ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α.1 Θεωρία Σχολικού Βιβλίου, σελ. 111

Α.2 Θεωρία Σχολικού Βιβλίου, σελ. 104

Α.3 Θεωρία Σχολικού Βιβλίου, σελ. 128

Α.4 α) Λ

β) Λ

γ) Λ

δ) Σ

ε) Σ

α) Επειδή $-\frac{1}{x} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{1}{x}$ για $x>0$ είναι $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$.

β) Η $f(x)=x$ είναι πολυώνυμη περιττή βαθμού.

$f'(x)=1$ δεν έχει οριζόντια εφαπτομένη

γ) $f(x)=x^3 \quad x \in (-1,1)$

Είναι γνησίως αύξουσα αλλά $f'(0)=0$

δ) Σχολικό σελίδα 37 πάνω

ε) $f(x)=e^x \qquad g(x)=x^2$

$f \circ g(x) = e^{x^2} \qquad g \circ f(x) = e^{2x}$

$f \circ g(1) = e \qquad g \circ f(1) = e^2$

$e = e^2$

Β1

Το πεδίο ορισμού της h είναι το $(0,\infty)$ ενώ το πεδίο ορισμού της g το $\mathbb{R}$.

Άρα η $f = g \circ h$ έχει πεδίο ορισμού το $(0,\infty)$ και είναι

$$f(x) = g(h(x)) = g(\ln x) = \frac{4-e^{2\ln x}}{e^{\ln x}} = \frac{4-e^{\ln x^2}}{e^{\ln x}} = \frac{4-x^2}{x}$$

B2

i. Είναι $f(x)=\frac{4}{x}-x$

Έχουμε για $x>0$ $f'(x)=-\frac{4}{x^2}-1<0$.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα

ii. Επειδή $4-\pi^2<0,\quad 4-e^2<0$

Έχουμε διαδοχικά

$$\frac{4-\pi^2}{4-e^2}>\frac{\pi}{e}\Leftrightarrow\frac{4-\pi^2}{\pi(4-e^2)}>\frac{1}{e}\Leftrightarrow\frac{4-\pi^2}{\pi}<\frac{4-e^2}{e}\Leftrightarrow f(\pi)<f(e)$$

Αλλά η f είναι γνησίως φθίνουσα

Αφού $e<\pi$ θα είναι $f(\pi)<f(e)$

B3

Έχουμε $f(x)=\frac{4}{x}-x$

Είναι $\lim_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$ για $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$

Άρα η $x=0$ είναι κατακόρυφη εφαπτομένη

Στο $+\infty$ παρατηρούμε ότι $\lim_{x\to\infty}f(x)+\kappa=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x}=0$

Από τον ορισμό της ασύμπτωτης έχουμε ότι η ευθεία $y=-x$ είναι ασύμπτωτη της συνάρτησης στο ∞.

B.4

Για $x\geq 2$ είναι $f(x)=\frac{x^2-4}{x}$

Έχουμε ότι για $x\geq 2$

$$\left|\frac{\text{συν}(1+x)^2}{f(x)}\right|\leq\frac{1}{f(x)}=\frac{x}{x^2-4}$$

Άρα για $x\geq 2$ είναι $-\frac{x}{x^2-4}\leq\frac{\text{συν}(1+x)^2}{f(x)}\leq\frac{x}{x^2-4}$

Επειδή $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-4}=0$ το κριτήριο παρεμβολής δίνει $\lim_{x\to\infty}\frac{\text{συν}(1+x)^2}{f(x)}=0$

Γ.1

Είναι $\int_2^3 xf(x)dx=\int_2^3 x\left(\frac{1}{x}+\alpha\right)dx=\int_2^3 x(1+\alpha x)dx=x+\alpha\frac{x^2}{2}\int_2^3 =$

$=3+\alpha\frac{9}{2}-\left(2+\alpha\frac{4}{2}\right)=1+\alpha\frac{5}{2}$

Αφού $\int_2^3 xf(x)dx=1$ προκύπτει ότι $\alpha=0$

Γ2.

