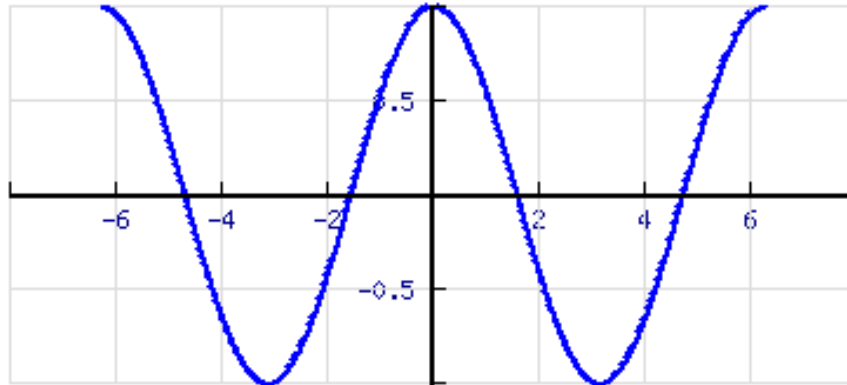


### 3. Συναρτήσεις



---

#### *Λύσεις ασκήσεων Μαθηματικών Β' Γυμνασίου*

---

#### 3.2 Καρτεσιανές συντεταγμένες - Γραφική παράσταση συνάρτησης

σχ. βιβλίο (σ.σ. 70-71)

Λύσεις Ασκήσεων Μαθηματικών Β΄ Γυμνασίου σχ. βιβλίου (σσ. 70-71)

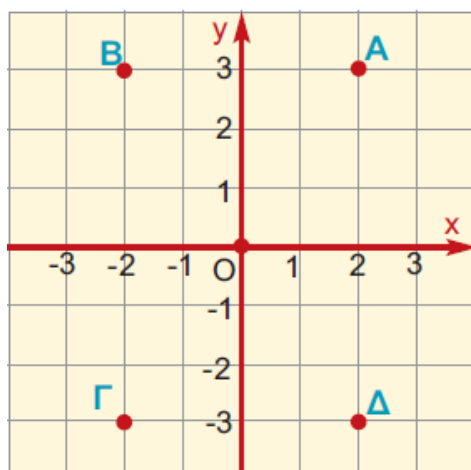
3.2 Καρτεσιανές συντεταγμένες - Γραφική παράσταση συνάρτησης

Ερωτήσεις κατανόησης

Ερώτηση 1

Να αντιστοιχίσετε σε κάθε σημείο τις συντεταγμένες του

| Σημείο | Συντεταγμένες        |
|--------|----------------------|
| A      | (2, 3)<br>(3, 2)     |
| B      | (-2, 3)<br>(-3, 2)   |
| Γ      | (-2, -3)<br>(-3, -2) |
| Δ      | (2, -3)<br>(3, -2)   |



Απάντηση

A (2, 3), B (-2, 3), Γ (-2, -3) Δ (2, -3)

| Σημείο | Συντεταγμένες        |
|--------|----------------------|
| A      | (2, 3)<br>(3, 2)     |
| B      | (-2, 3)<br>(-3, 2)   |
| Γ      | (-2, -3)<br>(-3, -2) |
| Δ      | (2, -3)<br>(3, -2)   |

## Ερώτηση 2

Να συμπληρώσετε τον πίνακα όπως φαίνεται στο παράδειγμα της 1<sup>ης</sup> γραμμής

| Σημείο A | Συμμετρικό του A ως προς τον x'x | Συμμετρικό του A ως προς τον y'y | Συμμετρικό του A ως προς το O |
|----------|----------------------------------|----------------------------------|-------------------------------|
| (-2, 3)  | (-2, -3)                         | (2, 3)                           | (2, -3)                       |
| (3, 5)   |                                  |                                  |                               |
| (-3, 5)  |                                  |                                  |                               |
| (-3, -5) |                                  |                                  |                               |
| (3, -5)  |                                  |                                  |                               |

## Απάντηση

Σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα των x έχουν την ίδια τετμημένη και αντίθετες τεταγμένες

Σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα των y έχουν την ίδια τεταγμένη και αντίθετες τετμημένες

Σημεία συμμετρικά ως προς το O(0,0) έχουν αντίθετες συντεταγμένες

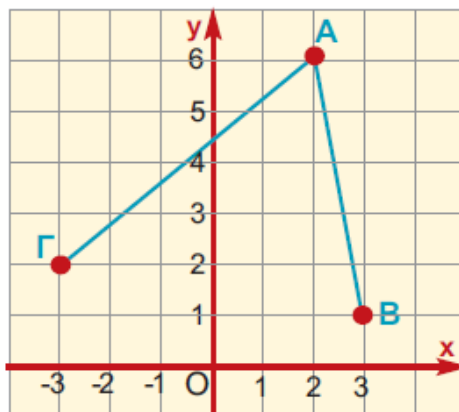
| Σημείο A | Συμμετρικό του A ως προς τον x'x | Συμμετρικό του A ως προς τον y'y | Συμμετρικό του A ως προς το O |
|----------|----------------------------------|----------------------------------|-------------------------------|
| (-2, 3)  | (-2, -3)                         | (2, 3)                           | (2, -3)                       |
| (3, 5)   | (3, -5)                          | (-3, 5)                          | (-3, -5)                      |
| (-3, 5)  | (-3, -5)                         | (3, 5)                           | (3, -5)                       |
| (-3, -5) | (-3, 5)                          | (3, -5)                          | (3, 5)                        |
| (3, -5)  | (3, 5)                           | (-3, -5)                         | (-3, 5)                       |

### Ερώτηση 3

Στο διπλανό σχήμα είναι

α)  $AB < AG$ , β)  $AB > AG$ , γ)  $AB = AG$

Να επιλέξετε την σωστή απάντηση



### Απάντηση

Οι συντεταγμένες των σημείων A, B, Γ είναι

$A(2, 6)$ ,  $B(3, 1)$  και  $\Gamma(-3, 2)$

Σχηματίζουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ABE και AΓΔ

του διπλανού σχήματος. Τότε  $AE = 5$ ,  $AD = 4$ ,

$BE = 1$  και  $\Gamma D = 5$ .

