

ΑΣΚΗΣΗ

(Εμβαδόν χωρίου μεταξύ δυο καμπυλών)

A) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $y = e^x$, $y = e^{-x}$ και την ευθεία $x=1$.

B) Να υπολογίσετε τα εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον κύκλο $x^2 + y^2 = 8$ και την παραβολή $y = \frac{1}{2}x^2$.

Γ) Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x)$ για την οποία ισχύει:

$$f'(x) = \frac{2x-1}{e^x} \text{ και } f(0)=1$$

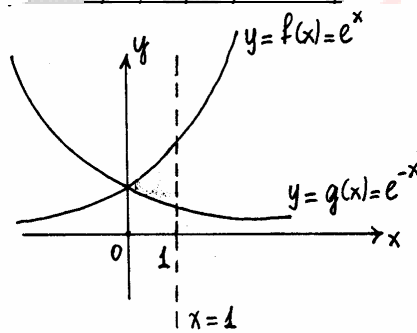
I) Να βρεθεί η συνάρτηση αυτή.

II) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g με $g(x) = \frac{f(x)}{2x+1}$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x=1$.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΙΚΗ ΛΥΣΗ

A) Δίνονται οι καμπύλες $y = f(x) = e^x$, $y = g(x) = e^{-x}$ και η ευθεία $x=1$.

Γραφική παράσταση



Είναι:

$$E = \int_0^1 [f(x) - g(x)] dx = \int_0^1 (e^x + e^{-x}) dx = \left[(e^x + e^{-x}) \right]_0^1 = e + e^{-1} - 1 - 1 = \left(e + \frac{1}{e} - 2 \right) \text{ τ.μ.}$$

B) Δίνονται: ο κύκλος $x^2 + y^2 = 8$ με κέντρο $K(0,0)$ και $R = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ και η παραβολή $y = \frac{1}{2}x^2$. Βρίσκουμε τα σημεία τομής τους:

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 8 \\ y = \frac{1}{2}x^2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{4}x^4 = 8 \Leftrightarrow 4x^2 + x^4 = 32 \Leftrightarrow x^4 + 4x^2 - 32 = 0$$

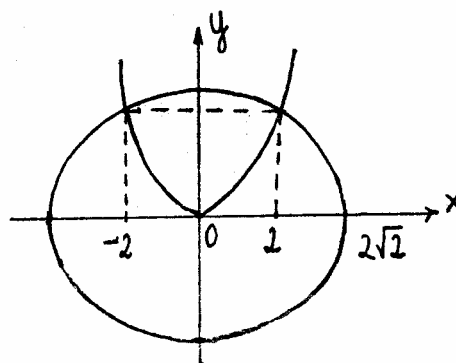
Θέτουμε $x^2 = t$ οπότε $t^2 + 4t - 32 = 0$. Η διακρίνουσα είναι:

$$\Delta: 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-32) = 16 + 128 = 144 > 0$$

και άρα: $t_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{144}}{2 \cdot 1} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 4 \\ t_2 = -8, \text{απορρίπτεται} \end{cases}$

Άρα: $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$

Τα σημεία τομής είναι τα: A(-2,2) και B(2,2), όπως φαίνεται στο σχήμα:



Ζητείται το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των καμπυλών:

$$y = f(x) = \sqrt{8 - x^2} \text{ και } y = g(x) = \frac{1}{2}x^2$$

$$\text{Οπότε: } E = \int_{-2}^2 [f(x) - g(x)] dx = \int_{-2}^2 \left(\sqrt{8 - x^2} - \frac{1}{2}x^2 \right) dx = \underbrace{\int_{-2}^2 \sqrt{8 - x^2} dx}_{I_1} - \underbrace{\frac{1}{2} \int_{-2}^2 x^2 dx}_{I_2}$$

$$\text{όπου: } I_1 = \int_{-2}^2 \sqrt{8 - x^2} dx = \int_{-2}^2 (x)' \cdot \sqrt{8 - x^2} dx = \left[x \cdot \sqrt{8 - x^2} \right]_{-2}^2 - \int_{-2}^2 x \cdot (\sqrt{8 - x^2})' dx =$$

$$= 2\sqrt{4} + 2\sqrt{4} - \int_{-2}^2 x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{8 - x^2}} dx = 8 - \int_{-2}^2 \frac{-x^2}{\sqrt{8 - x^2}} dx = 8 - \int_{-2}^2 \frac{8 - x^2 - 8}{\sqrt{8 - x^2}} dx =$$

$$= 8 - \int_{-2}^2 \left(\frac{8 - x^2}{\sqrt{8 - x^2}} - \frac{8}{\sqrt{8 - x^2}} \right) dx = 8 - \int_{-2}^2 \frac{(\sqrt{8 - x^2})^2}{\sqrt{8 - x^2}} dx + 8 \cdot \int_{-2}^2 \frac{dx}{\sqrt{8 - x^2}} =$$

$$= 8 - I_1 + 8 \cdot \left[\arcsin \frac{x}{\sqrt{8}} \right]_{-2}^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2I_1 = 8 + 8 \cdot \left(\arcsin \frac{2}{2\sqrt{2}} - \arcsin \frac{-2}{2\sqrt{2}} \right) \Leftrightarrow I_1 = 4 + 4 \cdot \left[\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} - \arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right]$$

$$\Leftrightarrow I_1 = 4 + 4 \cdot \left[\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right] = 4 + 4 \cdot \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) \Leftrightarrow I_1 = 4 + 2\pi$$

και
$$I_2 = \int_{-2}^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-2}^2 = \frac{8}{3} - \left(-\frac{8}{3} \right) = \frac{16}{3}$$

Άρα:
$$E = 4 + 2\pi - \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{3} = 4 + 2\pi - \frac{8}{3} = \frac{4}{3} + 2\pi$$

Γ) Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x)$ για την οποία ισχύει:

$$f'(x) = \frac{2x-1}{e^x} \quad \text{και} \quad f(0) = -1$$

Δ)
$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int (2x-1) \cdot e^{-x} dx = \int (2x-1) \cdot (-e^{-x})' dx = \\ &= -(2x-1) \cdot e^{-x} + \int (2x-1)' \cdot e^{-x} dx = -(2x-1) \cdot e^{-x} + \int 2e^{-x} dx = \\ &= -(2x-1) \cdot e^{-x} + 2 \int e^{-x} dx = -(2x-1) \cdot e^{-x} - 2e^{-x} + c = -e^{-x} \cdot (2x-1+2) + c \\ &\Leftrightarrow f(x) = -(2x+1) \cdot e^{-x} + c \end{aligned}$$

Όμως: $f(0) = -1 \Leftrightarrow -(0+1) \cdot e^{-0} + c = -1 \Leftrightarrow -1 + c = -1 \Leftrightarrow c = 0$

