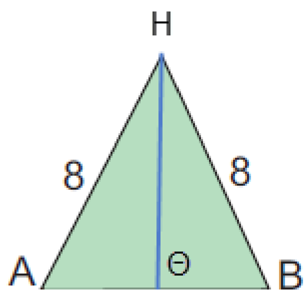
Επειδή $ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2$ έχουμε

$ΑΒ^2 + ΒΓ^2 = 10^2$ και επειδή $ΒΓ = ΑΒ$

έχουμε $2ΑΒ^2 = 100 = 2x^2$ άρα $ΑΒ^2 = 50$.

Επομένως το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι 50 cm^2.

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΗ το ύψος του ΗΘ είναι και διάμεσος, άρα $ΑΘ = \frac{AB}{2}$ και το εμβαδόν του είναι ίσο με $\frac{ΑΒ \cdot ΗΘ}{2}$



Από το Πυθαγόρειο στο τρίγωνο ΑΗΘ έχουμε :

$$ΑΗ^2 = ΗΘ^2 + ΑΘ^2 \Leftrightarrow 8^2 = ΗΘ^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 8^2 = ΗΘ^2 + \frac{AB^2}{4}$$

Όμως $AB^2 = 50$ άρα $64 = H\Theta^2 + \frac{50}{4}$

$\Leftrightarrow H\Theta^2 = 64 - \frac{50}{4} = \frac{206}{4}$ οπότε $H\Theta = \sqrt{\frac{206}{4}} \simeq 7{,}17$ και επειδή

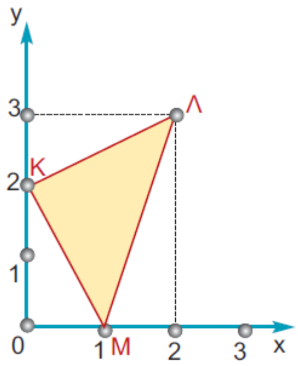
$AB^2 = 50 \Leftrightarrow AB = \sqrt{50} \simeq 7{,}07$

το εμβαδόν του τριγώνου ΑΗΘ είναι ίσο με $\frac{7{,}07 \cdot 7{,}17}{2} \simeq 25{,}35$

Το εμβαδόν της επιφάνειας της πυραμίδας είναι ίσο με

$50 + 4 \cdot 25{,}35 = 50 + 101{,}4 = 151{,}4$ cm^2.

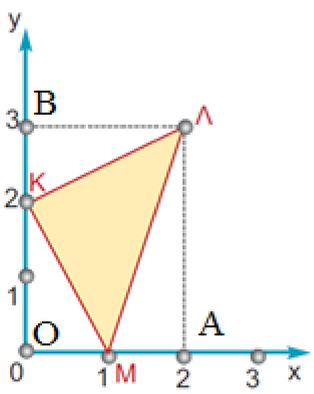
Άσκηση 3



Οι συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου ΚΛΜ είναι Κ(0, 2), Λ(2, 3) και Μ(1, 0). Να εξετάσετε αν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

Απάντηση

Το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ορθογώνιο αν το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς είναι ίσο με τα άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δύο πλευρών.



Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΚΜΟ ισχύει : $KM^2 = KO^2 + OM^2$

άρα $KM^2 = 2^2 + 1^2 = 5$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΛΜΑ ισχύει : $\Lambda M^2 = MA^2 + A\Lambda^2$

άρα $\Lambda M^2 = 1^2 + 3^2 = 10$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΛΚΒ ισχύει : $K\Lambda^2 = KB^2 + B\Lambda^2$

άρα $K\Lambda^2 = 1^2 + 2^2 = 5$

Η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου ΚΛΜ είναι η ΛΜ για την οποία ισχύει

$ΛΜ^2 = 10 = 5 + 5 = ΚΛ^2 + ΚΜ^2$. Άρα το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ορθογώνιο.

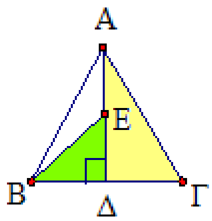
Άσκηση 4

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά 12 cm. Αν Ε είναι το μέσο της διαμέσου ΑΔ , να υπολογιστεί το μήκος της ΒΕ.