i. Θα βρούμε την $f(1)$

Είναι $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{1-x}{x(x-1)}=-\lim\limits_{x\to1^+}\frac{1}{x}=-1$

$\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^2-3x+3-1}{x-1}=$

$\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}==\lim\limits_{x\to1^-}(x-2)=-1$

Αφού $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-1$ $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-1$ το $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ υπάρχει και είναι -1

Άρα $f'(1)=-1$

ii. Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y=f(1)+f'(1)(x-1)$

Αφού $f(1)=1$ $f'(1)=-1$ έχουμε $y=1-(x-1)=2-x$

Αν θ είναι η γωνία που σχηματίζει με το $x'x$ γνωρίζουμε ότι $\varepsilon\varphi\theta=-1$

Άρα $\theta=135^{o}$ ή $\theta=\frac{3\pi}{4}$

Γ3

Είναι $f(x)=\begin{cases}\nearrow x^2-3x+3 & x<1\\ \searrow \frac{1}{x} & x\geq1\end{cases}$

Έχουμε από το Γ2 ότι $f'(1)=-1$

Για $x>1$ $f'(x)=-\frac{1}{x^2}<0$

Για $x<1 \quad f'(x)=3x-3=3(x-1)<0$

Άρα $f'(x)<0$ για $x\in\mathbb{R}$

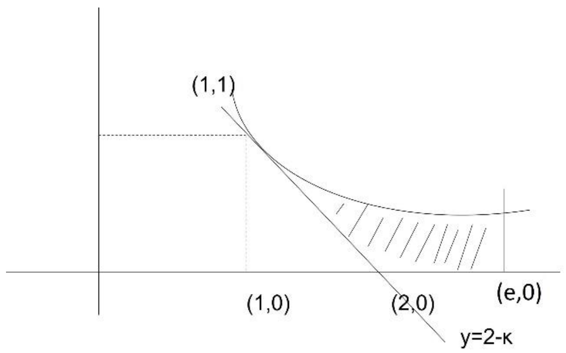
Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα οπότε είναι 1-1

Αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα θα έχουμε ότι $f(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{x\to\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right)$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2-3x+3=+\infty$

Άρα $f(\mathbb{R})=(0,+\infty)$

Γ4 Φτιάχνουμε ένα πρόχειρο σχήμα



Η ευθεία $y=2-x$ είναι κάτω από την $\frac{1}{\kappa}$ για $x\geq 1$ γιατί $\left(\frac{1}{\kappa}\right)''=\frac{2}{x^3}>0$

Άρα η $\frac{1}{x}$ για $x\geq 1$ είναι κυρτή οπότε η εφαπτομένη είναι κάτω από την γραφική της παράσταση.

Το εμβαδόν του χωρίου είναι

$$\int_1^2\left(\frac{1}{x}-(2-x)\right)dx+\int_2^e\frac{1}{x}dx=I_1+I_2$$

$$I_1=\int_1^2\left(\frac{1}{x}-(2-x)\right)dx=\int_{12}^2\left(\frac{1}{x}+x-2\right)dx=$$

$$=\ln x+\frac{x^2}{2}-2x\Big|_1^2=\ln e-\ln 2=1-\ln 2$$

Άρα το εμβαδόν του χωρίου είναι $I_1+I_2=\ln 2-\frac{1}{2}+1-\ln 2=\frac{1}{2}$

$$= \ln x + \frac{x^2}{2} - 2x \Big|_1^2 = \ln e - \ln 2 = 1 - \ln 2$$

Δ

Δ1

$$\lim_{x\to 1} f(x) - 2x = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-2x}{x-1} \cdot (x-1) = e \cdot 0 = 0$$

$\lim_{x\to 1} f(x) - 2x = f(1) - 2$ γιατί η f είναι συνεχής στο 1.

