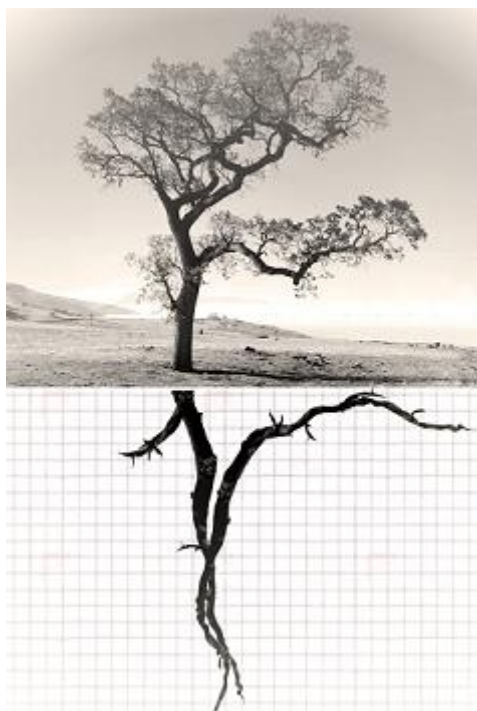


## 2. Πραγματικοί Αριθμοί



---

### *Λύσεις ασκήσεων Μαθηματικών Β' Γυμνασίου*

---

#### 2.1 Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού

σχ. βιβλίο (σσ. 43-44)

Λύσεις Ασκήσεων Μαθηματικών Β΄ Γυμνασίου σχ. βιβλίου (σσ. 43-44)

## 2.1 Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού

### Ερωτήσεις κατανόησης

#### Ερώτηση 1

Για τους  $x, y$  ισχύει:  $y = \sqrt{x}$ . Στις παρακάτω ερωτήσεις επιλέξτε την σωστή

		A	B	Γ
α)	Ο $x$ είναι:	θετικός ή μηδέν	αρνητικός ή μηδέν	οποιοσδήποτε αριθμός
β)	Ο $y$ είναι:	θετικός ή μηδέν	αρνητικός ή μηδέν	οποιοσδήποτε αριθμός
γ)	Ισχύει η σχέση:	$x^2 = y$	$y^2 = x$	$x^2 = y^2$

#### Απάντηση

Τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού  $a$ , λέγεται ο θετικός αριθμός, ο οποίος, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον αριθμό  $a$ . Η τετραγωνική ρίζα του  $a$  συμβολίζεται με  $\sqrt{a}$ .

Επειδή  $0^2 = 0$  ορίζουμε  $\sqrt{0} = 0$ .

		A	B	Γ
α)	Ο $x$ είναι:	θετικός ή μηδέν	αρνητικός ή μηδέν	οποιοσδήποτε αριθμός
β)	Ο $y$ είναι:	θετικός ή μηδέν	αρνητικός ή μηδέν	οποιοσδήποτε αριθμός
γ)	Ισχύει η σχέση:	$x^2 = y$	$y^2 = x$	$x^2 = y^2$

## Ερώτηση 2

Η εξίσωση  $x^2 = 16$  έχει λύσεις

Α . μόνο το 4

Β . μόνο το  $-4$

Γ . το 4 και το  $-4$

## Απάντηση

Γ . το 4 και το  $-4$ , γιατί  $4^2 = 16$  και  $(-4)^2 = 16$

## Ερώτηση 3

Στον διπλανό πίνακα να αντιστοιχίσετε σε κάθε αριθμό της στήλης Α την τετραγωνική του ρίζα που βρίσκεται στη στήλη Β.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
9	16
	3
16	2
	8
4	5
	18
25	6
	4
36	

## Απάντηση

$$\sqrt{9} = 3$$

$$\sqrt{16} = 4$$

$$\sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{25} = 5$$

$$\sqrt{36} = 6$$

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
9	16
	3
16	2
	8
4	5
	18
25	6
	4
36	