Απάντηση

Στο ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ η διάμεσος του ΑΔ είναι και ύψος άρα το τρίγωνο ΑΔΓ

είναι ορθογώνιο με $ΓΔ = \frac{ΒΓ}{2} = 6$ και ισχύει:



Πυθαγόρειο στο ΒΑΔ : $ΓΑ^2 = ΑΔ^2 + ΓΔ^2$

Άρα $12^2 = ΑΔ^2 + 6^2 \Leftrightarrow 144 = ΑΔ^2 + 36$

$\Leftrightarrow ΑΔ^2 = 108$ οπότε $ΑΔ = \sqrt{108}$

Επίσης $ΕΔ = \frac{ΑΔ}{2} = \frac{\sqrt{108}}{2}$

Το τρίγωνο ΒΕΔ είναι ορθογώνιο και ισχύει: $ΒΕ^2 = ΒΔ^2 + ΕΔ^2$

Άρα $ΒΕ^2 = 6^2 + \left(\frac{\sqrt{108}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow ΒΕ^2 = 36 + \frac{108}{4} = \frac{252}{4}$

επομένως $ΒΕ = \sqrt{\frac{252}{4}} = 7{,}94$ m

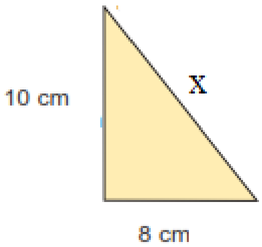
Άσκηση 5

Δύο πλευρές ενός τριγώνου έχουν μήκος 10cm και 8cm αντίστοιχα.

Να βρεθεί η τρίτη πλευρά του τριγώνου ώστε το τρίγωνο να είναι ορθογώνιο

(να διακρίνετε δύο περιπτώσεις).

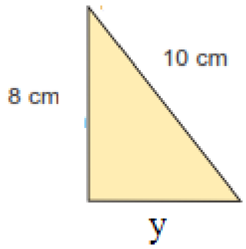
Απάντηση



Περίπτωση 1η Οι δοσμένες πλευρές είναι οι κάθετες και ψάχνουμε την υποτείνουσα την οποία συμβολίζουμε με x .

Τότε $x^2 = 10^2 + 8^2 \Leftrightarrow x^2 = 164$ άρα $x = \sqrt{164} \simeq 12{,}8$

Περίπτωση 2η Μια από τις δοσμένες πλευρές είναι η υποτείνουσα (η μεγαλύτερη) και ψάχνουμε την άλλη κάθετη πλευρά την οποία συμβολίζουμε με y. Τότε 10^2 =



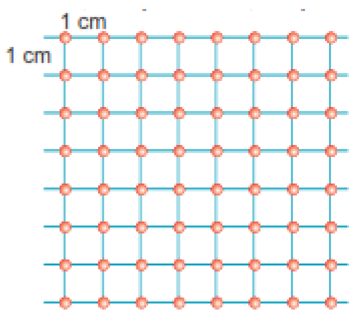
$8^2 + y^2 \Leftrightarrow 100 = 64 + y^2 \Leftrightarrow y^2 = 36$ άρα $y = 6$

Άσκηση 6

Οι κουκκίδες του παρακάτω σχήματος απέχουν 1cm οριζόντια και κατακόρυφα

α) Να ενώσετε δύο κουκκίδες ώστε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος που σχηματίζεται να είναι i) $\sqrt{2}$ cm, ii) $\sqrt{5}$ cm, iii) $\sqrt{13}$ cm

β) Να ενώσετε τέσσερις κουκκίδες ώστε να σχηματιστεί τετράγωνο με εμβαδόν i) 2cm^2, ii) 5cm^2, iii) 13 cm^2



Απάντηση

α) i) Το τμήμα ΒΓ έχει μήκος $\sqrt{2}$ cm γιατί από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε

$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2$ Άρα

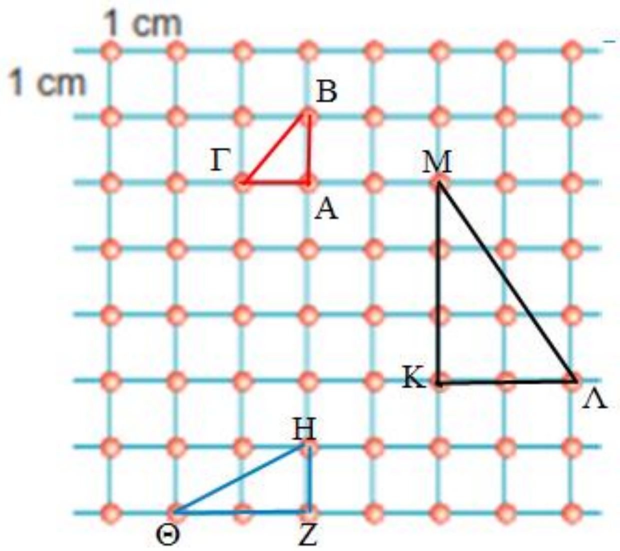
$ΒΓ^2 = 1^2 + 1^2 \Leftrightarrow ΒΓ^2 = 2$

