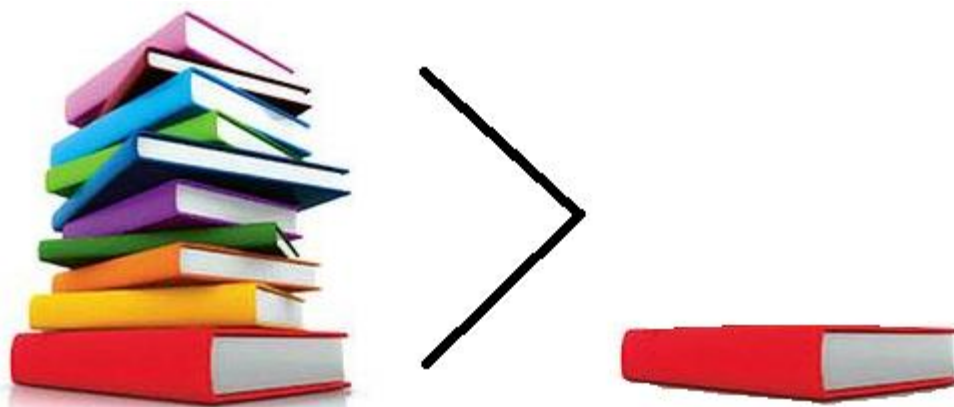


1. Εξισώσεις – Ανισώσεις



Λύσεις ασκήσεων Μαθηματικών Β' Γυμνασίου

1.5 Ανισώσεις Α' βαθμού

σχ. βιβλίο (σ. 37)

Λύσεις Ασκήσεων Μαθηματικών Β' Γυμνασίου σχ. βιβλίου (σσ. 36-37)

1.5 Ανισώσεις α' βαθμού

Ερωτήσεις κατανόησης

Ερώτηση 1

Να συμπληρώσετε τα κενά:

- α) Αν $x < 3$, τότε $x + 3$
- β) Αν $x < -3$, τότε $\frac{x}{2}$
- γ) Αν $x > 5$, τότε $x - 3$
- δ) Αν $x \leq 6$, τότε $\frac{x}{-3}$
- ε) Αν $x \geq -2$, τότε $2x$
- στ) Αν $x < 4$, τότε $\frac{3x}{2}$
- ζ) Αν $x < 7$, τότε $-3x$
- η) Αν $x \leq -\frac{1}{2}$, τότε $-4x$

Απάντηση

α) Αν και στα δύο μέλη μιας ανίσωσης **προσθέσουμε** τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ανίσωση με την ίδια φορά.

Και στα δύο μέλη της ανίσωσης θα προσθέσουμε το 3.

Η ανισότητα συμπληρωμένη είναι: Αν $x < 3$, τότε $x + 3 < 6$.

β) Αν και τα δύο μέλη μιας ανίσωσης **διαιρεθούν** με τον ίδιο **θετικό** αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ανίσωση με την **ίδια φορά**.

Και τα δύο μέλη της ανίσωσης θα διαιρεθούν με το 2.

Η ανισότητα συμπληρωμένη είναι: Αν $x < -3$, τότε $\frac{x}{2} < -\frac{3}{2}$.

γ) Αν και από δύο μέλη μιας ανίσωσης **αφαιρέσουμε** τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ανίσωση με την ίδια φορά.

Και από δύο μέλη της ανίσωσης θα αφαιρέσουμε το 3

Η ανισότητα συμπληρωμένη είναι: Αν $x > 5$, τότε $x - 3 > 2$.

δ) Αν και τα δύο μέλη μιας ανίσωσης διαιρεθούν με τον ίδιο **αρνητικό** αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ανίσωση με την **αντίστροφη φορά**.

Και τα δύο μέλη μιας ανίσωσης θα διαιρεθούν με το -2 και η φορά θα αλλάξει.

Η ανισότητα συμπληρωμένη είναι: Αν $x \leq 6$, τότε $\frac{x}{-3} \geq -2$.

ε) Αν και τα δύο μέλη μιας ανίσωσης πολλαπλασιαστούν με τον ίδιο **θετικό** αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ανίσωση με την **ίδια φορά**. Και τα δύο μέλη της ανίσωσης θα πολλαπλασιαστούν με το 2.

Η ανισότητα συμπληρωμένη είναι: Αν $x \geq -2$, τότε $2x \geq -4$.

στ) Και τα δύο μέλη της ανίσωσης θα πολλαπλασιαστούν με το $\frac{3}{2}$.

Αν $x < 4$ τότε $\frac{3x}{2} < \frac{3}{2} \cdot 4 \Leftrightarrow \frac{3x}{2} < 6$

Η ανισότητα συμπληρωμένη είναι: Αν $x < 4$, τότε $\frac{3x}{2} < 6$.

ζ) Αν και τα δύο μέλη μιας ανίσωσης πολλαπλασιαστούν με τον ίδιο **αρνητικό** αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ανίσωση με την **αντίστροφη φορά**.

Και τα δύο μέλη μιας ανίσωσης πολλαπλασιαστούν με το -3 .

Αν $x < 7$ τότε $-3x > -3 \cdot 7 \Leftrightarrow -3x > -21$.

Η ανισότητα συμπληρωμένη είναι: Αν $x < 7$, τότε $-3x > -21$.

η) Και τα δύο μέλη μιας ανίσωσης πολλαπλασιάζονται με το -4 .

$$\text{Αν } x \leq -\frac{1}{2} \quad \text{τότε} \quad -4x \geq -4\left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow -4x \geq 2$$

Η ανισότητα συμπληρωμένη είναι: Αν $x \leq -\frac{1}{2}$, τότε $-4x \geq 2$.