## Ερώτηση 4

Να εξετάσετε αν αληθεύουν οι παρακάτω προτάσεις

α)  $\sqrt{16} = 8$

β)  $\sqrt{4} = 16$

γ)  $\sqrt{9} = 3$

δ)  $\sqrt{0,4} = 0,2$

ε)  $\sqrt{-9} = -3$

στ) η  $\sqrt{0}$  δεν υπάρχει

ζ)  $\sqrt{4} = -2$

η)  $\sqrt{16+9} = 5$

θ)  $\sqrt{25-9} = 5-3 = 2$

ι)  $\sqrt{100} = 50$

### Απάντηση

- α) Είναι **λάθος** γιατί  $8^2 = 64$
- β) Είναι **λάθος** γιατί  $\sqrt{4} = 2$
- γ) Είναι **σωστό**
- δ) Είναι **λάθος** γιατί  $0,2^2 = 0,04$
- ε) Είναι **λάθος** γιατί η  $\sqrt{-9}$  δεν ορίζεται
- στ) Είναι **λάθος** γιατί έχει ορισθεί  $\sqrt{0} = 0$
- ζ) Είναι **λάθος** γιατί τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού  $\alpha$ , λέγεται ο θετικός αριθμός, ο οποίος, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον αριθμό  $\alpha$ .
- η) Είναι **σωστό**  $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$
- θ) Είναι **λάθος** γιατί  $\sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4$
- ι) Είναι **λάθος** γιατί  $\sqrt{100} = 10$

### Ερώτηση 5

Αν  $x$  είναι ένας θετικός αριθμός, στις παρακάτω ερωτήσεις να επιλέξετε τη σωστή

		A	B	Γ	Δ	Ε
1.	Αν $\sqrt{x} = 5$ , τότε	$x = 10$	$x = 25$	$x = -25$	$x = 2,5$	η σχέση αυτή είναι αδύνατη
2.	Αν $\sqrt{x} = 9$ , τότε	$x = 3$	$x = 81$	$x = 4,5$	$x = \pm 81$	η σχέση αυτή είναι αδύνατη
3.	Αν $\sqrt{x} = -16$ , τότε	$x = 4$	$x = -4$	$x = 256$	$x = -8$	η σχέση αυτή είναι αδύνατη
4.	Αν $\sqrt{100} = x$ , τότε	$x = 10$	$x = 50$	$x = 100$	$x = \pm 10$	η σχέση αυτή είναι αδύνατη

### Απάντηση

1. Αν  $\sqrt{x} = 5$  τότε  $x = 25$  γιατί  $5^2 = 25$
2. Αν  $\sqrt{x} = 9$  τότε  $x = 81$  γιατί  $9^2 = 81$
3. Αν  $\sqrt{x} = -16$  τότε η σχέση είναι αδύνατη γιατί τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού  $\alpha$ , είναι θετικός αριθμός.
4. Αν  $\sqrt{100} = x$  τότε  $x = 10$  γιατί  $10^2 = 100$

		A	B	Γ	Δ	Ε
1.	Αν $\sqrt{x} = 5$ , τότε	$x = 10$	$x = 25$	$x = -25$	$x = 2,5$	η σχέση αυτή είναι αδύνατη
2.	Αν $\sqrt{x} = 9$ , τότε	$x = 3$	$x = 81$	$x = 4,5$	$x = \pm 81$	η σχέση αυτή είναι αδύνατη
3.	Αν $\sqrt{x} = -16$ , τότε	$x = 4$	$x = -4$	$x = 256$	$x = -8$	η σχέση αυτή είναι αδύνατη
4.	Αν $\sqrt{100} = x$ , τότε	$x = 10$	$x = 50$	$x = 100$	$x = \pm 10$	η σχέση αυτή είναι αδύνατη

### Ασκήσεις

#### Άσκηση 1

Να υπολογίσετε τις παρακάτω τετραγωνικές ρίζες

- α)  $\sqrt{81}$  ,  $\sqrt{0,81}$  ,  $\sqrt{8100}$
- β)  $\sqrt{4}$  ,  $\sqrt{0,04}$  ,  $\sqrt{400}$  ,  $\sqrt{40000}$
- γ)  $\sqrt{121}$  ,  $\sqrt{1,21}$  ,  $\sqrt{12100}$  ,  $\sqrt{0,0121}$
- δ)  $\sqrt{\frac{9}{4}}$  ,  $\sqrt{\frac{144}{25}}$  ,  $\sqrt{\frac{400}{49}}$  ,  $\sqrt{\frac{36}{121}}$