Άρα:
$$f(x) = -(2x+1) \cdot e^{-x}$$

ΙΙ) Έχουμε τις παρακάτω συναρτήσεις:

$$f(x) = -(2x+1) \cdot e^{-x} \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{f(x)}{2x+1} = \frac{-(2x+1) \cdot e^{-x}}{2x+1} = -e^{-x}, \quad x \in [0,1]$$

Τότε: $f(x) - g(x) = -(2x+1) \cdot e^{-x} + e^{-x} = e^{-x} \cdot (1-2x-1) = -2x \cdot e^{-x} \leq 0, \quad \forall x \in [0,1]$

Άρα:
$$\begin{aligned} E &= \int_0^1 2x \cdot e^{-x} dx = \int_0^1 2x \cdot (-e^{-x})' dx = \left[-2x \cdot e^{-x} \right]_0^1 + 2 \int_0^1 (x)' \cdot e^{-x} dx = \\ &= -2e^{-1} + 2 \int_0^1 e^{-x} dx = -2e^{-1} + 2 \left[-e^{-x} \right]_0^1 = -2e^{-1} - 2e^{-1} + 2 = 2 - 4e^{-1} = \left(2 - \frac{4}{e} \right) \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ ΑΠΟ ΕΡΓΑΣΙΑ ΤΗΣ Θ.Ε. ΦΥΕ14 ΤΟΥ ΕΑΠ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ 2004-05

ΑΣΚΗΣΗ

(Υπολογισμός εμβαδού επιφάνειας)

Να υπολογίσετε το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης περιοχής που ορίζεται από τις καμπύλες $y(x) = 3x + 0,5$, $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ και τους άξονες x και y όπως φαίνεται στο σχήμα.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΙΚΗ ΛΥΣΗ

Τα κοινά σημεία (σημεία τομής) των γραφημάτων των δυο συναρτήσεων, είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$f(x) = g(x) \quad (1) \Rightarrow$$

$$\sqrt{1-x^2} = 3x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$1-x^2 = 9x^2 + \frac{1}{4} + 3x \Leftrightarrow$$

$$10x^2 + 3x - \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow$$

$$40x^2 + 12x - 3 = 0$$

Η (1) έχει τελικά την μορφή τριωνύμου, του οποίου οι ρίζες είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-12 \pm 4\sqrt{39}}{80} = \begin{cases} x_1 = \frac{-3 + \sqrt{39}}{20} = \alpha \\ x_2 = \frac{-3 - \sqrt{39}}{20} \end{cases} \quad \text{η οποία απορρίπτεται, διότι πρέπει } x \geq 0$$

Επομένως:

$$E = \int_0^{\alpha} \left(3x + \frac{1}{2} \right) dx + \int_{\alpha}^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

Παρατηρούμε:

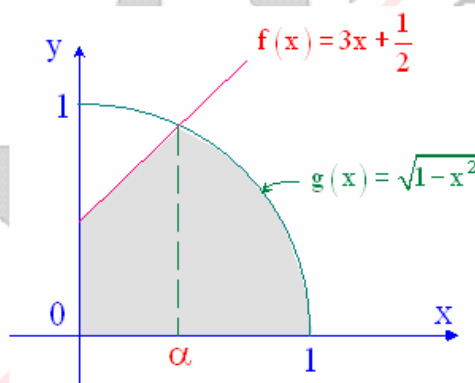
$$I = \int_{\alpha}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_{\arcsin \alpha}^{\pi/2} \cos^2 t dt = \int_{\arcsin \alpha}^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right]_{\arcsin \alpha}^{\pi/2}$$

Θέτουμε:

$$x = \sin t \quad \Rightarrow \quad dx = \cos t dt$$

Για $x = 1$, είναι $t = \frac{\pi}{2}$ και για $x = \alpha$, είναι $t = \arcsin \alpha$.

Άρα:



$$E = \left[\frac{3x^2}{2} + \frac{1}{2}x \right]_0^{\alpha} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\alpha \arcsin \alpha - \frac{1}{4}\sin(2\arcsin \alpha) \Rightarrow$$

$$E = \frac{3\alpha^2}{2} + \frac{1}{2}\alpha + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\alpha \arcsin \alpha - \frac{1}{4}\sin(2\arcsin \alpha)$$

ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΦΥΕ 14 (ΑΝΑΛΥΣΗΣ Ι)

ΑΣΚΗΣΗ

(Υπολογισμός εμβαδού επιφάνειας)

Να υπολογίσετε το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης περιοχής του σχήματος που περιβάλλεται από τις καμπύλες $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = x^3$.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΙΚΗ ΛΥΣΗ

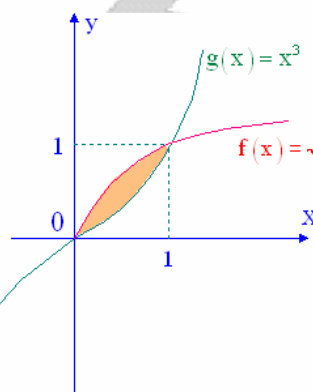
Τα κοινά σημεία των γραφημάτων των δυο συναρτήσεων, είναι οι λύσεις της εξίσωσης:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \Rightarrow \sqrt{x} = x^3 \Leftrightarrow \\ x &= x^6 \Leftrightarrow \\ x^6 - x &= 0 \Leftrightarrow x(x^5 - 1) = 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Άρα έχουμε:

$$\begin{aligned} E &= \int_0^1 (\sqrt{x} - x^3) dx = \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}} - x^3 \right) dx = \\ &= \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{8-3}{12} \Rightarrow E = \frac{5}{12} \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$



ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΦΥΕ 14 (ΑΝΑΛΥΣΗΣ Ι)

ΑΣΚΗΣΗ

(Υπολογισμός εμβαδού επιφάνειας)

Να βρεθεί το εμβαδόν των χωρίων που περικλείονται:

- α. Από την παραβολή $y = f(x) = x^2 - 7x + 6$, τον άξονα των x και τις ευθείες $x = 2$ και $x = 6$
- β. Από την καμπύλη $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ και τον άξονα των x .
- γ. Από τις παραβολές $y = f(x) = 6x - x^2$ και $y = g(x) = x^2 - 2x$

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΙΚΗ ΛΥΣΗ

- α. Το τριώνυμο $x^2 - 7x + 6$ έχει $\Delta = 49 - 24 = 25 > 0$ και ρίζες:

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm 5}{2} = \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου, προσδιορίζεται με την βοήθεια του πίνακα που ακολουθεί:

X	$-\infty$	1	6	$+\infty$	
$x^2 - 7x + 6$	+	0	-	0	+

Παρατηρούμε ότι στο διάστημα $[2, 6]$ που μας ενδιαφέρει, το τριώνυμο έχει αρνητικό πρόσημο, επομένως:

$$E = \int_2^6 (-x^2 + 7x - 6) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 7 \cdot \frac{x^2}{2} - 6x \right]_2^6 = -72 + 126 - 36 + \frac{8}{3} - 14 + 12 \Rightarrow$$

$$E = \frac{56}{3} \text{ τ.μ.}$$

- β. Παρατηρούμε ότι:

$$y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x = x(x^2 - 6x + 8)$$

Το τριώνυμο $x^2 - 6x + 8$ έχει $\Delta = 36 - 32 = 4 > 0$ και οι ρίζες του είναι:

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 2 \end{cases} \quad \text{Άρα} \quad y = x(x-4)(x-2)$$

Με την βοήθεια του πίνακα που ακολουθεί, προσδιορίζουμε το πρόσημο του:

X	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$	
X	—	0	+	+	+	
x - 2	—	—	0	+	+	
x - 4	—	—	—	0	+	
f(x)	—	0	+	—	0	+

Επομένως σύμφωνα με τις προηγούμενες παρατηρήσεις, έχουμε:

$$\begin{aligned}
 E &= \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x) dx + \int_2^4 (-x^3 + 6x^2 - 8x) dx = \\
 &= \left[\frac{x^4}{4} - 6 \cdot \frac{x^3}{3} + 8 \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^2 + \left[-\frac{x^4}{4} + 6 \cdot \frac{x^3}{3} - 8 \cdot \frac{x^2}{2} \right]_2^4 = \\
 &= 4 - 16 + 16 - 64 + 128 - 64 + 4 - 16 + 16 \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$E = 8 \tau. \mu.$$

- γ. Τα κοινά σημεία των γραφημάτων των δυο συναρτήσεων, είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= g(x) \Rightarrow 6x - x^2 = x^2 - 2x \Leftrightarrow \\
 -2x^2 + 8x &= 0 \Leftrightarrow 2x(4 - x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Το πρόσημο της διαφοράς $f(x) - g(x)$, προσδιορίζονται από τον πίνακα που ακολουθεί:

X	$-\infty$	0	4	$+\infty$	
f(x) - g(x)	-	0	+	0	-

Άρα σύμφωνα με τις προηγούμενες παρατηρήσεις, έχουμε:

$$E = \int_0^4 (-2x^2 + 8x) dx = \left[-2 \cdot \frac{x^3}{3} + 8 \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^4 = -\frac{128}{3} + 64 \Rightarrow$$

$$E = \frac{64}{3} \tau.μ.$$

ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΦΥΕ 14 (ΑΝΑΛΥΣΗΣ Ι)

ΑΡΝΟΣ
Studies & Publishing

ΘΕΜΑ 3ο 10-7-05

(Υπολογισμός εμβαδού επιφάνειας, υπολογισμός ορίων, συνέχεια συνάρτησης)

1^ο Ερώτημα

- α. Να βρεθεί το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται μεταξύ των καμπυλών
 $f(x) = x^5$ και $g(x) = 2x$
- β. Να βρεθεί το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται μεταξύ των καμπυλών
 $f(x) = x$, $g(x) = 2x$ και $h(x) = 5 - x$

2^ο Ερώτημα

- α. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x - \sin 4x}{3x^2}$

- β. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} ce^{3x} & , x \geq -1 \\ x^3 + x + 1, & x < -1 \end{cases}$$

Να υπολογιστεί το c ώστε η $f(x)$ να είναι συνεχής στο $x_0 = -1$.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΙΚΗ ΛΥΣΗ**1^ο Ερώτημα**

- α. Για τις συναρτήσεις $f(x) = x^5$ και $g(x) = 2x$, παρατηρούμε ότι είναι:

$$f(x) - g(x) = x^5 - 2x = x(x^4 - 2) = x(x^2 - \sqrt{2})(x^2 + \sqrt{2}) \Rightarrow$$

$$f(x) - g(x) = x(x^2 + \sqrt{2})(x - \sqrt[4]{2})(x + \sqrt[4]{2})$$

Με την βοήθεια του πίνακα:

X	$-\infty$	$-\sqrt[4]{2}$	0	$\sqrt[4]{2}$	$+\infty$
f(x)-g(x)	-	0	+	0	+

καθορίζουμε το πρόσημο της διαφοράς $f(x) - g(x)$ και έχουμε:

$$E = \int_{-\sqrt[4]{2}}^0 (x^5 - 2x) dx + \int_0^{\sqrt[4]{2}} (2x - x^5) dx = \left[\frac{x^6}{6} - x^2 \right]_{-\sqrt[4]{2}}^0 + \left[x^2 - \frac{x^6}{6} \right]_0^{\sqrt[4]{2}} \Rightarrow$$

$$E = -\frac{2\sqrt{2}}{6} + \sqrt{2} + \sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{6} = 2\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow E = \frac{4\sqrt{2}}{3} \text{ τ.μ.}$$

β. Οι συντεταγμένες των κοινών σημείων των γραφημάτων των δεδομένων συναρτήσεων ανά δυο, είναι:

$$\begin{cases} f(x) = x \\ g(x) = 2x \end{cases} \Leftrightarrow x = 2x \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow$$

$$O(0,0)$$

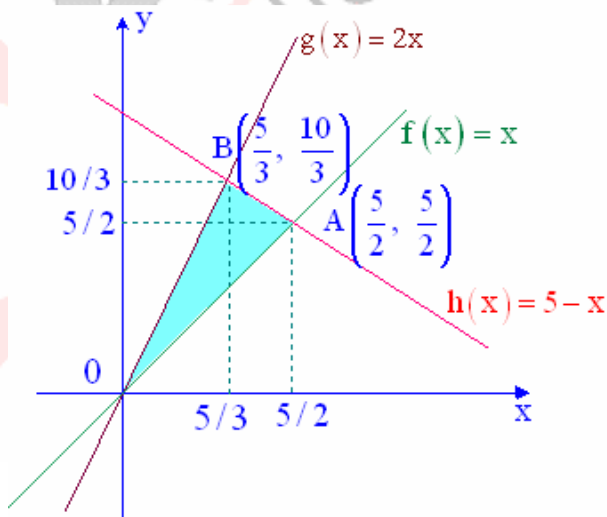
$$\begin{cases} f(x) = x \\ h(x) = 5 - x \end{cases} \Leftrightarrow x = 5 - x \Leftrightarrow 2x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \Rightarrow$$

$$A\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

$$\begin{cases} g(x) = 2x \\ h(x) = 5 - x \end{cases} \Leftrightarrow 2x = 5 - x \Leftrightarrow 3x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3} \Rightarrow$$

$$B\left(\frac{5}{3}, \frac{10}{3}\right)$$

Οι συναρτήσεις, όπως και το μεταξύ αυτών χωρίο, εμφανίζονται στο σχήμα που ακολουθεί:



Σε εφαρμογή όλων των παραπάνω, έχουμε:

$$E = \int_0^{5/3} (2x - x) dx + \int_{5/3}^{5/2} (5 - x - x) dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{5/3} + \left[5x - 2 \cdot \frac{x^2}{2} \right]_{5/3}^{5/2} =$$

$$= \frac{25}{18} + \frac{25}{2} - \frac{25}{4} - \frac{25}{3} + \frac{25}{9} = \frac{25}{18} + \frac{25}{4} - \frac{50}{9} = -\frac{25}{9} + \frac{25}{4} = 25 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} \right) = 25 \cdot \frac{5}{36} \Rightarrow$$

$$E = \frac{125}{36} \text{ τ.μ.}$$

2^ο Ερώτημα

α.i. Παρατηρούμε ότι:

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x - \tan x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \frac{1}{\cos^2 x}}{3x^2} \Rightarrow$$

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^3 x - 1}{3x^2 \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)(\cos^2 x + \cos x + 1)}{3x^2 \cos^2 x} \Rightarrow$$

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)}{3x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos^2 x + \cos x + 1}{\cos^2 x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)}{3x^2} \cdot 3 \Rightarrow$$

$$I = \frac{3}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)'}{(x^2)'} \Rightarrow$$

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2x} = -\frac{1}{2}$$

α.ii. Παρατηρούμε ότι:

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x - \sin 4x}{x^3} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(4x - \sin 4x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - 4 \cos 4x}{3x^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(4 - 4 \cos 4x)'}{(3x^2)'} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{16 \sin 4x}{6x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{64 \cos 4x}{6} \Rightarrow$$

$$I = \frac{64}{6} = \frac{32}{3}$$

β. Για να είναι η f συνεχής στο $x_0 = -1$, πρέπει:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1)$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} (x^3 + x + 1) = -1 - 1 + 1 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} (c \cdot e^{3x}) = c \cdot e^{-3} = f(-1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$c \cdot e^{-3} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad c = -e^3$$

ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΦΥΕ 14 (ΑΝΑΛΥΣΗΣ Ι)

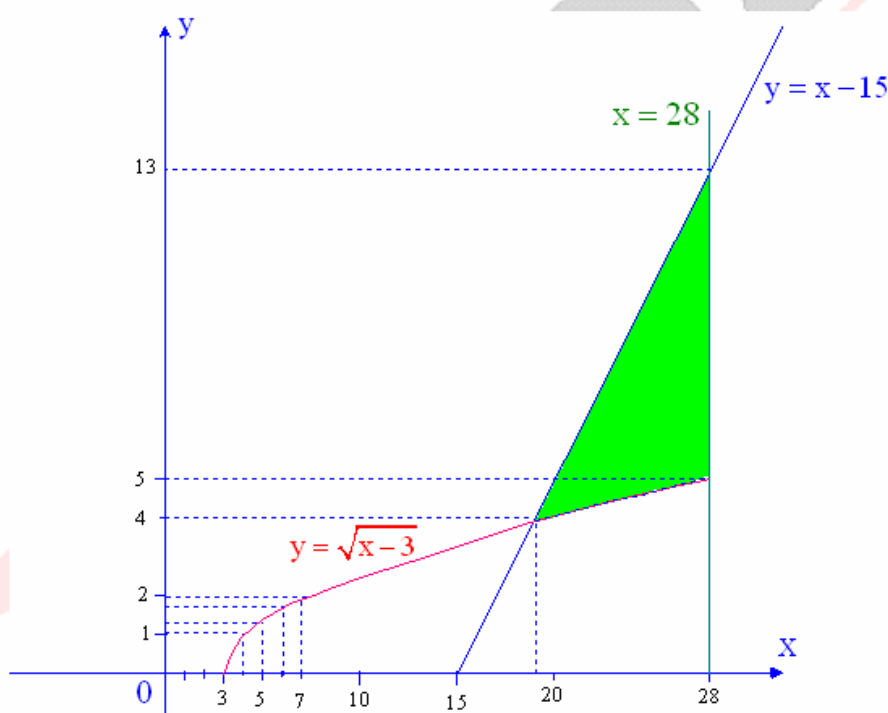
ΑΣΚΗΣΗ
(Υπολογισμός εμβαδού)

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τα γραφήματα των ευθειών:

$$y = x - 15, \quad x = 28$$

και της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x-3}$.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΙΚΗ ΛΥΣΗ



Τα σημεία τομής των γραφημάτων των συναρτήσεων $f(x) = \sqrt{x-3}$ και $g(x) = x - 15$, είναι η λύση του συστήματος:

$$\left. \begin{array}{l} y = \sqrt{x-3} \\ y = x-15 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} y^2 = x-3 \\ x = y+15 \end{array} \right\} \Rightarrow y^2 = y+15-3 \Leftrightarrow$$

$$y^2 - y - 12 = 0$$

Επειδή η διακρίνουσα του τριωνόμου είναι:

$$\Delta = 1 + 48 = 49$$

οι ρίζες του είναι:

$$y_{1,2} = \frac{1 \pm 7}{2} \Leftrightarrow \boxed{y = 4} \quad \text{ή} \quad \boxed{y = -3}$$

Η ρίζα $y = -3$ απορρίπτεται διότι πρέπει να είναι $y \geq 0$, ενώ για $y = 4$ από την $y = x - 15$, βρίσκουμε $x = 19$. Άρα το κοινό σημείο των γραφημάτων των συναρτήσεων f, g έχει συντεταγμένες:

$$\boxed{(19, 4)}$$

Για $x = 28$ από την $y = x - 15$, βρίσκουμε:

$$y = 28 - 15 = 13$$

Άρα οι συντεταγμένες του γραφήματος της g με την ευθεία $x = 28$, είναι:

$$\boxed{(28, 13)}$$

Άρα:

$$\begin{aligned} E &= \int_{19}^{28} (x - 15 - \sqrt{x - 3}) dx = \left[\frac{x^2}{2} - 15x \right]_{19}^{28} - \int_{19}^{28} (x - 3)' (x - 3)^{1/2} dx = \\ &= 392 - 420 - 180,5 + 285 - \left[\frac{(x - 3)^{3/2}}{\frac{3}{2}} \right]_{19}^{28} = 76,5 - \frac{2}{3} (125 - 64) = \\ &= 76,5 - \frac{122}{3} = \frac{459 - 244}{6} \Rightarrow \boxed{E = \frac{215}{6} \text{ τ.μ.}} \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ
 (Εύρεση εμβαδού)