Ερώτηση 2

Να εξετάσετε αν οι παρακάτω ισότητες είναι σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ)

α) Αν $\alpha < \beta$ τότε $\alpha - 16 < \beta - 16$

β) Αν $\alpha < \beta$ τότε $-\alpha < -\beta$

γ) Αν $\alpha < 0$ τότε $2\alpha < \alpha$

δ) Αν $\alpha > 1$ τότε $\frac{1}{\alpha} > 1$

ε) Αν $\alpha < 5$ τότε $\alpha < 8$

στ) Η ανίσωση $3x - 5 > 7$ έχει λύση τον αριθμό $x = 4$

ζ) Η ανίσωση $x + 500 > x + 499$ αληθεύει για κάθε αριθμό x

η) Η ανίσωση $x + 500 > x + 501$ αληθεύει για κάθε αριθμό x

θ) Η ανίσωση $2x - 3 < 3x - 2$ έχει λύσεις τους αριθμούς $x < 1$

Απάντηση

α) Είναι **σωστό**. Και από δύο μέλη της ανίσωσης **αφαιρούμε** το 16.

β) Είναι **λάθος**, γιατί πολλαπλασιάζουμε με -1 και αλλάζει η φορά της.

$$\text{Αν } \alpha < \beta \quad \text{τότε} \quad -\alpha > -\beta.$$

γ) Είναι **σωστό**. Και στα δύο μέλη μιας ανίσωσης προσθέτουμε τον ίδιο αριθμό α .

δ) Είναι **λάθος**, γιατί αν $\alpha > 1$ τότε $\frac{1}{\alpha} < 1$.

ε) Είναι **σωστό**. Και από δύο μέλη της ανίσωσης προσθέτουμε τον αριθμό 3.

στ) Είναι **λάθος**, γιατί για $x = 4$, $3 \cdot 4 - 5 = 7$ δηλαδή $7 > 7$ που δεν ισχύει.

- ζ) Είναι **σωστό**. $x + 500 > x + 499 \Leftrightarrow x - x > 499 - 500 \Leftrightarrow 0 \cdot x > -1$
 $\Leftrightarrow 0 > -1$ αληθεύει για κάθε αριθμό x .
- η) Είναι **λάθος**, $x + 500 > x + 501 \Leftrightarrow x - x > 501 - 500 \Leftrightarrow 0 \cdot x > 1$
 $\Leftrightarrow 0 > 1$ που είναι αδύνατο.
- θ) Είναι **λάθος**, $2x - 3 < 3x - 2 \Leftrightarrow 2x - 3x < 3 - 2 \Leftrightarrow -x < 1 \Leftrightarrow x > -1$

Ασκήσεις

Άσκηση 1

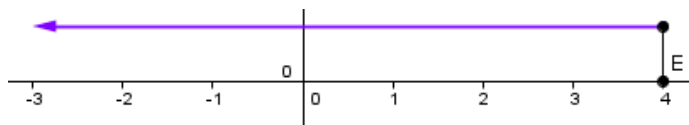
Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε στην ευθεία των αριθμών τις λύσεις τους

- α) $8x + 4 \leq 16 + 5x$
β) $x + 3 > -2$
γ) $-(1-x) > 2x - 1$
δ) $-7x + 3 \leq 4 - x$

Λύση

Σε κάθε ισότητα αντικαθιστούμε τον x με τον προτεινόμενο αριθμό και μετά από κατάλληλες πράξεις, ελέγχουμε αν η ισότητα είναι αληθής.

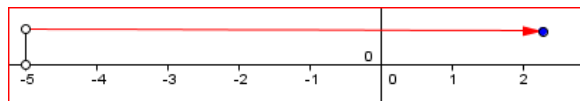
- α) $8x + 4 \leq 16 + 5x \Leftrightarrow$ (χωρίζουμε γνωστούς από άγνωστους)
 $8x - 5x \leq 16 - 4 \Leftrightarrow$ (κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων και πράξεις)
 $3x \leq 12 \Leftrightarrow$ (διαιρούμε με τον συντελεστή του άγνωστου και αν αυτός είναι θετικός αριθμός η φορά δεν αλλάζει)
 $x \leq 4$



Παριστάνουμε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών: Η μαύρη τελεία ακριβώς πάνω στο 4 σημαίνει ότι και ο αριθμός αυτός είναι λύση της ανίσωσης.

$$\beta) x + 3 > -2 \Leftrightarrow x > -3 - 2 \Leftrightarrow x > -5$$

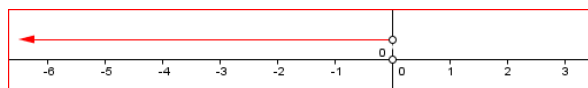
Παριστάνουμε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών: Η λευκή τελεία



ακριβώς πάνω στο -5 σημαίνει ότι ο αριθμός αυτός δεν είναι λύση της ανίσωσης.

$$\gamma) -(1-x) > 2x-1 \Leftrightarrow -1+x > 2x-1 \Leftrightarrow x-2x > 0 \Leftrightarrow -x > 0 \Leftrightarrow x < 0$$

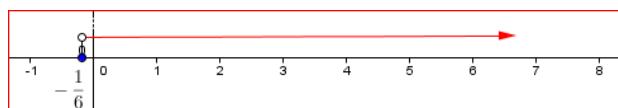
Παριστάνουμε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών: Η λευκή τελεία



ακριβώς πάνω στο 0 σημαίνει ότι ο αριθμός αυτός δεν είναι λύση της ανίσωσης.

$$\delta) -7x + 3 \leq 4-x \Leftrightarrow -7x + x \leq 4-3 \Leftrightarrow -6x \leq 1 \Leftrightarrow 6x \geq -1 \Leftrightarrow$$

$$x \geq -\frac{1}{6}$$



Παριστάνουμε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών: Η μπλε τελεία

ακριβώς πάνω στο $-\frac{1}{6}$ σημαίνει ότι και ο αριθμός αυτός είναι λύση της ανίσωσης.