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABE έχουμε:

$$AB^2 = AE^2 + EB^2 = 5^2 + 1^2 = 26$$

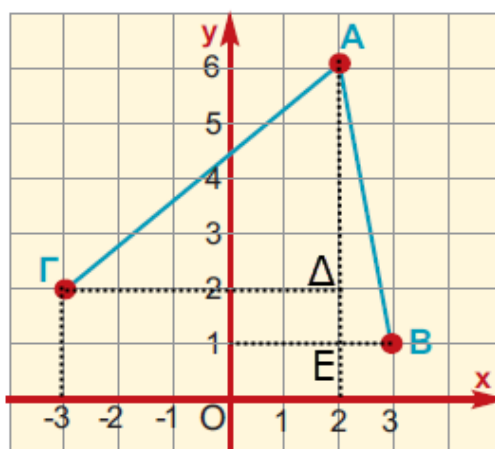
$$\text{άρα } AB = \sqrt{26}$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο AΓΔ έχουμε :

$$AG^2 = AD^2 + \Gamma D^2 = 5^2 + 4^2 = 41$$

$$\text{άρα } AG = \sqrt{41}$$

Άρα  $AB < AG$  δηλαδή σωστή απάντηση η (α)

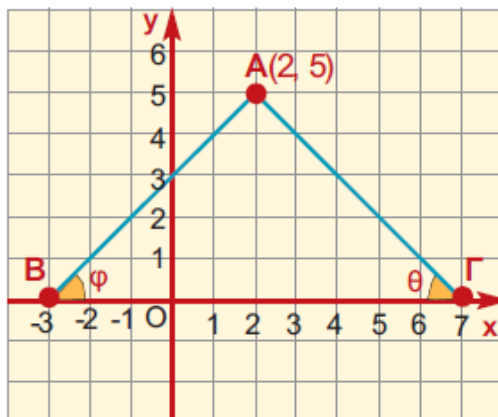


### Ερώτηση 4

Στο διπλανό σχήμα είναι

α) A :  $A < 90^\circ$ , B :  $A = 90^\circ$ , Γ :  $A > 90^\circ$

β) A :  $\epsilon\phi\theta = 5$  B :  $\epsilon\phi\theta = \frac{7}{5}$ ,



$$\Gamma: \epsilon\phi\theta = \frac{5}{7}, \quad \Delta: \epsilon\phi\theta = 1$$

γ) A :  $AB < A\Gamma$  , B :  $AB = A\Gamma$  , Γ :  $AB > A\Gamma$

δ) A :  $\epsilon\phi\phi = 3$  , B :  $\epsilon\phi\phi = 5$  , Γ :  $\epsilon\phi\phi = 1$  , Δ :  $\epsilon\phi\phi = 2$

Επιλέξτε την σωστή απάντηση

### Απάντηση

α) Φέρνοντας την  $AD \perp x'x$ , το σημείο Δ έχει συντεταγμένες  $\Delta(2, 0)$  και είναι  $AD = 5$  ,  $BD = 5$  και  $\Delta\Gamma = 5$ .

Οπότε τα ορθογώνια τρίγωνα  $AB\Delta$  ,  $A\Delta\Gamma$  είναι και ισοσκελή, συνεπώς κάθε μία από τις οξείες γωνίες τους θα είναι  $45^\circ$ .

Άρα  $\hat{\phi} = \hat{\theta} = 45^\circ$  , οπότε η τρίτη γωνία A του τριγώνου  $AB\Gamma$  θα είναι  $90^\circ$  .

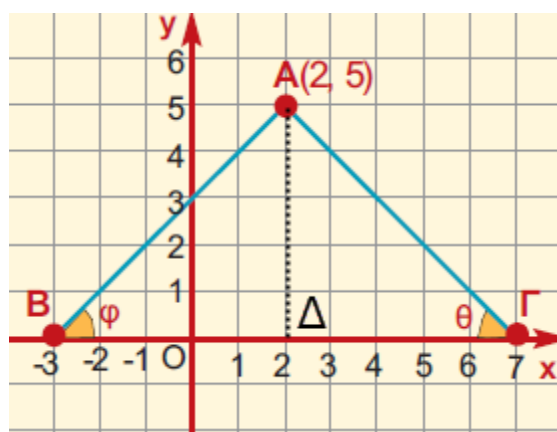
Άρα σωστή απάντηση είναι η B :  $A = 90^\circ$ ,

β) Είναι  $\epsilon\phi\theta = \frac{A\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{5}{5} = 1$ . Άρα σωστή απάντηση η Δ:  $\epsilon\phi\theta = 1$

γ) Αφού  $\hat{\phi} = \hat{\theta} = 45^\circ$  , το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές, επομένως  $AB = A\Gamma$

Άρα σωστή απάντηση η B:  $AB = A\Gamma$

δ) Είναι  $\epsilon\phi\phi = \frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{5}{5} = 1$ . Άρα σωστή απάντηση η Γ :  $\epsilon\phi\phi = 1$



### Ερώτηση 5

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης

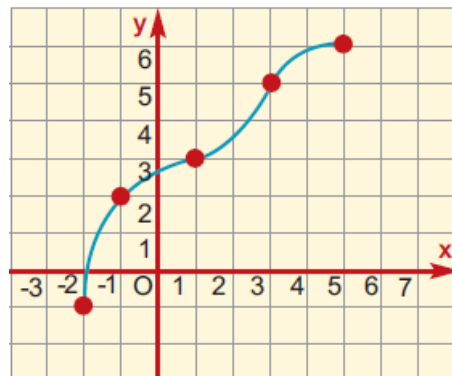
α) για  $x = 1$  είναι  $y = \dots\dots$  A: -1 B: 2 Γ: 3 Δ:

5

β) για  $x = 3$  είναι  $y = \dots\dots$  A: -1 B: 2 Γ: 3 Δ: 5

γ) για  $y = 6$  είναι  $x = \dots\dots$  A: -1 B: 2 Γ: 3 Δ: 5

δ) για  $y = 2$  είναι  $x = \dots\dots$  A: -1 B: 2 Γ: 3 Δ: 5



Επιλέξτε την σωστή απάντηση

### Απάντηση

Από την γραφική παράσταση διαπιστώνουμε ότι:

για  $x = 1$  είναι  $y = 3$

για  $x = 3$  είναι  $y = 5$

για  $y = 6$  είναι  $x = 5$

για  $y = 2$  είναι  $x = -1$

α) για  $x=1$ , είναι  $y = \dots\dots$  A: -1 B: 2 **Γ: 3** Δ: 5

β) για  $x=3$ , είναι  $y = \dots\dots$  A: -1 B: 2 Γ: 3 **Δ: 5**

γ) για  $y=6$ , είναι  $x = \dots\dots$  A: -1 B: 2 Γ: 3 **Δ: 5**

δ) για  $y=2$ , είναι  $x = \dots\dots$  **A: -1** B: 2 Γ: 3 Δ: 5

Απολαύστε τη διδασκαλία στα βίντεο του [www.arnos.gr](http://www.arnos.gr)

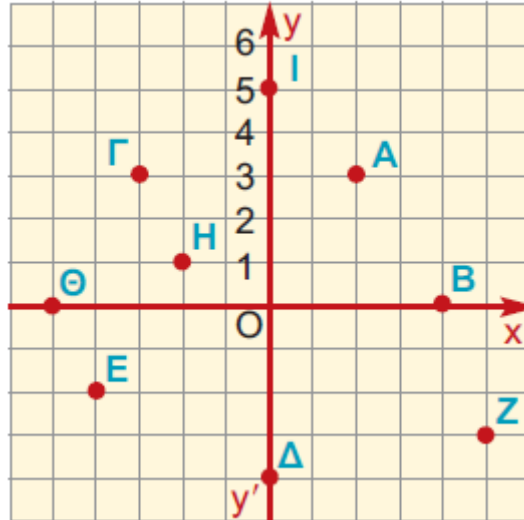
Κατανοείτε σε βάθος τη μεθοδολογία επίλυσης!

**APNOS**  
Online Education ...Πράξεις Παιδείας!

Ασκήσεις

Άσκηση 1

Στο παρακάτω σχήμα να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ και Ι



Λύση

Οι συντεταγμένες των σημείων είναι:

$A(2, 3)$ ,  $B(4, 0)$ ,  $\Gamma(-3, 3)$ ,  $\Delta(0, -4)$ ,  $E(-4, -2)$ ,  $Z(5, -3)$ ,  
 $H(-2, 1)$ ,  $\Theta(-5, 0)$  και  $I(0, 5)$

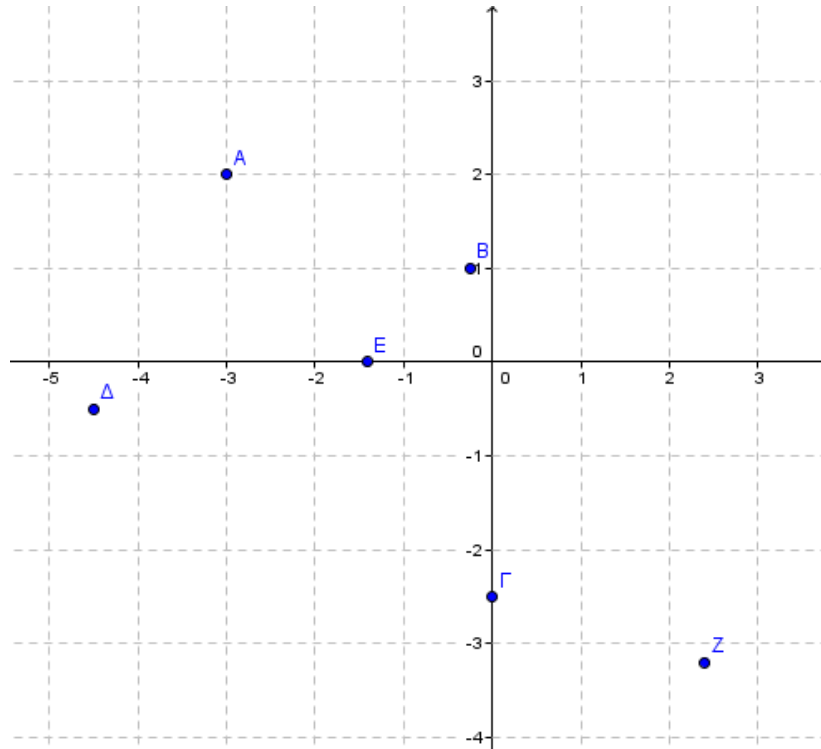
Άσκηση 2

Σε ένα τετραγωνισμένο χαρτί να σχεδιάσετε ένα σύστημα αξόνων και να

σημειώσετε τα σημεία :  $A(-3, 2)$ ,  $B(-0,25, 1)$ ,  $\Gamma\left(0, -\frac{5}{2}\right)$ ,  $\Delta\left(-\frac{9}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ,

$E(-\sqrt{2}, 0)$ ,  $Z(2,4, -3,2)$

**Λύση**



**Άσκηση 3**

Δίνονται τα σημεία  $A(-3, 4)$  και  $B\left(2, -\frac{7}{2}\right)$ . Σε τετραγωνισμένο χαρτί να βρείτε