οπότε $ΒΓ = \sqrt{2}$ cm

ii) Το τμήμα ΗΘ έχει μήκος $\sqrt{5}$ cm γιατί από το από το ορθογώνιο τρίγωνο ΗΘΖ έχουμε ότι $ΗΘ^2 = ΗΖ^2 + ΖΘ^2$ Άρα

$ΗΘ^2 = 2^2 + 1^2 \Leftrightarrow ΗΘ^2 = 5$ οπότε

$ΗΘ = \sqrt{5}$ cm



iii) Το τμήμα ΜΛ έχει μήκος Ι $\sqrt{13}$ cm γιατί από το ορθογώνιο τρίγωνο ΚΛΜ έχουμε

$ΜΛ^2 = ΚΜ^2 + ΚΛ^2$ Άρα $ΜΛ^2 = 2^2 + 3^2 \Leftrightarrow ΜΛ^2 = 13$ οπότε $ΜΛ = \sqrt{13}$ cm

β) i) Το τετράγωνο ΒΓΔΕ με πλευρά το τμήμα ΒΓ του α) i) ερωτήματος έχει

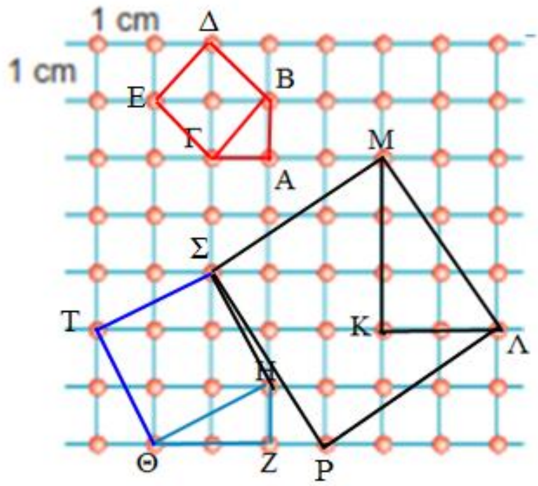
εμβαδόν $Ε = ΒΓ^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2cm^2$

ii) Το τετράγωνο ΘΗΣΤ με πλευρά το τμήμα ΗΘ του α) ii) ερωτήματος έχει

εμβαδόν $Ε = ΗΘ^2 = \left(\sqrt{5}\ \text{cm}\right)^2 = 5cm^2$

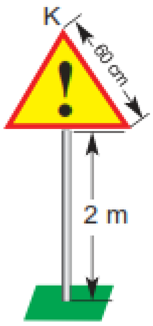
iii) Το τετράγωνο ΛΜΣΡ με πλευρά το τμήμα ΜΛ του α) iii) ερωτήματος έχει

εμβαδόν $Ε = ΜΛ^2 = \left(\sqrt{13}\ \text{cm}\right)^2 = 13cm^2$



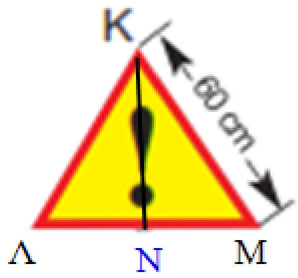
Άσκηση 7

Το σήμα της φωτογραφίας έχει σχήμα ισοπλεύρου τριγώνου με πλευρά 60 cm και στηρίζεται σε κολόνα ύψους 2m. Να βρείτε την απόσταση της κορυφής Κ της πινακίδας από το έδαφος .



Απάντηση

Έστω ΚΛΜ το ισόπλευρο τρίγωνο του σήματος και ΚΝ ύψος του, το οποίο είναι ως γνωστό και διάμεσος.



Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΚΛΝ και το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε

$ΚΛ^2 = ΚΝ^2 + ΛΝ^2 \Leftrightarrow ΚΝ^2 = ΚΛ^2 - ΛΝ^2$

Άρα $ΚΝ^2 = 60^2 - 30^2 \Leftrightarrow ΚΝ^2 = 3600 - 900$

$\Leftrightarrow ΚΝ^2 = 2700$ οπότε $ΚΝ = \sqrt{2700} = 51{,}9$ cm

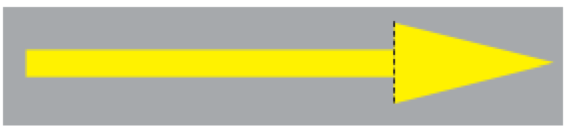
Επομένως η απόσταση της κορυφής Κ από το έδαφος είναι ίση με

200 cm + 51,9 cm = 251,9 cm

Άσκηση 8

Τα βέλη στην άσφαλτο αποτελούνται από ένα κίτρινο ορθογώνιο και ένα κίτρινο ισοσκελές τρίγωνο . Οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι 20cm και 2,3 m