Άσκηση 2

Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε στην ευθεία των αριθμών τις λύσεις τους.

α) $3(\omega - 1) > \omega - 2$

β) $2x + 2 - (x - 2) \geq 4 - x$

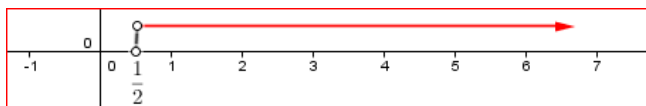
γ) $3y - 1 - (y + 2) < 2(y + 2) + 1$

δ) $4(t + 5) < t - 4$

Λύση

α) $3(\omega - 1) > \omega - 2 \Leftrightarrow 3\omega - 3 > \omega - 2 \Leftrightarrow 3\omega - \omega > -2 + 3 \Leftrightarrow$

$2\omega > 1 \Leftrightarrow \omega > \frac{1}{2}$



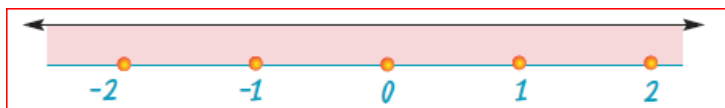
β) $2x + 2 - (x - 2) \geq 4 - x \Leftrightarrow 2x + 2 - x + 2 \geq 4 - x$

$\Leftrightarrow 2x - x + x \geq 4 - 2 - 2 \Leftrightarrow 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$

γ) $3y - 1 - (y + 2) < 2(y + 2) + 1 \Leftrightarrow 3y - 1 - y - 2 < 2y + 4 + 1$

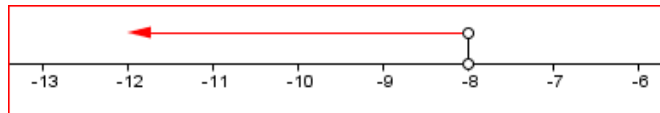
$\Leftrightarrow 3y - y - 2y < 4 + 1 + 1 + 2 \Leftrightarrow 0y < 8$

Η ανίσωση αληθεύει για κάθε αριθμό y . Η παράσταση των λύσεων αυτών στην ευθεία των αριθμών θα είναι όλη η ευθεία.



$$\delta) \quad 4(t+5) < t-4 \Leftrightarrow 4t+20 < t-4 \Leftrightarrow 4t-t < -4-20$$

$$\Leftrightarrow 3t < -24 \Leftrightarrow t < -8$$



Άσκηση 3

Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε στην ευθεία των αριθμών τις λύσεις τους.

α) $\frac{3x-4}{4} - \frac{2-x}{3} > 1$

β) $2(x+1) - \frac{3}{2}(x+1) > \frac{x}{2}$

γ) $x+3 + \frac{x+2}{2} - \frac{x+1}{3} > 0$

δ) $\frac{1}{2} \left(\frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{3} \right) - \frac{x+7}{6} > 2$

ε) $\omega - \frac{\omega-2}{2} < \frac{\omega-1}{2} - \frac{\omega-3}{4}$

στ) $t + \frac{t+1}{4} > \frac{2t-1}{7} + \frac{27t}{28}$

Λύση

α) $\frac{3x-4}{4} - \frac{2-x}{3} > 1$ (βρίσκουμε το ΕΚΠ και κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών

πολλαπλασιάζοντας κάθε όρο με το ΕΚΠ) $\Leftrightarrow 12 \cdot \frac{3x-4}{4} - 12 \cdot \frac{2-x}{3} > 12 \cdot 1$

$$\Leftrightarrow (\text{κάνουμε απλοποιήσεις}) \quad 3(3x - 4) - 4(2 - x) > 12$$

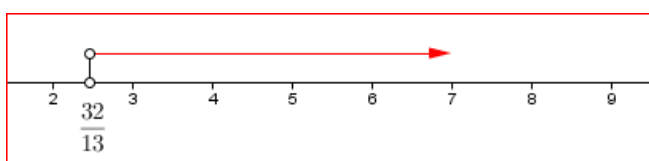
$$\Leftrightarrow (\text{κάνουμε επιμεριστικές}) \quad 9x - 12 - 8 + 4x > 12$$

$$\Leftrightarrow (\text{χωρίζουμε γνωστούς από άγνωστους}) \quad 9x + 4x > 12 + 12 + 8$$

$$\Leftrightarrow (\text{κάνουμε απλοποιήσεις}) \quad 13x > 32$$

$$\Leftrightarrow (\text{διαιρούμε με τον συντελεστή του άγνωστου και αν αυτός είναι θετικός$$

$$\text{αριθμός η φορά δεν αλλάζει}) \quad x > \frac{32}{13}$$

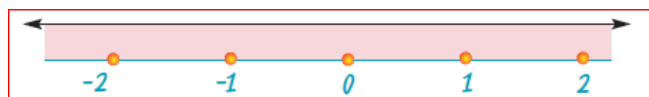


$$\beta) \quad 2(x + 1) - \frac{3}{2}(x + 1) > \frac{x}{2} \Leftrightarrow 2 \cdot 2(x + 1) - 2 \cdot \frac{3}{2}(x + 1) > 2 \cdot \frac{x}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4(x + 1) - 3(x + 1) > x \Leftrightarrow 4x + 4 - 3x - 3 > x$$

$$\Leftrightarrow 4x - 3x - x > -4 + 3 \Leftrightarrow 0x > -1$$

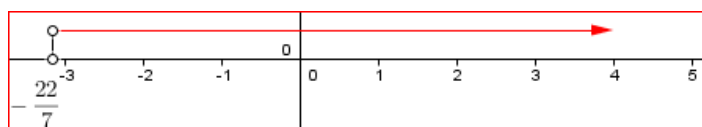
Η ανίσωση αληθεύει για κάθε αριθμό x.