τις συντεταγμένες των συμμετρικών τους σημείων ως προς τον άξονα  $x'x$ , τον άξονα  $y'y$  και την αρχή των αξόνων

**Λύση**

Σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα των  $x$  έχουν την ίδια τεταμημένη και αντίθετες τεταγμένες

Σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα των  $y$  έχουν την ίδια τεταγμένη και αντίθετες τεταμημένες



Σημεία συμμετρικά ως προς το  $O(0,0)$  έχουν αντίθετες συντεταγμένες

Το συμμετρικό του  $A(-3, 4)$  ως προς τον

άξονα  $x'x$  είναι το  $A_1(-3, -4)$

Το συμμετρικό του  $A$  ως προς τον

άξονα  $y'y$  είναι το  $A_2(3, 4)$

Το συμμετρικό του  $A$  ως προς την

αρχή  $O$  είναι το  $A_3(3, -4)$

Το συμμετρικό του  $B$  ως προς

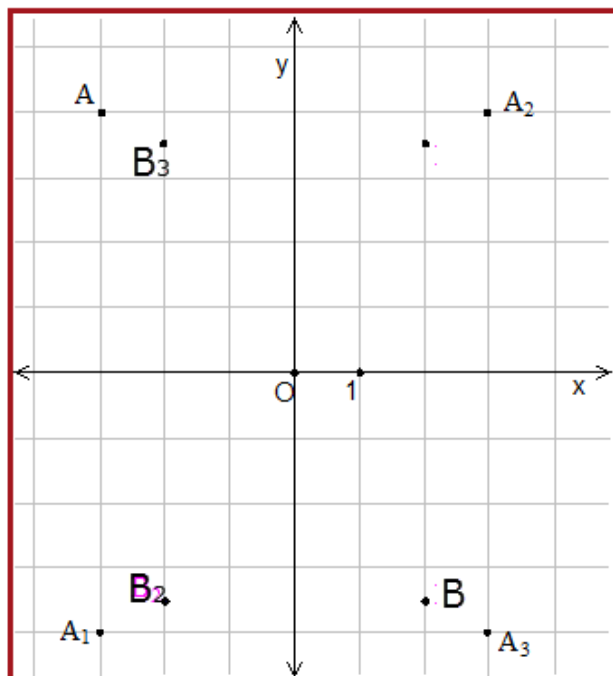
τον άξονα  $x'x$  είναι το  $B_1\left(2, \frac{7}{2}\right)$

Το συμμετρικό του  $B$  ως προς

τον άξονα  $y'y$  είναι το  $B_2\left(-2, -\frac{7}{2}\right)$

Το συμμετρικό του  $B\left(2, -\frac{7}{2}\right)$  ως

προς την αρχή είναι το  $B_3\left(-2, \frac{7}{2}\right)$



### Άσκηση 4

α) Στο παρακάτω σχήμα να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων  $A$ ,  $B$  και  $\Gamma$ .

β) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση

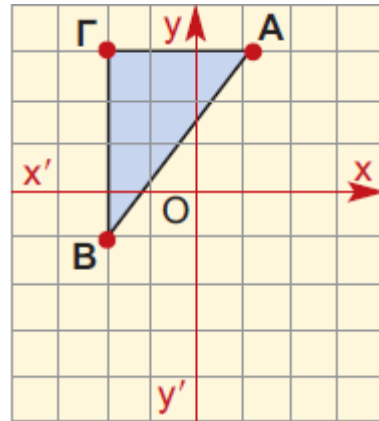
i) Το μήκος  $B\Gamma$  ισούται με

$A : 1 + 3 = 4$       $B : 2 - 2 = 0$       $\Gamma : 3 - 1 = 2$       $\Delta : -1 - 3 = -4$

ii) Το μήκος  $A\Gamma$  ισούται με

$A : 3 - 3 = 0$       $B : 1 + 2 = 3$       $\Gamma : 1 - 2 = -1$       $\Delta : 2 - 1 = 1$

γ) Αφού παρατηρήσετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο στο Γ, να επαληθεύσετε με τη βοήθεια του Πυθαγόρειου Θεωρήματος ότι η απόσταση AB είναι ίση με 5.



### Λύση

α) Οι συντεταγμένες των σημείων A, B και Γ είναι:  $A(1, 3)$ ,  $B(-2, -1)$ ,  $\Gamma(-2, 3)$

β) i) Το μήκος BΓ ισούται με  $A : 1 + 3 = 4$   
 ii) Το μήκος AΓ ισούται με  $B : 1 + 2 = 3$

γ) Επειδή τα σημεία A και Γ έχουν την ίδια τεταγμένη, είναι  $A\Gamma \parallel x'x$

Επειδή τα σημεία B και Γ έχουν την ίδια τεταγμένη, είναι  $B\Gamma \parallel y'y$

Και επειδή  $x'x \perp y'y$ , θα είναι και  $B\Gamma \perp A\Gamma$  και συνεπώς το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο στο Γ.

Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ και έχουμε:

$$AB^2 = B\Gamma^2 + A\Gamma^2 \text{ άρα } AB^2 = 4^2 + 3^2 \Leftrightarrow AB^2 = 25 \text{ άρα } AB = \sqrt{25} = 5$$

Απολαύστε τη διδασκαλία στα βίντεο του [www.arnos.gr](http://www.arnos.gr)

Κατανοείτε σε βάθος τη μεθοδολογία επίλυσης!