Να υπολογιστεί το εμβαδόν του φραγμένου χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες:

$$x^2 - 4y + 4 = 0 \quad \text{και} \quad x - 2y + 6 = 0$$

Να σχεδιάσετε το χωρίο.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΙΚΗ ΛΥΣΗ

Οι δεδομένες καμπύλες, εκφράζονται από τις συναρτήσεις:

$$x^2 - 4y + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4y = x^2 + 4 \quad \Leftrightarrow \quad y = f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$$

και

$$x - 2y + 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2y = x + 6 \quad \Leftrightarrow \quad y = g(x) = \frac{1}{2}x + 3$$

Τα κοινά σημεία των γραφημάτων των δυο αυτών συναρτήσεων, είναι οι λύσεις της εξίσωσης:

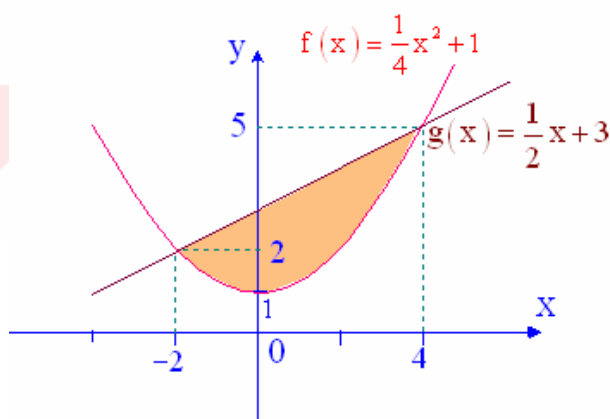
$$f(x) = g(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4}x^2 + 1 = \frac{1}{2}x + 3 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 4 = 2x + 12 \quad \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 - 2x - 8 = 0 \\ \Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 36 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

Επομένως τα κοινά σημεία των γραφημάτων των συναρτήσεων αυτών, είναι:

$$\boxed{A(4,5)} \quad \text{και} \quad \boxed{B(-2,2)}$$

όπως φαίνονται στο σχήμα:



Οπότε:

$$E = \int_{-2}^4 \left(\frac{1}{2}x + 3 - \frac{1}{4}x^2 - 1 \right) dx = \int_{-2}^4 \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 + 2 \right) dx \Rightarrow$$

$$E = \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{x^3}{3} + 2x \right]_{-2}^4 = \frac{1}{4} \cdot 8 - \frac{1}{12} \cdot 64 + 8 - \frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{1}{12} \cdot (-8) + 4 \Rightarrow$$

$$E = 2 - \frac{64}{12} + 8 - 1 - \frac{8}{12} + 4 = 13 - 6 \Rightarrow \boxed{E = 7\tau.μ.}$$

ΘΕΜΑΤΑ ΕΡΓΑΣΙΩΝ ΦΥΕ 10 (ΑΝΑΛΥΣΗΣ Ι)

ΑΣΚΗΣΗ
(Εύρεση εμβαδού)

Να υπολογιστεί το εμβαδόν του φραγμένου χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες:

$$y^2 - x = 0 \quad \text{και} \quad x + y - 2 = 0$$

Να σχεδιάσετε το χωρίο.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΙΚΗ ΛΥΣΗ

Οι δεδομένες καμπύλες, εκφράζονται από τις συναρτήσεις:

$$y^2 - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y^2 = \phi(y)$$

και

$$x + y - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 - y = g(y)$$

Τα κοινά σημεία των γραφημάτων των δυο αυτών συναρτήσεων, είναι οι λύσεις του συστήματος:

$$\left. \begin{array}{l} x = y^2 \\ x + y - 2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y^2 + y - 2 = 0 \\ \Delta = 1 - 4 \cdot (-2) = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = -2 \end{cases}$$

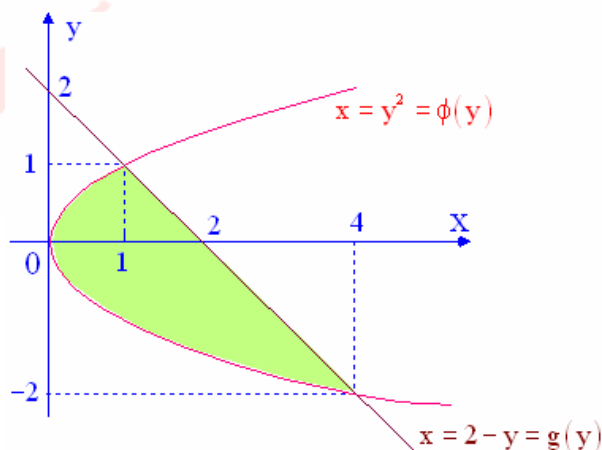
Άρα τα κοινά σημεία των γραφημάτων των δυο συναρτήσεων, είναι:

$$\boxed{A(1,1)}$$

και

$$\boxed{B(4,-2)}$$

όπως φαίνεται στο σχήμα:



Επομένως:

$$E = \int_{-2}^1 (2 - y - y^2) dy = \left[2y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_{-2}^1 = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \left(-4 - 2 + \frac{8}{3} \right) =$$
$$= 8 - 3 - \frac{1}{2} = 5 - \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{E = \frac{9}{2} \text{ τ.μ.}}$$

ΘΕΜΑΤΑ ΕΡΓΑΣΙΩΝ ΦΥΕ 10 (ΑΝΑΛΥΣΗΣ Ι)

(Εφαρμογή ορισμένου ολοκληρώματος.Υπολογισμός εμβαδού.)

Το εμβαδό του επιπέδου χωρίου που περικλείεται από τη παραβολή με εξίσωση $y = x^2$ τον ημιάξονα Ox και την εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο $(1,1)$ ισούται με:

- A) $\frac{1}{10}$ B) $\frac{1}{11}$ Γ) $\frac{1}{12}$ Δ) $\frac{1}{13}$

Υποδειγματική Λύση

$$f(x) = x^2 \rightarrow f'(x) = 2x$$

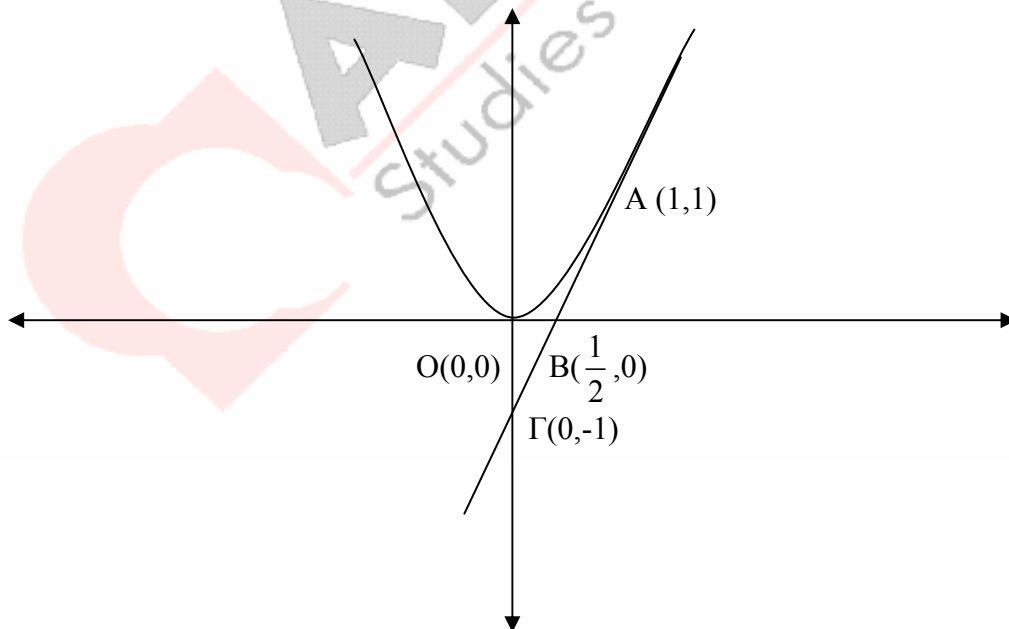
Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο $(1,1)$ (έστω ϵ) ισούται με:

$$\epsilon: y - 1 = f'(1)(x - 1) \rightarrow$$

$$\epsilon: y = 2(x - 1) + 1 \rightarrow$$

$$\epsilon: y = 2x - 1$$

Επομένως:



Ζητάμε το εμβαδό του επιπέδου χωρίου που περικλείεται από τη παραβολή με εξίσωση $y = x^2$ τον ημιάξονα Ox και την εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο $(1,1)$

Επομένως θέλουμε να υπολογίσουμε το εμβαδο $E = \int_0^1 [x^2 - (2x-1)]dx - (OBΓ)$

$$\text{Όπου } (OBΓ) = \frac{1}{2} (OB) (OG)$$

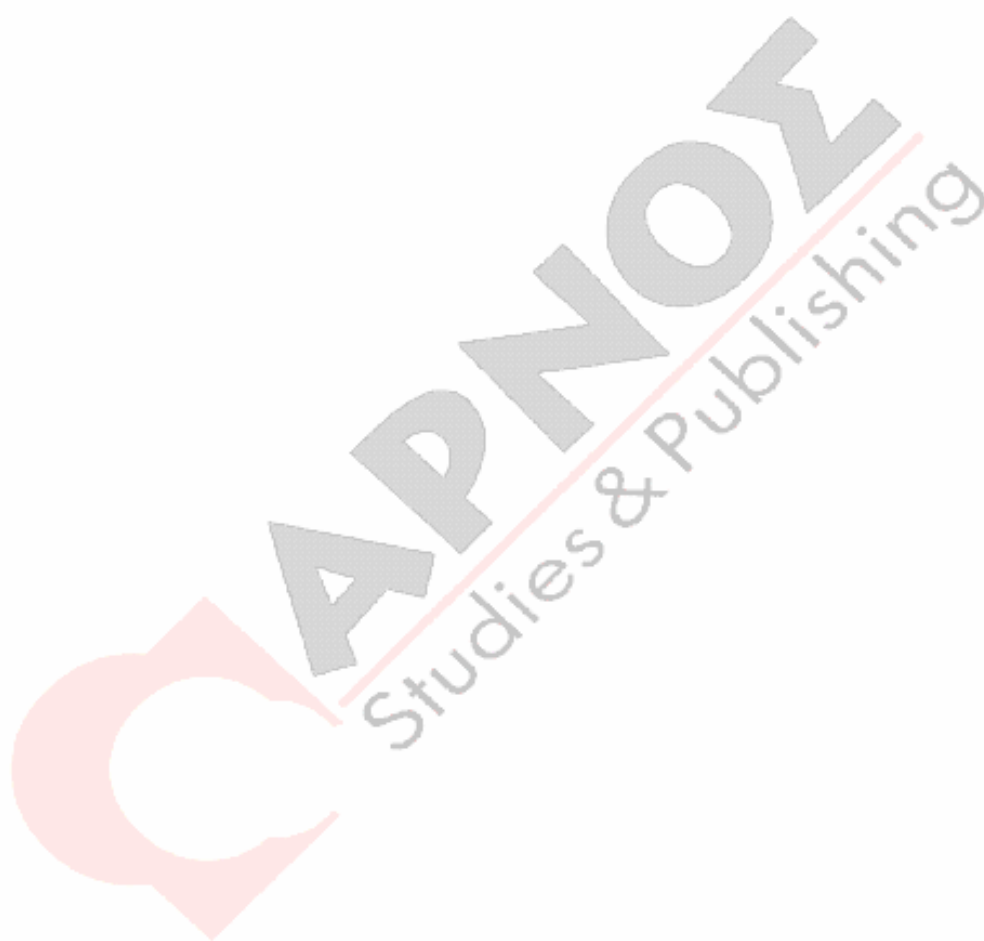
$$\int_0^1 [x^2 - (2x-1)]dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x \right]_0^1 = \frac{1}{3} \rightarrow \int_0^1 [x^2 - (2x-1)]dx = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{2} (OB) (OG) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4}$$

$$\text{Επομένως } E = \int_0^1 [x^2 - (2x-1)]dx - (OBΓ) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

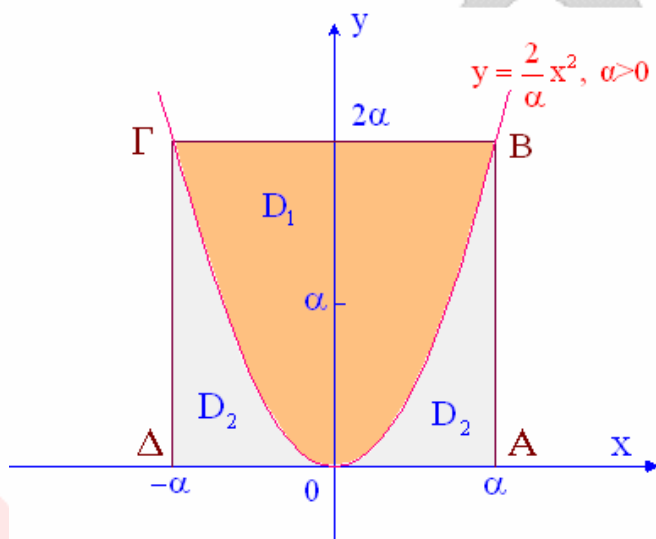
CAPNOS

Studies & Publishing



ΑΣΚΗΣΗ ΑΠΟ ΕΡΓΑΣΙΑ ΦΥΕ 10
ΕΑΠ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ 2003-2004
 (ΕΑΠ: ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΦΥΕ 10)