$$\gamma) \quad x + 3 + \frac{x + 2}{2} - \frac{x + 1}{3} > 0 \Leftrightarrow 6 \cdot x + 6 \cdot 3 + 6 \cdot \frac{x + 2}{2} - 6 \cdot \frac{x + 1}{3} > 0$$

$$\Leftrightarrow 6x + 18 + 3(x + 2) - 2(x + 1) > 0 \Leftrightarrow 6x + 18 + 3x + 6 - 2x - 2 > 0$$

$$\Leftrightarrow 6x + 3x - 2x > -18 - 6 + 2 \Leftrightarrow 7x > -22 \Leftrightarrow x > -\frac{22}{7}$$

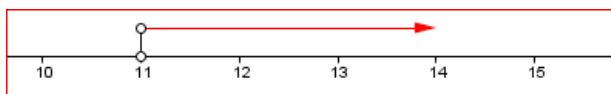


$$\delta) \frac{1}{2} \left(\frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{3} \right) - \frac{x+7}{6} > 2 \Leftrightarrow \frac{x+1}{4} + \frac{x+1}{6} - \frac{x+7}{6} > 2$$

$$\Leftrightarrow 12 \cdot \frac{x+1}{4} + 12 \cdot \frac{x+1}{6} - 12 \cdot \frac{x+7}{6} > 12 \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow 3(x+1) + 2(x+1) - 2(x+7) > 24 \Leftrightarrow 3x+3+2x+2-2x-14 > 24$$

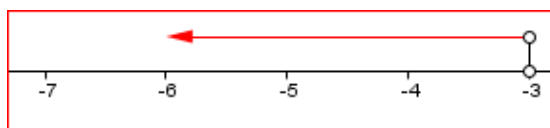
$$\Leftrightarrow 3x > 24 - 3 - 2 + 14 \Leftrightarrow 3x > 33 \Leftrightarrow x > 11$$



$$\epsilon) \omega - \frac{\omega-2}{2} < \frac{\omega-1}{2} - \frac{\omega-3}{4} \Leftrightarrow 4 \cdot \omega - 4 \cdot \frac{\omega-2}{2} < 4 \cdot \frac{\omega-1}{2} - 4 \cdot \frac{\omega-3}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4\omega - 2(\omega-2) < 2(\omega-1) - 1(\omega-3) \Leftrightarrow 4\omega - 2\omega + 4 < 2\omega - 2 - \omega + 3$$

$$\Leftrightarrow 4\omega - 2\omega - 2\omega + \omega < -2 + 3 - 4 \Leftrightarrow \omega < -3$$

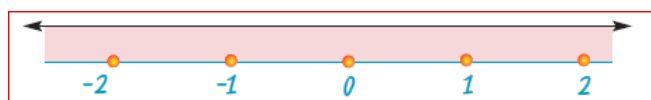


$$\sigma\tau) t + \frac{t+1}{4} > \frac{2t-1}{7} + \frac{27t}{28} \Leftrightarrow 28 \cdot t + 28 \cdot \frac{t+1}{4} > 28 \cdot \frac{2t-1}{7} + 28 \cdot \frac{27t}{28}$$

$$\Leftrightarrow 28t + 7(t+1) > 4(2t-1) + 27t \Leftrightarrow 28t + 7t + 7 > 8t - 4 + 27t$$

$$\Leftrightarrow 28t + 7t - 8t - 27t > -4 - 7 \Leftrightarrow 0 \cdot t > -11$$

Η ανίσωση αληθεύει για κάθε αριθμό t



Άσκηση 4

Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων

α) $x - 4 < 1$ και $2 - x < 3$

β) $2(x + 1) + x > 6 - 2x$ και $7x - 8 > 3(x + 3) + 7$

γ) $3x - 1 > 2(1 - x) + 7$ και $3(1 - x) \geq 6$

δ) $3y - 15 > \frac{2}{5}(y + 2)$ και $\frac{2}{3}y - \frac{5}{21} < y - 5$

ε) $2x - 1 < 7$ και $3(x - 1) > -6$ και $x \geq 3(x - 2)$

στ) $\frac{3x - 1}{2} > \frac{2x + 1}{3}$ και $2(3x - 1) + x > -2(x + 5) - 1$ και $3 + x < 2(x - 3)$

Λύση

Λύνουμε κάθε ανίσωση ξεχωριστά. Παραστήνουμε στην ίδια ευθεία των αριθμών τις λύσεις τους και βρίσκουμε το διάστημα που αληθεύουν όλες. Αν δεν υπάρχει τέτοιο διάστημα τότε δεν υπάρχουν κοινές λύσεις.