### Απάντηση

Τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού  $\alpha$ , λέγεται ο θετικός αριθμός, ο οποίος, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον αριθμό  $\alpha$ . Έτσι έχουμε:

$$\alpha) \sqrt{81} = 9, \quad \sqrt{0,81} = 0,9, \quad \sqrt{8100} = 90$$

$$\beta) \sqrt{4} = 2, \quad \sqrt{0,04} = 0,2, \quad \sqrt{400} = 20, \quad \sqrt{40000} = 200$$

$$\gamma) \sqrt{121} = 11, \quad \sqrt{1,21} = 1,1, \quad \sqrt{12100} = 110, \quad \sqrt{0,0121} = 0,11$$

$$\delta) \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}, \quad \sqrt{\frac{144}{25}} = \frac{12}{5}, \quad \sqrt{\frac{400}{49}} = \frac{20}{7}, \quad \sqrt{\frac{36}{121}} = \frac{6}{11}$$

### Άσκηση 2

Να υπολογίσετε τους αριθμούς

$$\alpha) \sqrt{36} = \quad \beta) \sqrt{18 + 18} = \quad \gamma) \sqrt{18 \cdot 18} = \quad \delta) (\sqrt{18})^2 =$$

### Απάντηση

Για κάθε θετικό αριθμό  $\alpha$  ισχύουν επίσης  $(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$  και  $\sqrt{\alpha^2} = \alpha$

$$\alpha) \sqrt{36} = 6, \quad \beta) \sqrt{18 + 18} = \sqrt{36} = 6$$

$$\gamma) \sqrt{18 \cdot 18} = \sqrt{18^2} = 18 \quad \delta) (\sqrt{18})^2 = 18$$

### Άσκηση 3

Να τοποθετήσετε σε κάθε τετράγωνο έναν κατάλληλο αριθμό ώστε να ισχύει η αντίστοιχη ισότητα

$$\begin{array}{lll} \alpha) \sqrt{\frac{4}{\square}} = \frac{2}{3} & \beta) (\sqrt{\square})^2 = 5 & \gamma) \sqrt{\square+3} = 6 \\ \delta) \sqrt{\square} + 2 = 11 & \epsilon) 2 - \sqrt{\square} = 0 & \sigma) (\sqrt{\square})^2 + \sqrt{\square} = 6 \end{array}$$

### Απάντηση

$$\alpha) \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} \quad \text{Για θετικούς αριθμούς } \alpha \text{ και } \beta \text{ ισχύει } \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\beta) (\sqrt{5})^2 = 5 \quad \text{Για κάθε θετικό αριθμό } \alpha \text{ ισχύει } (\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$$

$$\gamma) \sqrt{33+3} = 6$$

$$\delta) \sqrt{81} + 2 = 11 \quad \epsilon) 2 - \sqrt{4} = 0$$

**στ)** Εδώ η απάντηση μπορεί να δοθεί με πολλούς τρόπους

$$\text{π.χ. } (\sqrt{0})^2 + \sqrt{36} = 6 \quad \text{ή } (\sqrt{6})^2 + \sqrt{0} = 6 \quad \text{ή } (\sqrt{3})^2 + \sqrt{9} = 3+3=6$$

$$\text{ή } (\sqrt{2,5})^2 + \sqrt{12,25} = 2,5+3,5=6 \dots\dots$$

### Άσκηση 4

Να αποδείξετε ότι

$$\alpha) \sqrt{\frac{\sqrt{4}}{2} + \sqrt{9}} = 2 \quad \beta) \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{4}}} = 2 \quad \gamma) \sqrt{7 + \sqrt{2 + \sqrt{1 + \sqrt{9}}}} = 3$$

### Απάντηση

Αρχίζουμε από ριζές που υπολογίζονται αμέσως χωρίς να επηρεάζεται η υπόλοιπη ποσότητα