## Άσκηση 5

Να βρείτε τις αποστάσεις των παρακάτω σημείων από τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$

α)  $A(3, 5)$     β)  $B(-3, 2)$     γ)  $\Gamma(0, -4)$

### Λύση

Η απόσταση ενός σημείου  $M(\alpha, \beta)$  από

τον άξονα  $x'x$  είναι  $|\beta|$  και από τον

άξονα  $y'y$  είναι  $|\alpha|$  Άρα:

α) Η απόσταση του  $A(3, 5)$  από τον άξονα  $x'x$  είναι  $|5| = 5$

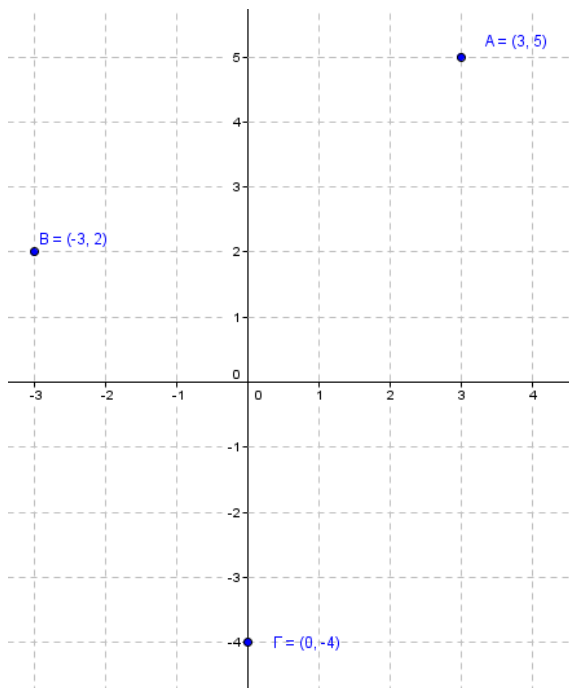
Η απόσταση του  $A$  από τον άξονα  $y'y$  είναι  $|3| = 3$

β) Του  $B(-3, 2)$  από τον άξονα  $x'x$  είναι  $|2| = 2$

Του  $B$  από τον άξονα  $y'y$  είναι  $|-3| = 3$

γ) Η απόσταση του  $\Gamma(0, -4)$  από τον άξονα  $x'x$  είναι  $|-4| = 4$

Η απόσταση του  $\Gamma$  από τον άξονα  $y'y$  είναι  $|0| = 0$



## Άσκηση 6

Να βρείτε τις αποστάσεις των σημείων

α)  $A(3, 5)$  και  $B(5, 1)$

β)  $A(-2, 1)$  και  $B(2, -3)$

γ)  $A(3, -5)$  και  $B(-2, -5)$

δ)  $A(-5, -7)$  και  $B(-5, 2)$

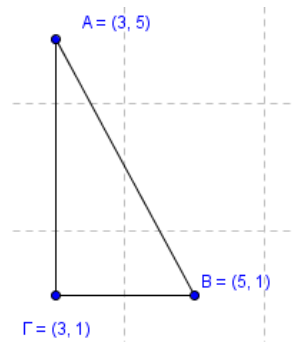
**Λύση**

α) Σχηματίζουμε το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος. Τότε  $\Gamma B = 2$ ,  $A\Gamma = 4$ ,

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$AB^2 = \Gamma A^2 + \Gamma B^2 = 4^2 + 2^2 = 20$$

άρα  $AB = \sqrt{20}$

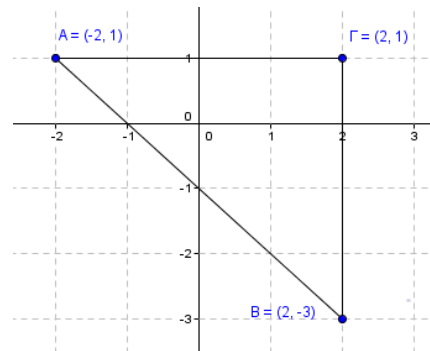


β) Σχηματίζουμε το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος. Τότε  $\Gamma B = 4$ ,  $A\Gamma = 4$ ,

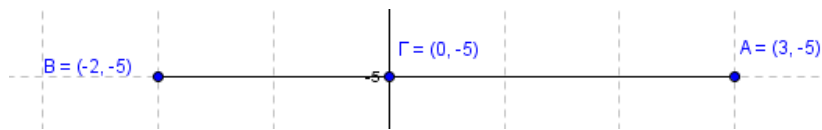
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$AB^2 = \Gamma A^2 + \Gamma B^2 = 4^2 + 4^2 = 32$$

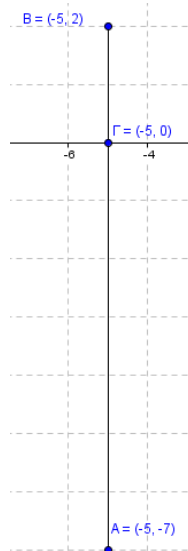
άρα  $AB = \sqrt{32}$



γ)  $AB = \Gamma A + \Gamma B = 3 + 2 = 5$



δ)  $AB = \Gamma A + \Gamma B = 7 + 2 = 9$

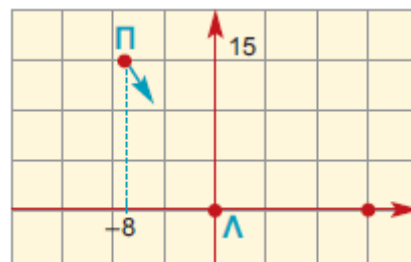


### Άσκηση 7

Ένα πλοίο Π κινείται με ταχύτητα 8 μίλια την ώρα και κατευθύνεται προς το λιμάνι Λ, όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα .

Η θέση του πλοίου ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων με αρχή το Λ και μονάδα μέτρησης το ένα μίλι είναι  $(-8, 15)$  .