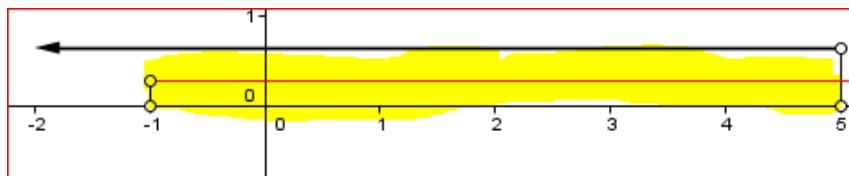
α) $x - 4 < 1$ και $2 - x < 3$

$$x - 4 < 1 \Leftrightarrow x < 5 \quad \text{και} \quad 2 - x < 3 \Leftrightarrow -x < 3 - 2 \Leftrightarrow -x < 1.$$

Αν και τα δύο μέλη μιας ανίσωσης διαιρεθούν ή πολλαπλασιαστούν με τον ίδιο **αρνητικό** αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ανίσωση με την **αντίστροφη φορά**.

Εδώ διαιρούμε ή πολλαπλασιάζουμε με το -1 .

Άρα $-x < 1 \Leftrightarrow x > -1$



Η λευκή τελεία ακριβώς πάνω στα -1 και 3 σημαίνει ότι οι αριθμοί αυτοί δεν είναι λύση της ανίσωσης.

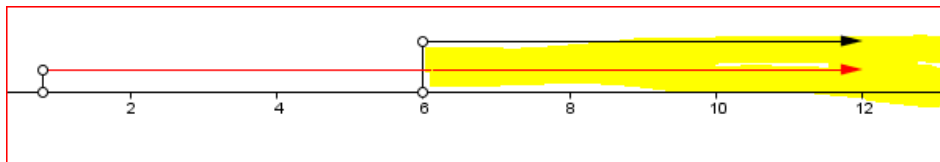
Κοινές λύσεις: $-1 < x < 5$

β) $2(x + 1) + x > 6 - 2x$ και $7x - 8 > 3(x + 3) + 7$

$$2(x + 1) + x > 6 - 2x \Leftrightarrow 2x + 2 + x > 6 - 2x \Leftrightarrow 2x + 2 + x > 6 - 2x \Leftrightarrow 2x + x + 2x > 6 - 2$$

$$\Leftrightarrow 5x > 4 \Leftrightarrow x > \frac{4}{5} \text{ και}$$

$$7x - 8 > 3(x + 3) + 7 \Leftrightarrow 7x - 8 > 3x + 9 + 7 \Leftrightarrow 7x - 3x > 9 + 7 + 8 \Leftrightarrow 4x > 24 \Leftrightarrow x > 6$$

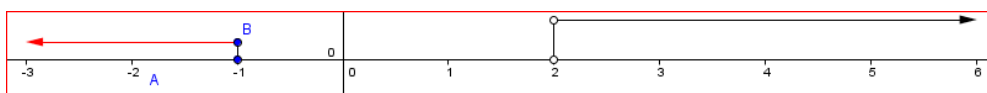


Κοινές λύσεις: $x > 6$

γ) $3x - 1 > 2(1 - x) + 7$ και $3(1 - x) \geq 6$

$$3x - 1 > 2(1 - x) + 7 \Leftrightarrow 3x - 1 > 2 - 2x + 7 \Leftrightarrow 3x + 2x > 2 + 7 + 1 \Leftrightarrow 5x > 10 \Leftrightarrow x > 2$$

και $3(1 - x) \geq 6 \Leftrightarrow 3 - 3x \geq 6 \Leftrightarrow -3x \geq 6 - 3 \Leftrightarrow -3x \geq 3 \Leftrightarrow x \leq -1$



Δεν έχουν κοινές λύσεις.

δ) $3y - 15 > \frac{2}{5}(y + 2)$ και $\frac{2}{3}y - \frac{5}{21} < y - 5$

$$3y - 15 > \frac{2}{5}(y + 2) \Leftrightarrow 5 \cdot 3y - 5 \cdot 15 > 5 \cdot \frac{2}{5}(y + 2)$$

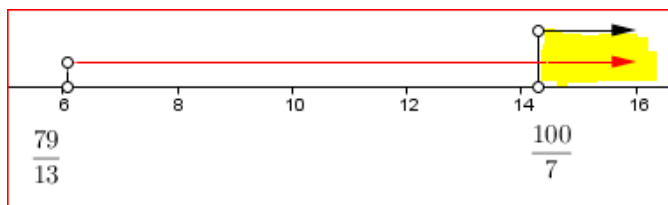
$$\Leftrightarrow 5 \cdot 3y - 5 \cdot 15 > 5 \cdot \frac{2}{5} (y + 2) \Leftrightarrow 15y - 75 > 2(y + 2)$$

$$\Leftrightarrow 15y - 2y > 4 + 75 \Leftrightarrow 13y > 79 \Leftrightarrow y > \frac{79}{13}$$

και $\frac{2}{3}y - \frac{5}{21} < y - 5 \Leftrightarrow 21 \cdot \frac{2}{3}y - 21 \cdot \frac{5}{21} < 21 \cdot y - 21 \cdot 5$

$$\Leftrightarrow 7 \cdot 2y - 5 < 21y - 105 \Leftrightarrow 14y - 5 < 21y - 105$$

$$\Leftrightarrow 14y - 21y < -105 + 5 \Leftrightarrow -7y < -100 \Leftrightarrow y > \frac{100}{7}$$



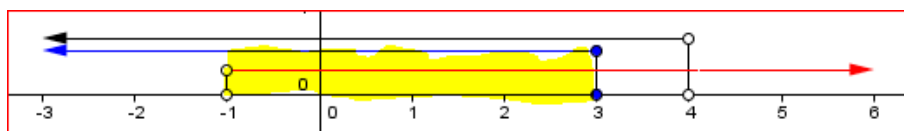
Κοινές λύσεις: $y > \frac{100}{7}$

ε) $2x - 1 < 7$ και $3(x - 1) > -6$ και $x \geq 3(x - 2)$

$$2x - 1 < 7 \Leftrightarrow 2x < 7 + 1 \Leftrightarrow 2x < 8 \Leftrightarrow x < 4$$