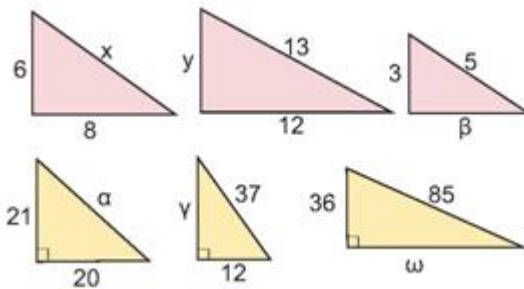
$$\alpha) \sqrt{\frac{\sqrt{4}}{2} + \sqrt{9}} = \sqrt{\frac{2}{2} + 3} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\beta) \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{4}}} = \sqrt{2 + \sqrt{2+2}} = \sqrt{2 + \sqrt{4}} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\gamma) \sqrt{7 + \sqrt{2 + \sqrt{1 + \sqrt{9}}}} = \sqrt{7 + \sqrt{2 + \sqrt{1+3}}} = \sqrt{7 + \sqrt{2 + \sqrt{4}}} = \sqrt{7 + \sqrt{2+2}} = \sqrt{7 + \sqrt{4}} = \sqrt{7+2} = \sqrt{9} = 3$$

### Άσκηση 5

Να υπολογίσετε την άγνωστη πλευρά των παρακάτω ορθογωνίων τριγώνων





### Απάντηση

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτεινουσας (Πυθαγόρειο θεώρημα, παραγρ. Β1.4)

Υπολογισμός του  $x$  :

$$x^2 = 6^2 + 8^2 \Leftrightarrow x^2 = 36 + 64 \Leftrightarrow x^2 = 100 \quad \text{άρα} \quad x = \sqrt{100} = 10$$

Υπολογισμός του  $\gamma$  :

$$13^2 = \gamma^2 + 12^2 \Leftrightarrow 169 = \gamma^2 + 144 \Leftrightarrow 169 - 144 = \gamma^2 \Leftrightarrow 25 = \gamma^2 \quad \text{άρα} \quad \gamma = \sqrt{25} = 5$$
$$\Gamma: 5^2 = 3^2 + \beta^2$$

Υπολογισμός του  $\beta$  :

$$25 = 9 + \beta^2 \Leftrightarrow 25 - 9 = \beta^2 \Leftrightarrow 16 = \beta^2 \quad \text{άρα} \quad \beta = \sqrt{16} = 4$$

Υπολογισμός του  $\alpha$  :

$$\alpha^2 = 21^2 + 20^2 \Leftrightarrow \alpha^2 = 441 + 400 \Leftrightarrow \alpha^2 = 841 \quad \text{άρα} \quad \alpha = \sqrt{841} = 29$$

Υπολογισμός του  $\gamma$  :

$$37^2 = \gamma^2 + 12^2 \Leftrightarrow 1369 = \gamma^2 + 144 \Leftrightarrow 1369 - 144 = \gamma^2$$
$$\Leftrightarrow 1225 = \gamma^2 \quad \text{άρα} \quad \gamma = \sqrt{1225} = 35$$

Υπολογισμός του  $\omega$  :

$$85^2 = 36^2 + \omega^2 \Leftrightarrow 7225 = 1296 + \omega^2 \Leftrightarrow 7225 - 1296 = \omega^2$$
$$\Leftrightarrow 5929 = \omega^2 \quad \text{άρα} \quad \omega = \sqrt{5929} = 77$$

### Άσκηση 6

Να βρείτε τους θετικούς αριθμούς  $x$  που ικανοποιούν τις εξισώσεις

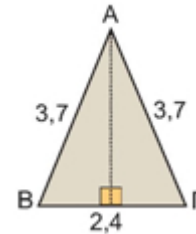
$$\alpha) x^2 = 9 \quad \beta) x^2 = 25 \quad \gamma) x^2 = 64 \quad \delta) x^2 = \frac{100}{81}$$

### Απάντηση

$$\alpha) x = \sqrt{9} = 3 \quad \beta) x = \sqrt{25} = 5 \quad \gamma) x = \sqrt{64} = 8 \quad \delta) x = \sqrt{\frac{100}{81}} = \frac{10}{9}$$

### Άσκηση 7

Να υπολογίσετε το ύψος του ισοσκελούς τριγώνου  $AB\Gamma$  του διπλανού σχήματος.