Το τρίγωνο έχει βάση 60cm και ίσες πλευρές 2,1 m . Πόσα περίπου τέτοια βέλη μπορούμε να βάψουμε με 1 κιλό κίτρινο χρώμα, το οποίο μπορεί να καλύψει επιφάνεια 540 dm^2 ;

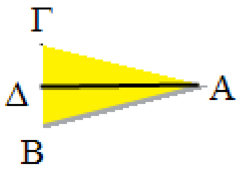


Απάντηση

Το εμβαδόν του ορθογωνίου τμήματος του βέλους είναι ίσο με

$E_{ορθ} = 20\ \text{cm} \cdot 2{,}3\text{m} = 0{,}20\ \text{m} \cdot 2{,}3\ \text{m} = 0{,}46\ \text{m}^2$

Αν ΑΒΓ είναι το ισοσκελές τρίγωνο και ΑΔ το ύψος του, το οποίο ως γνωστό είναι και διάμεσος, τότε από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε



$ΑΒ^2 = ΒΔ^2 + ΑΔ^2 \Leftrightarrow ΑΔ^2 = ΑΒ^2 - ΒΔ^2$

Άρα $ΑΔ^2 = 2{,}1^2 - 0{,}30^2 \Leftrightarrow ΑΔ^2 = 4{,}41 - 0{,}09$

$\Leftrightarrow ΑΔ^2 = 4{,}32$ άρα $ΑΔ = \sqrt{4{,}32} = 2{,}07\ \text{m}$

Επομένως το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι ίσο με

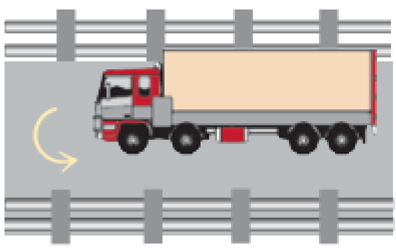
$$E_{τριγ} = \frac{ΒΓ \cdot ΑΔ}{2} = \frac{0{,}60 \cdot 2{,}07}{2} = 0{,}62\ \text{m}^2$$

Το εμβαδόν του βέλους είναι ίσο με

$E_β = 0{,}46 + 0{,}62 = 1{,}08\ \text{m}^2$ ή $108\ \text{dm}^2$

Με ένα κιλό χρώμα μπορούμε να βάψουμε 540 : 108 = 5 βέλη

Άσκηση 9

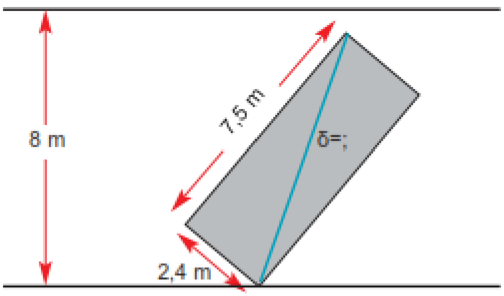


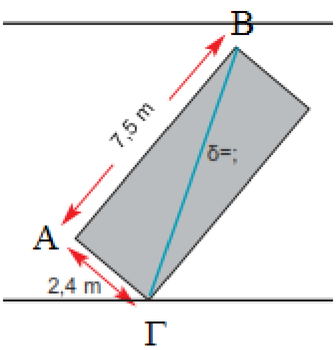
Οι μπάρες που είναι τοποθετημένες στις δύο άκρες ενός δρόμου απέχουν μεταξύ τους 8m. Ένα φορτηγό έχει περίγραμμα ορθογωνίου με μήκος 7,5 m και πλάτος 2,4 m .

Είναι δυνατόν ο οδηγός να κάνει ελιγμούς ώστε να κάνει αναστροφή ;

Απάντηση

Για να μπορεί ο οδηγός να κάνει αναστροφή (αν αυτό επιτρέπεται) θα πρέπει η διαγώνιος δ του περιγράμματος του φορτηγού, που είναι η μεγαλύτερη απόσταση δύο σημείων του φορτηγού στο επίπεδο που βρίσκονται οι μπάρες, να έχει μήκος μικρότερο από τα 8 m.





Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε

$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2$ Άρα

$ΒΓ^2 = 7{,}5^2 + 2{,}4^2 \Leftrightarrow ΒΓ^2 = 56{,}25 + 5{,}76 = 62{,}01$

οπότε $ΒΓ = \sqrt{62{,}01} = 7{,}87$ m

Άρα και $δ = \sqrt{62{,}01} = 7{,}87$ m

Θεωρητικά, είναι δυνατόν ο οδηγός να κάνει αναστροφή .

Επιμέλεια: Βασίλης Γκιμίσης MED - Μαθηματικός

…Πράξεις Παιδείας!