και $3(x - 1) > -6 \Leftrightarrow 3x - 3 > -6 \Leftrightarrow 3x > -6 + 3 \Leftrightarrow 3x > -3 \Leftrightarrow x > -1$

και $x \geq 3(x - 2) \Leftrightarrow x \geq 3x - 6 \Leftrightarrow x - 3x \geq -6 \Leftrightarrow -2x \geq -6 \Leftrightarrow x \leq 3$



Κοινές λύσεις: $-1 < x \leq 3$

στ) $\frac{3x-1}{2} > \frac{2x+1}{3}$ και $2(3x-1) + x > -2(x+5) - 1$ και $3+x < 2(x-3)$

$$\frac{3x-1}{2} > \frac{2x+1}{3} \Leftrightarrow 6 \cdot \frac{3x-1}{2} > 6 \cdot \frac{2x+1}{3} \Leftrightarrow 3(3x-1) > 2(2x+1) \Leftrightarrow 9x-3 > 4x+2$$

$$\Leftrightarrow 9x-3 > 4x+2 \Leftrightarrow 9x-4x > 3+2$$

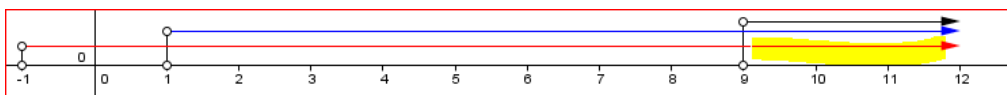
$$\Leftrightarrow 5x > 5 \Leftrightarrow x > 1$$

και $2(3x-1) + x > -2(x+5) - 16x-2+x > -2x-10-1$

$$\Leftrightarrow 6x+x+2x > -10-1+2 \Leftrightarrow 9x > -9 \Leftrightarrow x > -1$$

και $3+x < 2(x-3) \Leftrightarrow 3+x < 2x-6 \Leftrightarrow x-2x < -6-3$

$$\Leftrightarrow -x < -9 \Leftrightarrow x > 9$$



Κοινές λύσεις : $x > 9$

Άσκηση 5

Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε στην ευθεία των αριθμών τις λύσεις τους.

α) $-7 < 2x + 1 \leq 19$

β) $-1 < 1 - 2x < 3$

γ) $3 \leq 5x + 1 \leq 8$

Λύση

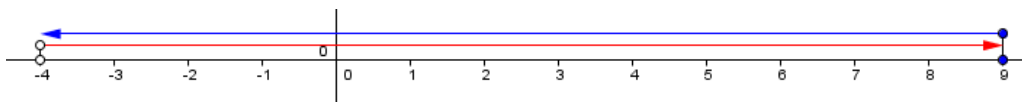
Στην ουσία είναι δύο ανισώσεις. Μπορούμε να τις ξεχωρίσουμε, να λύσουμε την κάθε μια ξεχωριστά και να βρούμε τις κοινές λύσεις όπως στην άσκηση 4 ή να τις λύνουμε ταυτόχρονα κάνοντας τις ίδιες ενέργειες και στα τρία μέλη. Επιλέγουμε τη δεύτερη μέθοδο και έχουμε διαδοχικά:

α) $-7 < 2x + 1 \leq 19$ (προσθέτουμε και στα τρία μέλη τον αριθμό -1)

$\Leftrightarrow -7 - 1 < 2x + 1 - 1 \leq 19 - 1 \Leftrightarrow -8 < 2x \leq 18 \Leftrightarrow$

\Leftrightarrow (διαιρούμε και στα τρία μέλη με τον αριθμό **2**) $\frac{8}{2} < \frac{2x}{2} < \frac{18}{2}$

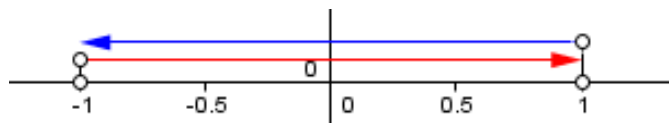
$\Leftrightarrow -4 < x \leq 9$



β) $-1 < 1 - 2x < 3 \Leftrightarrow$ (προσθέτουμε και στα τρία μέλη τον αριθμό -1)

$-1 - 1 < 1 - 2x - 1 < 3 - 1 \Leftrightarrow -2 < -2x < 2 \Leftrightarrow$ (διαιρούμε και στα τρία μέλη με τον αριθμό -2 και η ανίσωση αλλάζει φορά)

$\frac{2}{-2} > \frac{2x}{-2} > \frac{2}{-2} \Leftrightarrow 1 > x > -1$



γ) $3 \leq 5x + 1 \leq 8 \Leftrightarrow$ (προσθέτουμε και στα τρία μέλη τον αριθμό -1)

$3 - 1 \leq 5x + 1 - 1 \leq 8 - 1 \Leftrightarrow 2 \leq 5x \leq 7 \Leftrightarrow$ (διαιρούμε και στα τρία μέλη με τον

αριθμό **5**) $\frac{2}{5} \leq \frac{5x}{5} \leq \frac{7}{5} \Leftrightarrow \frac{2}{5} \leq x \leq \frac{7}{5}$



Άσκηση 6

Για ποιες τιμές του θετικού ακεραίου αριθμού μ , έχουμε ότι ο $A = 2(\mu - 3) - 4$ είναι αρνητικός;