### Απάντηση

Στο ισοσκελές τρίγωνο το ύψος που αντιστοιχεί στη βάση

διέρχεται από το μέσο της. Άρα  $B\Delta = \frac{2,4}{2} = 1,2$

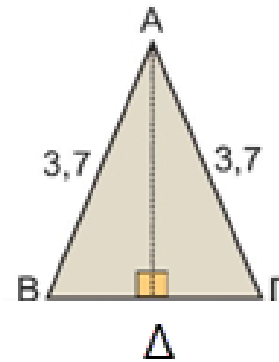
Το τρίγωνο  $AB\Delta$  είναι ορθογώνιο με υποτεινούσα την  $AB$ .

Άρα  $AB^2 = A\Delta^2 + B\Delta^2$  οπότε

$$3,7^2 = A\Delta^2 + 1,2^2 \Leftrightarrow 13,69 = A\Delta^2 + 1,44$$

$$\Leftrightarrow 13,69 - 1,44 = A\Delta^2 \Leftrightarrow 12,25 = A\Delta^2$$

$$\text{άρα } A\Delta = \sqrt{12,25} = 3,5$$



### Άσκηση 8

Να υπολογίσετε την διαγώνιο ενός ορθογωνίου γηπέδου που έχει διαστάσεις 65 m και 72 m.

### Απάντηση

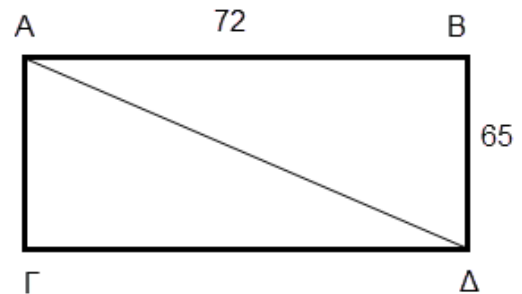
Έστω  $ΑΒΓΔ$  το ορθογώνιο γήπεδο με  $ΑΒ = 72\text{m}$   
και  $ΑΔ = 65\text{m}$ .

Το τρίγωνο  $ΑΒΔ$  είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα  
την  $ΑΔ$ .

$$\text{Άρα } ΒΔ^2 = ΑΔ^2 + ΑΒ^2$$

$$\text{οπότε } ΒΔ^2 = 65^2 + 72^2 \Leftrightarrow ΒΔ^2 = 4225 + 5184$$

$$\Leftrightarrow ΒΔ^2 = 9409 \quad \text{άρα } ΒΔ = \sqrt{9409} = 97 \text{ m.}$$



### Άσκηση 9

Το τετράγωνο ενός θετικού αριθμού, αν αυξηθεί κατά 8, γίνεται ίσο με το τριπλάσιο του τετραγώνου του αριθμού αυτού. Ποιός είναι ο αριθμός αυτός ;

### Απάντηση

Θα κατασκευάσουμε εξίσωση με άγνωστο το ζητούμενο αριθμό που εδώ θα τον συμβολίσουμε με  $x$ .

Το τετράγωνο του  $x$  είναι  $x^2$  και αν αυξηθεί κατά 8 θα γίνει:  $x^2 + 8$

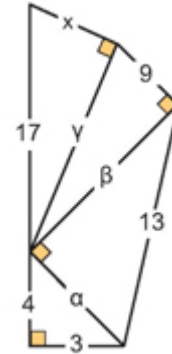
Το τριπλάσιο του τετραγώνου του αριθμού αυτού είναι:  $3x^2$

$$\text{Άρα } x^2 + 8 = 3x^2$$

$$x^2 + 8 = 3x^2 \Leftrightarrow 2x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 4 \quad \text{άρα } x = \sqrt{4} = 2$$

### Άσκηση 10

Στο διπλανό σχήμα να βρείτε το μήκος  $x$



### Απάντηση

Τα τρίγωνα είναι ορθογώνια και για τον υπολογισμό των άγνωστων πλευρών θα χρησιμοποιήσουμε σε καθένα από αυτά το Πυθαγόρειο θεώρημα,