Δίνεται τετράγωνο με κορυφές τα σημεία $A(\alpha, 0)$, $B(\alpha, 2\alpha)$, $\Gamma(-\alpha, 2\alpha)$ και $\Delta(-\alpha, 0)$ με $\alpha > 0$ και μια (δευτεροβάθμια) παραβολή που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και τα σημεία B , Γ . Δείξτε ότι η παραβολή χωρίζει το τετράγωνο σε δυο χωρία με εμβαδά το ένα διπλάσιο του άλλου.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΙΚΗ ΛΥΣΗ


Η εξίσωση της παραβολής, έχει τη γενική μορφή:

$$c: y = \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon$$

Επειδή διέρχεται από τα σημεία:

$$O(0,0), \quad B(\alpha, 2\alpha), \quad \Gamma(-\alpha, 2\alpha)$$

έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} 0 = \varepsilon \\ 2\alpha = \gamma\alpha^2 + \alpha\delta + \varepsilon \\ 2\alpha = \gamma\alpha^2 - \alpha\delta + \varepsilon \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \varepsilon = 0 \\ \gamma\alpha + \delta = 2 \\ \gamma\alpha - \delta = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \varepsilon = 0 \\ 2\gamma\alpha = 4 \\ \delta = 2 - \gamma\alpha \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\varepsilon = 0, \quad \gamma = \frac{2}{\alpha}, \quad \delta = 0$$

Άρα η εξίσωση της παραβολής του προβλήματος, έχει τη μορφή:

$$c: y = \frac{2}{\alpha} x^2, \quad \alpha > 0$$

Επομένως έχουμε:

$$E_1 = \int_{-\alpha}^{\alpha} \left(2\alpha - \frac{2}{\alpha} x^2 \right) dx = \left[2\alpha x - \frac{2}{\alpha} \cdot \frac{x^3}{3} \right]_{-\alpha}^{\alpha} = 2\alpha^2 - \frac{2\alpha^2}{3} + 2\alpha^2 - \frac{2\alpha^2}{3} = 4\alpha^2 - \frac{4\alpha^2}{3} \Rightarrow$$

$$E_1 = \frac{8\alpha^2}{3} \text{ τ.μ.}$$

και

$$E_2 = \int_{-\alpha}^0 \frac{2}{\alpha} x^2 dx + \int_0^{\alpha} \frac{2}{\alpha} x^2 dx = \frac{2}{\alpha} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\alpha}^0 + \frac{2}{\alpha} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\alpha} = \frac{2}{\alpha} \cdot \frac{\alpha^3}{3} + \frac{2}{\alpha} \cdot \frac{\alpha^3}{3} \Rightarrow$$

$$E_2 = \frac{4\alpha^2}{3} \text{ τ.μ.}$$

Άρα:

$$E_1 = 2E_2$$

ΑΣΚΗΣΗ

(Υπολογισμός εμβαδού επιφάνειας)

Να βρεθεί το εμβαδόν των χωρίων που περικλείονται:

- α. Από την $f(x) = 4x^2 + 2$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 2$
- β. Από τις $f(x) = 2 - x^2$ και $g(x) = x^2$
- γ. Από την ευθεία $y = x + 2$ και την καμπύλη $y = x^2$
- δ. Από την $f(x) = x$ και $g(x) = \frac{x^3}{4}$ στο διάστημα $[-1, 2]$.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΙΚΗ ΛΥΣΗ

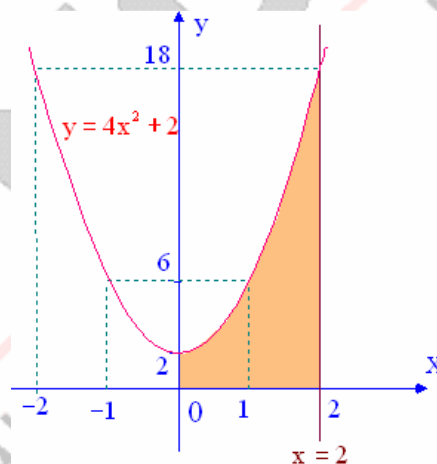
- α. Παρατηρούμε ότι είναι:

$$E = \int_0^2 (4x^2 + 2) dx =$$

$$= \left[4 \cdot \frac{x^3}{3} + 2x \right]_0^2 =$$

$$= \frac{32}{3} + 4 \Rightarrow$$

$$E = \frac{44}{3} \text{ τ.μ.}$$



- β. Τα σημεία τομής των γραφημάτων των δυο συναρτήσεων, είναι οι λύσεις της εξίσωσης:

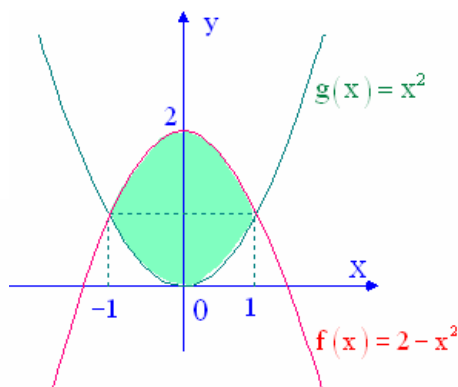
$$f(x) = g(x) \Rightarrow$$

$$2 - x^2 = x^2 \Leftrightarrow 2x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$x = \pm 1$$

Άρα:

$$\begin{aligned}
 E &= \int_{-1}^1 [f(x) - g(x)] dx = \\
 &= \int_{-1}^1 (2 - x^2 - x^2) dx = \\
 &= \left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = 2 - \frac{2}{3} + 2 - \frac{2}{3} = 4 - \frac{4}{3} \\
 &\Rightarrow \boxed{E = \frac{8}{3} \text{ τ.μ}}
 \end{aligned}$$



γ. Τα κοινά σημεία της ευθείας με την παραβολή, είναι οι λύσεις του συστήματος:

$$\left. \begin{array}{l} y = x + 2 \\ y = x^2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} y = x + 2 \\ x^2 = x + 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x^2 - x - 2 = 0 \\ y = x + 2 \end{array} \right\} \quad (1)$$

Για το τριώνυμο, έχουμε $\Delta = 1 + 8 = 9 > 0$, επομένως οι ρίζες του είναι:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