Λύση

Πρέπει να ισχύει $A < 0$, άρα $2(\mu - 3) - 4 < 0$

$$2(\mu - 3) - 4 < 0 \Leftrightarrow 2\mu - 6 - 4 < 0 \Leftrightarrow 2\mu < 4 + 6$$

$$\Leftrightarrow 2\mu < 10 \Leftrightarrow \mu < 5$$

Επειδή ο μ είναι θετικός ακέραιος $\mu < 5$ μπορεί να πάρει τις τιμές: 1, 2, 3, 4

Άσκηση 7

Για ποιες τιμές του αριθμού α η ανίσωση $2x - 3\alpha + 1 > \alpha(x - 1)$ έχει λύση τον αριθμό $x = 2$;

Λύση

Θέτουμε όπου x τον αριθμό 2 και έχουμε: $2 \cdot 2 - 3\alpha + 1 > \alpha(2 - 1)$

$$\text{Όμως } 2 \cdot 2 - 3\alpha + 1 > \alpha(2 - 1) \Leftrightarrow 4 - 3\alpha + 1 > \alpha \Leftrightarrow -3\alpha - \alpha > -1 - 4$$

$$\Leftrightarrow -4\alpha > -5 \Leftrightarrow \frac{-4\alpha}{-4} < \frac{-5}{-4} \Leftrightarrow \alpha < \frac{5}{4}$$

Παρατήρηση: Αν $\alpha < \frac{5}{4}$ π.χ. $\alpha = 1$ έχουμε την ανίσωση: $2x - 3 + 1 > x - 1$

$$\text{Τότε } 2x - 3 + 1 > x - 1 \Leftrightarrow 2x - x > 3 - 1 - 1 \Leftrightarrow x > 1$$

Δηλαδή έχει λύση τον αριθμό $x = 2$ αλλά προφανώς όχι μόνο αυτόν.

Άσκηση 8

Η Άννα είχε τριπλάσια χρήματα από τη Μαρία, αλλά δαπάνησε 14 € και τώρα έχει λιγότερα από τη Μαρία. Να αποδείξετε ότι η Μαρία έχει λιγότερα από 7 €.

Λύση

Όπως και στα προβλήματα εξισώσεων, προσπαθούμε να εκφραστούμε στη γλώσσα των Μαθηματικών συμβολίζοντας με μεταβλητές κάποιες από τις άγνωστες ποσότητες. Εδώ είναι βολικό να συμβολίσουμε με x ευρώ τα χρήματα της Μαρίας. Τότε αρχικά η Άννα που είχε τριπλάσια χρήματα από τη Μαρία θα είχε $3x$ ευρώ. Μετά την δαπάνη των 14 ευρώ η Άννα θα είχε $3x - 14$ ευρώ.

Η ανισότητα που εκφράζει αυτό το πρόβλημα είναι: $3x - 14 < x$

Όμως: $3x - 14 < x \Leftrightarrow 3x - x < 14 \Leftrightarrow 2x < 14 \Leftrightarrow x < 7$

Επειδή ο αριθμός x εκφράζει τα χρήματα της Μαρίας σε ευρώ, η τελική ανίσωση δείχνει ότι πράγματι η Μαρία είχε λιγότερα από 7€.

Άσκηση 9

Ο Γιώργος έχει γράψει δύο διαγωνίσματα με βαθμούς 12 και 14. Τι βαθμό πρέπει να γράψει στο επόμενο διαγώνισμα για να έχει μέσον όρο πάνω από 14 ;

Λύση

Ο μέσος όρος των τριών διαγωνισμάτων προκύπτει αν διαιρέσουμε το άθροισμα των βαθμών των τριών διαγωνισμάτων δια 3. Αν x είναι ο βαθμός του τρίτου διαγωνίσματος τότε ο μέσος όρος των τριών διαγωνισμάτων είναι $\frac{12+14+x}{3}$.

Επειδή ο μέσος όρος πρέπει να είναι μεγαλύτερος από 14 προκύπτει η ανίσωση

$\frac{12+14+x}{3} > 14$. Όμως: $\frac{12+14+x}{3} > 14 \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{12+14+x}{3} > 3 \cdot 14 \Leftrightarrow 12 + 14 + x >$

$42 \Leftrightarrow x > 42 - 12 - 14 \Leftrightarrow x > 16$.

Ο βαθμός του τρίτου διαγωνίσματος θα πρέπει να είναι μεγαλύτερος από 16.

Άσκηση 10

Μία εταιρεία κινητής τηλεφωνίας « Parlanet»
προτείνει στους πελάτες της δύο πακέτα
συνδρομής :

1^ο : Πάγια 7,50 € το μήνα και χρέωση 0,254 €
το λεπτό

2^ο : Πάγιο 15€ το μήνα και χρέωση 0,204 € το λεπτό

Από πόσο χρόνο ομιλίας και πάνω συμφέρει το 2^ο πακέτο ;



Λύση

Αφού η επιλογή του "πακέτου" εξαρτάται από το χρόνο ομιλίας θέτουμε x το χρόνο ομιλίας (το x εκφράζει λεπτά ομιλίας σε ένα μήνα). Με βάση τις προσφορές το 1^ο πακέτο κοστίζει $7,50 + 0,254x$ € το μήνα , ενώ το 2^ο πακέτο κοστίζει $15 + 0,204x$ € .

Για να συμφέρει το 2^ο πακέτο πρέπει το κόστος του να είναι μικρότερο από αυτό του 1^{ου} , δηλαδή $15 + 0,204x < 7,50 + 0,254x$.