Υπολογισμός του  $\alpha$  :

$$\alpha^2 = 4^2 + 3^2 \Leftrightarrow \alpha^2 = 25 \quad \text{άρα } \alpha = \sqrt{25} = 5$$

Υπολογισμός του  $\beta$  :

$$13^2 = 5^2 + \beta^2 \Leftrightarrow 169 = 25 + \beta^2 \Leftrightarrow 144 = \beta^2 \quad \text{άρα } \beta = \sqrt{144} = 12$$

Υπολογισμός του  $\gamma$  :

$$\gamma^2 = 9^2 + 12^2 \Leftrightarrow \gamma^2 = 81 + 144 \Leftrightarrow \gamma^2 = 225 \quad \text{άρα } \gamma = \sqrt{225} = 15$$

Υπολογισμός του  $x$  :

$$289 = x^2 + 15^2 \Leftrightarrow 289 = x^2 + 225 \Leftrightarrow 64 = x^2 \quad \text{άρα } x = \sqrt{64} = 8$$

### Άσκηση 11

Να συγκρίνετε τους αριθμούς  $\sqrt{\alpha}$ ,  $\alpha$ ,  $\alpha^2$  στις παρακάτω δύο περιπτώσεις

α) Αν  $\alpha > 1$  π.χ  $\alpha = 4$ ,  $\alpha = 9$ ,  $\alpha = 16$

β) Αν  $0 < \alpha < 1$  π.χ  $\alpha = \frac{1}{4}$ ,  $\alpha = \frac{1}{9}$ ,  $\alpha = \frac{1}{16}$

Τι παρατηρείτε ;

### Απάντηση

α) Αν  $\alpha = 4$  τότε  $\sqrt{\alpha} = \sqrt{4} = 2$  και  $\alpha^2 = 4^2 = 16$

Και αφού  $2 < 4 < 16$  θα είναι  $\sqrt{\alpha} < \alpha < \alpha^2$

Ομοίως, αν  $\alpha = 9$  ή  $\alpha = 16$  θα είναι  $\sqrt{\alpha} < \alpha < \alpha^2$

β) Αν  $\alpha = \frac{1}{4}$  τότε  $\sqrt{\alpha} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$  και  $\alpha^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$

Και αφού  $\frac{1}{16} < \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$  θα είναι  $\alpha^2 < \alpha < \sqrt{\alpha}$

Ομοίως αν  $\alpha = \frac{1}{9}$  ή  $\alpha = \frac{1}{16}$  θα είναι  $\alpha^2 < \alpha < \sqrt{\alpha}$

Παρατηρούμε ότι: αν  $\alpha > 1$  τότε  $\sqrt{\alpha} < \alpha < \alpha^2$

αν  $0 < \alpha < 1$  τότε  $\alpha^2 < \alpha < \sqrt{\alpha}$

### Άσκηση 12

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα

$\alpha$	$\beta$	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha\beta}$	$\sqrt{\alpha\beta}$
9	4				
36	49				

Τι συμπεραίνετε ;

### Απάντηση

$\alpha$	$\beta$	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha\beta}$	$\sqrt{\alpha\beta}$
9	4	3	2	6	6
36	49	6	7	42	42

Φαίνεται να ισχύει ότι  $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\beta}$

### Άσκηση 13

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα  
Τι συμπεραίνετε ;

$\alpha$	$\beta$	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$	$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$
4	16				
25	36				

### Απάντηση

$\alpha$	$\beta$	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$	$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$
4	16	2	4	$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
25	36	5	6	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$

Φαίνεται να ισχύει ότι  $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\beta}$

### Άσκηση 14

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα  
Τι συμπεραίνετε ;

$\alpha$	$\beta$	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha+\beta}$
9	16				
64	36				

### Απάντηση

$\alpha$	$\beta$	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha + \beta}$
9	16	3	4	$3 + 4 = 7$	5
64	36	8	6	$8 + 6 = 14$	10

Συμπεραίνουμε ότι το  $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$  γενικά δεν είναι ίσο με το  $\sqrt{\alpha + \beta}$

Επιμέλεια: Βασίλης Γκμίσης MED - Μαθηματικός



**...Πράξεις Παιδείας!**