Σε πόση ώρα θα φτάσει στο λιμάνι ;



### Λύση

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΠΚΛ έχουμε:

$$ΠΛ^2 = ΚΛ^2 + ΠΚ^2 = 8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289$$

$$\text{άρα } ΠΛ = \sqrt{289} = 17$$

Η απόσταση του πλοίου  $Π(-8, 15)$  από το λιμάνι

$Λ(0, 0)$  είναι  $ΠΛ = 17$  μίλια επομένως θα φτάσει στο λιμάνι σε

$$17 : 8 = 2,125 \text{ ώρες}$$



### Άσκηση 8

Η πίεση P (σε cm Hg) του αέρα ως συνάρτηση του ύψους h από το έδαφος φαίνεται στον παρακάτω πίνακα :

|                      |    |    |    |    |
|----------------------|----|----|----|----|
| Ύψος h σε χιλιόμετρα | 0  | 1  | 2  | 3  |
| Πίεση P σε cm Hg     | 76 | 68 | 60 | 52 |

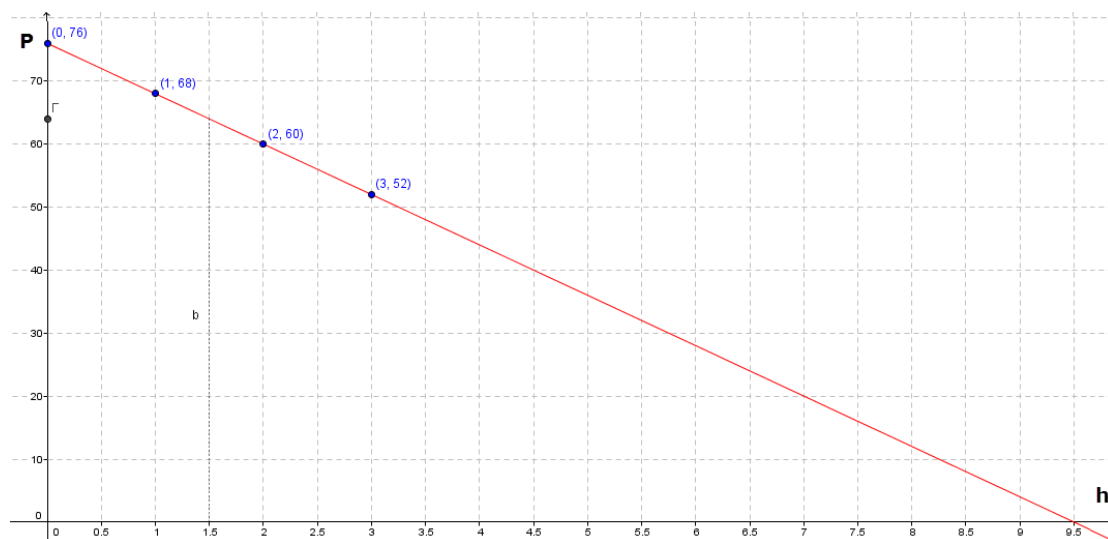
α) Να κατασκευάσετε σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής .

β) Ποια είναι η πίεση σε ύψος 1,5 km από το έδαφος ;

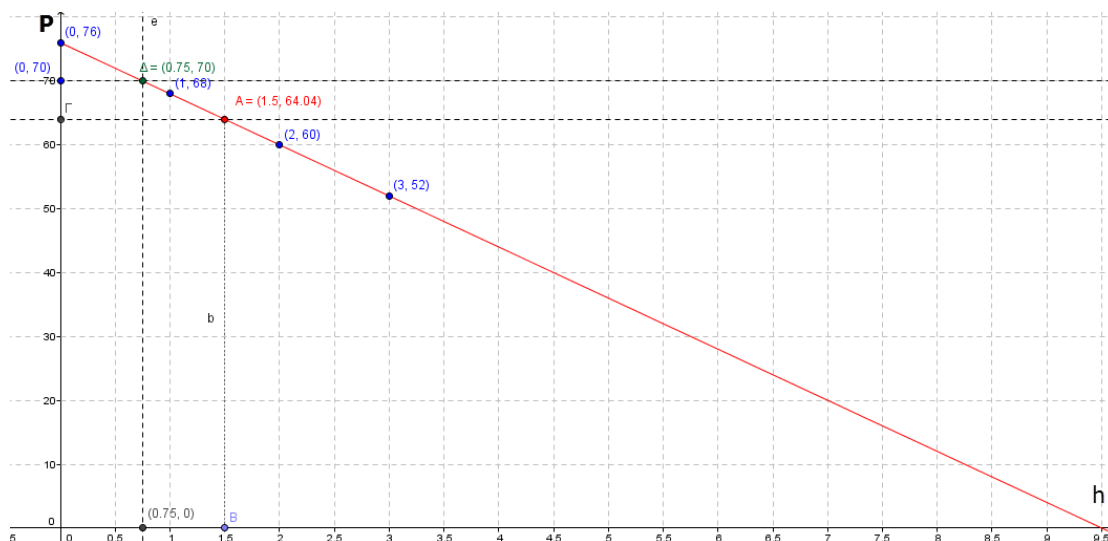
γ) Σε ποιο ύψος η πίεση είναι περίπου ίση με 70 cm Hg ;

### Λύση

α) Η γραφική παράσταση δημιουργείται ενώνοντας τα σημεία  $(0, 76)$ ,  $(1, 68)$ ,  $(2, 60)$  και  $(3, 52)$



β) Από το σημείο  $(1,5, 0)$  φέρνουμε κάθετο στον άξονα  $h$ , η οποία τέμνει τη γραφική παράσταση σε σημείο  $A$ . τεταγμένη του  $A$  είναι η ζητούμενη πίεση. Από το σχήμα βλέπουμε ότι η τεταγμένη του  $A$  είναι 64 (περίπου), οπότε σε ύψος 1,5 km η πίεση είναι 64 cm Hg



γ) Από το σημείο  $(0, 70)$  φέρνουμε κάθετο στον άξονα  $P$ , η οποία τέμνει τη γραφική παράσταση σε σημείο  $\Delta$ . Από το σχήμα βλέπουμε ότι η τεταγμένη του  $\Delta$  είναι 0,75. Οπότε η πίεση είναι 70cm Hg σε ύψος 0,75 km .