$f(1) = -1 + \kappa$

Άρα $-1+\kappa-2=0$ δηλαδή $\kappa = 3$

Δ2

$$f(x) = \ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3$$

$f(1) = -1 + 3 = 2$

$$f\left(\frac{1}{5}\right) = \ln\left(2-\frac{1}{5}\right) - 5 + 3 = \ln\frac{9}{5} - 2 < 0 \text{ γιατί } \ln\frac{9}{5} < \ln 2 < 2$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \ln\left(2-\frac{1}{3}\right) - 3 + 3 = \ln\left(2-\frac{1}{3}\right) > 0$$

$$f\left(2-e^{-5}\right) = \ln e^{-5} - \frac{1}{2-e^{-5}} + 3 = -5 + 3 - \frac{1}{2-e^{-5}} < 0$$

Από Bolzano έχει μια ρίζα στο $\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right)$ και μια στο $\left(1, 2-e^{-5}\right)$

$$f'(x) = -\frac{1}{2-x} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{1}{(x-2)^2} - 2\frac{1}{x^3} < 0$$

Αν οι $f(x) = 0$ είχε τρεις διαφορετικές ρίζες $0 < \rho_1 < \rho_2 < \rho_3 < 2$ τότε από Θ. Rolle θα υπάρχουν ξ_1, ξ_2 με $\rho_1 < \xi_1 < \rho_2 < \xi_2 < \rho_3$ και $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$

Από Rolle για την f' θα υπήρχε ξ με $\xi_1 < \xi < \xi_2$ και $f''(\xi) = 0$ ΑΤΟΠΟ

Δ3

Έχουμε $f''(x)<0$ για $x\in(0,2)$

Άρα η f είναι κοίλη οπότε η f' είναι γνησίως φθίνουσα

$$\frac{2f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}=\frac{3\left(\ln\left(2-\frac{1}{3}\right)-3+3\right)}{1-3x_1}=\frac{3\ln\left(2-\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$$

Είναι $f'(x)=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x^2}$

$f'(1)=0$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=+\infty$

Άρα $f'((0,1))=(0,\infty)$

Αφού $1-3x_1>0$ $\quad \frac{3\ln\left(2-\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}\in(0,\infty)$

Άρα υπάρχει $\xi\in(0,1)$ με $f'(\xi)=\frac{3\ln\left(2-\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$

Το ξ είναι μοναδικό αφού η f' είναι γνησίως φθίνουσα

Δ4

i. Αφού η F, G είναι αρχικές της f θα υπάρχει σταθερά c ώστε $F(x)=G(x)+c$

Από $F(x_1)=0$ προκύπτει ότι $G(x_1)=-c$

Από $G(x_2)=0$ προκύπτει ότι $F(x_2)=c$

Άρα $F(x_2)+G(x_1)=0$

ii. Θέτουμε $h(x)=x_1F(x)+x_2G(x)-x_1-x_2+2x$

Είναι $h'(x)=x_1f(x)+x_2f(x)+2x=(x_1+x_2)f(x)+2$

Οι μοναδικές ρίζες της f είναι τα x_1,x_2

Άρα για $x\in(x_1,x_2)$ η f θα διατηρεί πρόσημο

Επειδή $f(1)>0$ θα είναι $f(x)>0$ για $x\in(x_1,x_2)$

Άρα για $x\in(x_1,x_2)$ είναι $h'(x)>0$

Αφού η h είναι γνησίως αύξουσα στο (x_1,x_2) θα έχει το πολύ μία ρίζα στο (x_1,x_2)

Είναι $h(x_1)=x_1F(x_1)+x_2G(x_1)-x_1-x_2+2x_1=$

$=x_2G(x_1)+x_1-x_2$

$h(x_2)=x_2F(x_2)+x_2G(x_2)-x_1-x_2+2x_2=x_2F(x_2)+x_2-x_2$

Από το i) είναι $G(x_1)=-F(x_2)$

Άρα $\quad h(x_1)=-x_2F(x_2)+x_1-x_2$

$\quad\quad h(x_2)=x_2F(x_2)+x_2-x_1$

Έχουμε ότι για $x\in(x_1,x_2)$ $F'(x)=f(x)>0$

Επειδή $F(x_1)=0$ θα είναι $F(x_2)>0$

Αφού $x_2>x_1$ είναι άμεσο στο $h(x_1)<0,\ h(x_2)>0$

Από Bolzano η h έχει ρίζα στο (x_1,x_2) και αφού είναι γνησίως αύξουσα θα είναι μοναδική.