Όμως:

$$15 + 0,204x < 7,50 + 0,254x \Leftrightarrow 0,204x - 0,254x < 7,50 - 15 \Leftrightarrow -0,05x < -7,5 \Leftrightarrow x > \frac{-0,05x}{-0,05} > \frac{-7,5}{-0,05} \Leftrightarrow x > 150.$$

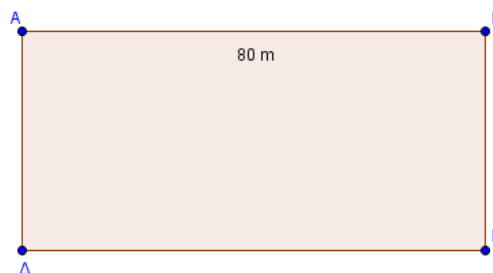
Το 2^ο πακέτο, συμφέρει όταν ο χρόνος ομιλίας είναι είναι μεγαλύτερος από 150 λεπτά το μήνα.

Άσκηση 11

Ένα οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου έχει μήκος 80m , περίμετρο μικρότερη από 240 m και εμβαδόν μεγαλύτερο από 3000 m². Πόσα μέτρα μπορεί να είναι το πλάτος του ;

Λύση

Η περίμετρος Π του ορθογωνίου παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ δίνεται από τη σχέση $\Pi = 2AB + 2 ΒΓ$ και το εμβαδόν του Ε από τη σχέση $E = AB \cdot ΒΓ$. Αν συμβολίσουμε το πλάτος ΒΓ με x (μέτρα) τότε $\Pi = 2 \cdot 80 + 2x$ και $E = 80 \cdot x$



Η περίμετρος πρέπει να είναι μικρότερη από 240 m οπότε:

$$\begin{aligned} \Pi < 240, \text{ άρα: } 2 \cdot 80 + 2x < 240 &\Leftrightarrow 160 + 2x < 240 \Leftrightarrow 2x < 240 - 160 \Leftrightarrow 2x < 80 \\ &\Leftrightarrow x < 40 \end{aligned}$$

Ταυτόχρονα το εμβαδόν πρέπει να είναι μεγαλύτερο από 3000 m² οπότε :

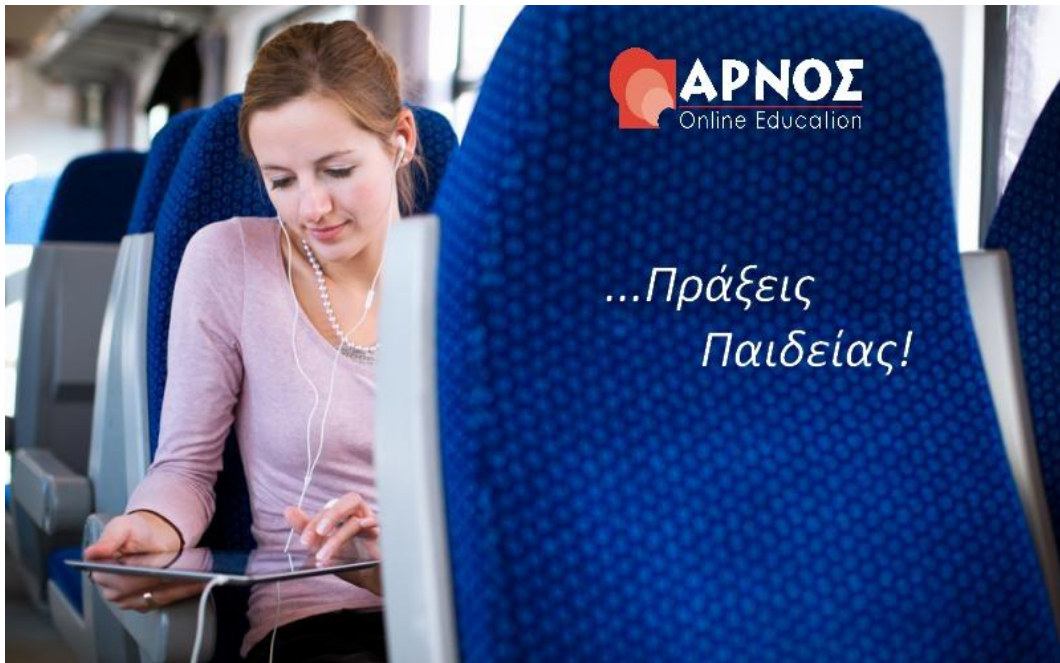
$$E > 3000 \Leftrightarrow 80x > 3000 \Leftrightarrow x > \frac{3000}{80} \Leftrightarrow x > 37,5$$

Τελικά $37,5 < x < 40$ δηλαδή το πλάτος μπορεί να είναι μεγαλύτερο από 37,5 μέτρα και μικρότερο από 40 μέτρα.

Επιμέλεια: Βασίλης Γκμίσης – ΜΕΔ - Μαθηματικός

Φροντιστηριακό e-μάθημα

Γυμνάσιο: 9.000 μαθήματα με βίντεο-διδασκαλία για όλο το σχολικό έτος **μόνο με 150 ευρώ!**



Μελέτη όπου, όποτε και όσο εσύ θες!



Διδάσκουμε μεθοδικά σε βίντεο τη θεωρία του σχολικού βιβλίου και λύνουμε όλες τις ασκήσεις

Δημιουργούμε συνεχώς νέα βίντεο με διδασκαλία για τις εκπαιδευτικές σου απαιτήσεις



Παίζουμε και μαθαίνουμε με on line test αξιολόγησης & SOS διαγωνίσματα προσομοίωσης για τις εξετάσεις

Λύνουμε απορίες ζωντανά on line καθημερινά 3 μ.μ. - 8 μ.μ.





...Πράξεις Παιδείας!