### Άσκηση 9

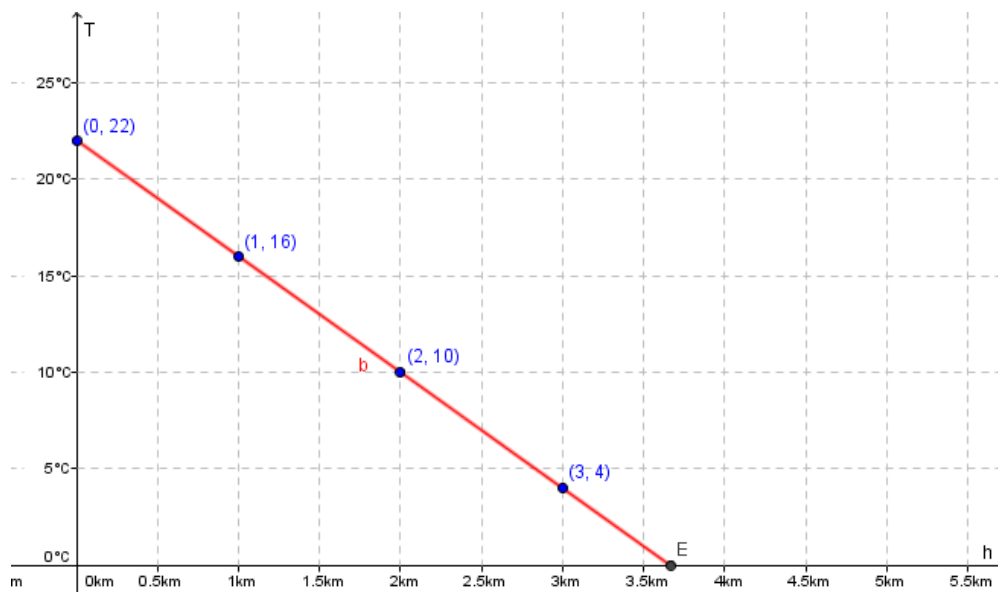
Η θερμοκρασία  $T$  του αέρα ως συνάρτηση του ύψους  $h$  από το έδαφος φαίνεται στον παρακάτω πίνακα :

|                                       |    |    |    |   |
|---------------------------------------|----|----|----|---|
| Ύψος $h$ σε χιλιόμετρα                | 0  | 1  | 2  | 3 |
| Θερμοκρασία $T$ σε $^{\circ}\text{C}$ | 22 | 16 | 10 | 4 |

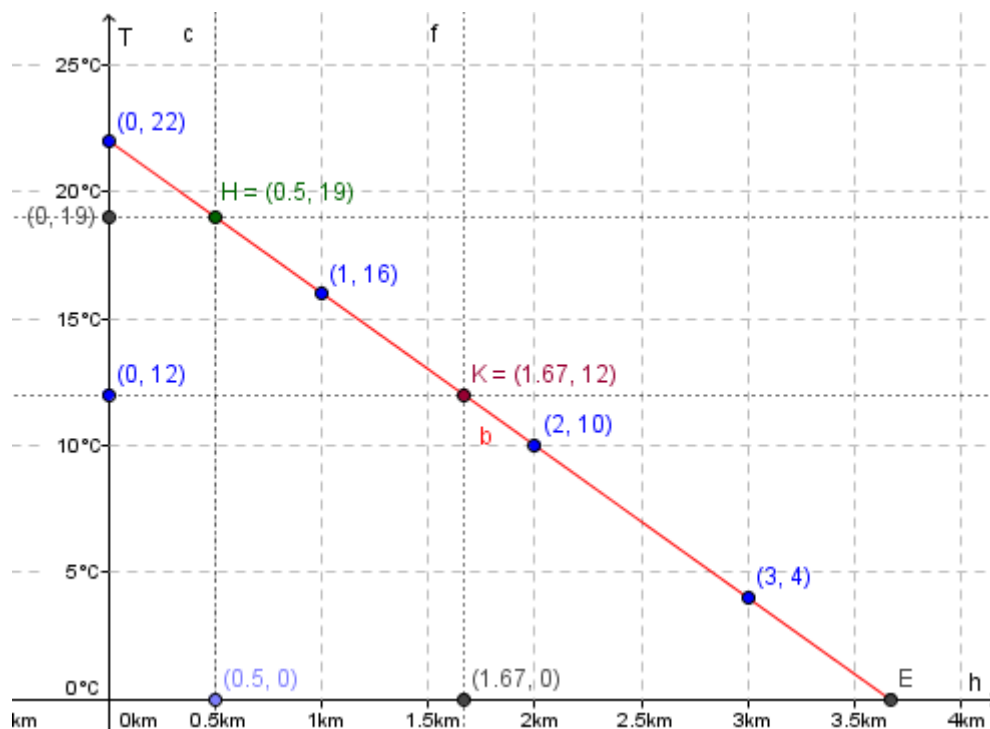
- α) Να κατασκευάσετε σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής.
- β) Ποια είναι η θερμοκρασία του αέρα σε ύψος 500 m από το έδαφος ;
- γ) Σε ποίο ύψος η θερμοκρασία του αέρα είναι περίπου ίση με  $12^{\circ}\text{C}$  ;

### Λύση

- α) Η γραφική παράσταση δημιουργείται ενώνοντας τα σημεία  $(0, 22)$ ,  $(1, 16)$ ,  $(2, 10)$  και  $(3, 4)$



- β) Επειδή  $500\text{m} = 0,5\text{ km}$ , από το σημείο  $(0,5, 0)$  φέρνουμε κάθετο στον άξονα  $h$ , η οποία τέμνει τη γραφική παράσταση σε σημείο  $H$ . Από το σχήμα βλέπουμε ότι η τεταγμένη του  $H$  είναι 19. Οπότε σε ύψος 0,5 km η θερμοκρασία είναι  $19^{\circ}\text{C}$



γ) Από το σημείο  $(0, 12)$  φέρνουμε κάθετο στον άξονα  $T$  η οποία τέμνει τη γραφική παράσταση σε σημείο  $K$ . Από το σχήμα βλέπουμε ότι η τετμημένη του  $K$  είναι 1,67 οπότε η θερμοκρασία είναι  $12^{\circ}C$  σε ύψος 1,67 km .

Απολαύστε τη διδασκαλία στα βίντεο του [www.arnos.gr](http://www.arnos.gr)

Κατανοείτε σε βάθος τη μεθοδολογία επίλυσης!



### Άσκηση 10

Όταν ένα σώμα (πχ μία μπάλα) πέφτει από ένα ψηλό σημείο (πχ τον τελευταίο όροφο ενός ουρανοξύστη ύψους 100 m) δεν κινείται ομαλά (σταθερή ταχύτητα), αλλά εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση.

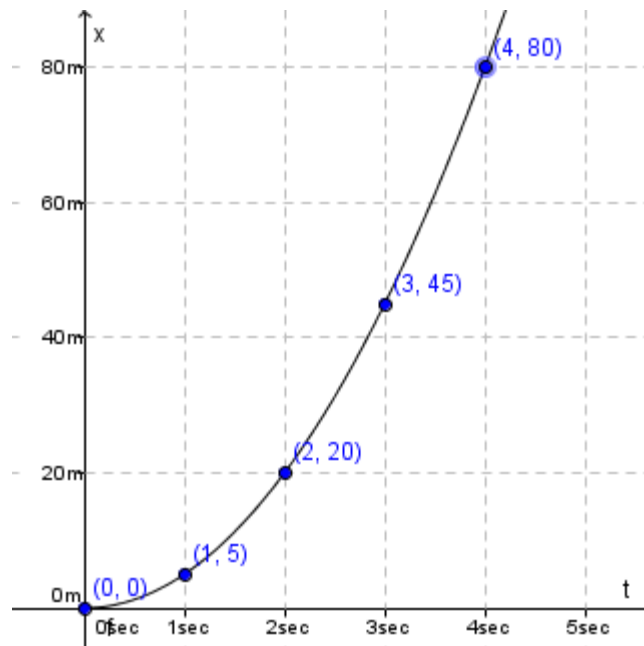
Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται η απόσταση  $x$  που διανύει το σώμα ως συνάρτηση του χρόνου  $t$ .

|      |   |   |    |    |    |
|------|---|---|----|----|----|
| t(s) | 0 | 1 | 2  | 3  | 4  |
| x(m) | 0 | 5 | 20 | 45 | 80 |

Να κατασκευάσετε σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής.

### Λύση

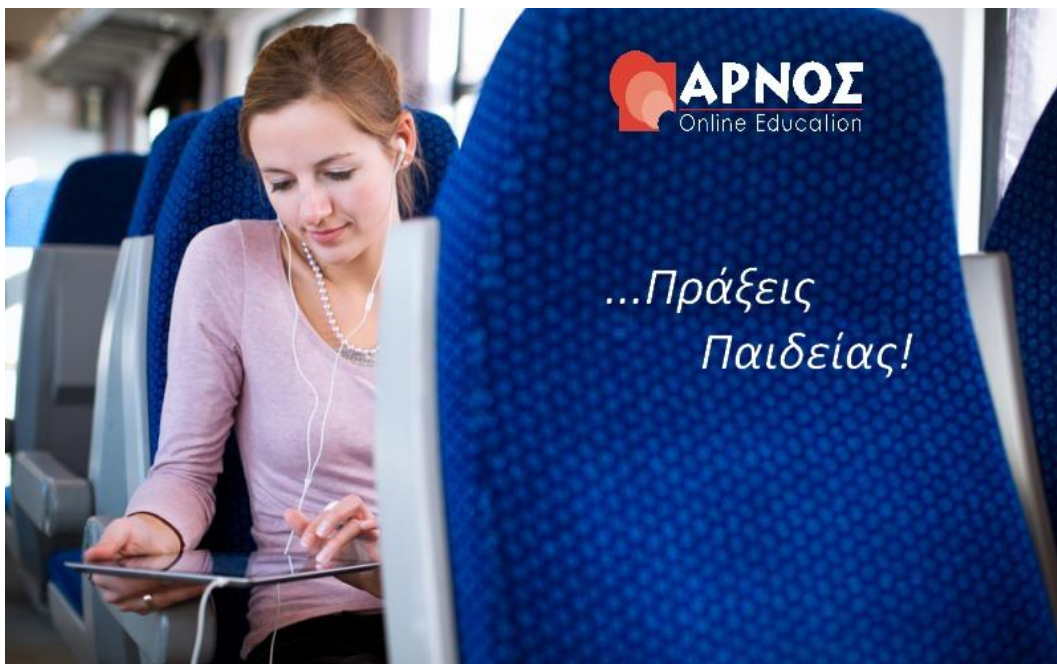
Η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα



Επιμέλεια: Βασίλης Γκιμίσσης MEd - Μαθηματικός

# Φροντιστηριακό e-μάθημα

**Γυμνάσιο:** 9.000 μαθήματα με βίντεο-διδασκαλία για όλο το σχολικό έτος **μόνο με 150 ευρώ!**



**Μελέτη όπου, όποτε και όσο εσύ θες!**



Διδάσκουμε μεθοδικά σε βίντεο τη θεωρία του σχολικού βιβλίου και λύνουμε όλες τις ασκήσεις

Δημιουργούμε συνεχώς νέα βίντεο με διδασκαλία για τις εκπαιδευτικές σου απαιτήσεις



Παίζουμε και μαθαίνουμε με on line test αξιολόγησης & SOS διαγωνίσματα προσομοίωσης για τις εξετάσεις

Λύνουμε απορίες ζωντανά on line καθημερινά 3 μ.μ. - 8 μ.μ.





**...Πράξεις Παιδείας!**