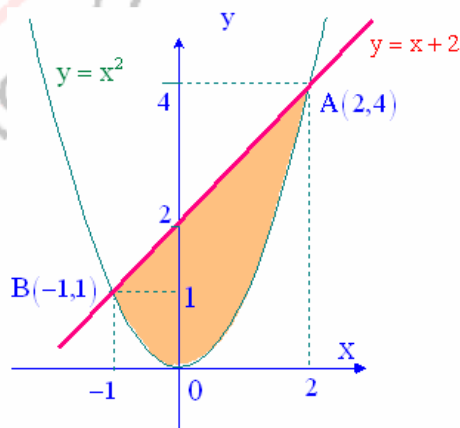
Επομένως ισοδύναμα του συστήματος (1), έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} x = 2 \\ y = x + 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 4 \end{array}} \quad \text{ή}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = -1 \\ y = x + 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = -1 \\ y = 1 \end{array}}$$

Άρα τα κοινά σημεία των γραφημάτων των δυο συναρτήσεων, είναι:

$$\boxed{A(2,4)} \quad \text{και} \quad \boxed{B(-1,1)}$$



Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι:

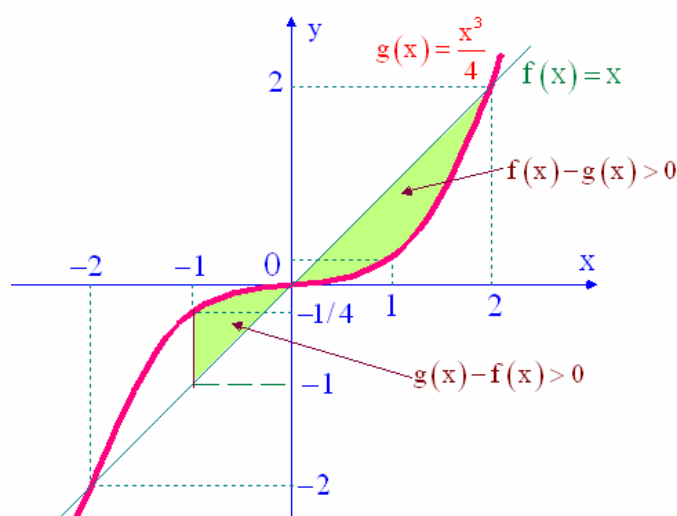
$$E = \int_{-1}^2 (x + 2 - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 = 2 + 4 - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$E = \frac{9}{2} \tau.μ.$$

δ. Παρατηρούμε ότι:

$$f(x) - g(x) = x - \frac{x^3}{4} = x \left(1 - \frac{x^2}{4} \right) = x \cdot \frac{4 - x^2}{4} \Rightarrow$$

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{4} x (2 - x)(2 + x) \quad (1)$$



Τα κοινά σημεία των γραφημάτων των δυο συναρτήσεων, είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{1}{4} x (2 - x)(2 + x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

Συγχρόνως από την (1), με την βοήθεια του πίνακα που ακολουθεί, προσδιορίζουμε το πρόσημο της διαφοράς $f(x) - g(x)$, στα διαστήματα που μας ενδιαφέρουν και τα οποία είναι:

$$[-1, 0] \text{ και } [0, 2]$$

X	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$	
$f(x)-g(x)$		+	0	-	0	+	0	-

Συνέπεια των προηγούμενων παρατηρήσεων, έχουμε:

$$E = \int_{-1}^0 [g(x) - f(x)] dx + \int_0^2 [f(x) - g(x)] dx = \int_{-1}^0 \left(\frac{x^3}{4} - x \right) dx + \int_0^2 \left(x - \frac{x^3}{4} \right) dx \Rightarrow$$

$$E = \left[\frac{x^4}{16} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{16} \right]_0^2 = -\frac{1}{16} + \frac{1}{2} + 2 - 1 = 1 + \frac{7}{16} \Rightarrow$$

$$E = \frac{23}{16} \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΦΥΕ 14 (ΑΝΑΛΥΣΗΣ Ι)

ΑΣΚΗΣΗ

(Ορισμένο ολοκλήρωμα, υπολογισμός εμβαδού επιφάνειας)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^2 + \beta$ με $a, \beta \in \mathbb{R}$.

- α.** Να προσδιοριστούν τα a, β ώστε $\int_0^1 f(x) dx = \frac{7}{3}$ και $\int_1^2 f(x) dx = \frac{31}{3}$
- β.** Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου, που ορίζεται από τον άξονα των x , την καμπύλη $f(x)$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 2$.
Σε κάθε περίπτωση να κάνετε πρόχειρα τις γραφικές παραστάσεις.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΙΚΗ ΛΥΣΗ

- α.**
- Παρατηρούμε ότι:

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{7}{3} \Rightarrow \int_0^1 (ax^2 + \beta) dx \Leftrightarrow \left[\alpha \frac{x^3}{3} + \beta x \right]_0^1 = \frac{7}{3} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha}{3} + \beta = \frac{7}{3} \Leftrightarrow \boxed{\beta = \frac{7}{3} - \frac{\alpha}{3}} \quad (1)$$

και

$$\int_1^2 f(x) dx = \frac{31}{3} \Rightarrow \int_1^2 (ax^2 + \beta) dx = \frac{31}{3} \Leftrightarrow$$

$$\left[\alpha \frac{x^3}{3} + \beta x \right]_1^2 = \frac{31}{3} \Rightarrow \frac{8\alpha}{3} + 2\beta - \frac{\alpha}{3} - \beta = \frac{31}{3} \Leftrightarrow$$

$$\frac{7\alpha}{3} + \beta = \frac{31}{3} \xrightarrow{(1)} \frac{7\alpha}{3} + \frac{7}{3} - \frac{\alpha}{3} = \frac{31}{3} \Leftrightarrow$$

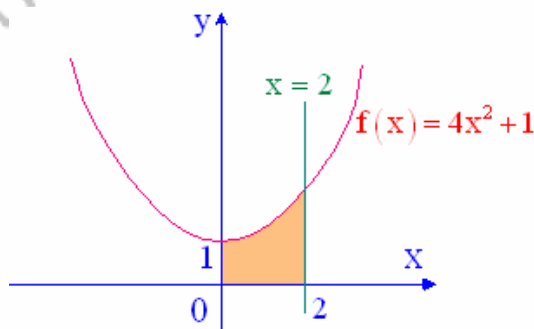
$$2\alpha = 8 \Leftrightarrow$$

$\boxed{\alpha = 4}$

και $\boxed{\beta = 1}$

Επομένως η συνάρτηση έχει τελικά τον τύπο:

$$f(x) = 4x^2 + 1$$



- β.**
- Παρατηρούμε ότι:

$$E = \int_0^2 (4x^2 + 1) dx = \left[4 \cdot \frac{x^3}{3} + x \right]_0^2 = \frac{32}{3} + 2 \Rightarrow$$

$$\boxed{E = \frac{38}{3} \text{ τ.μ.}}$$

ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΦΥΕ 14 (ΑΝΑΛΥΣΗΣ Ι)

ΑΡΝΟΣ
Studies & Publishing

ΘΕΜΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ
 (ΕΑΠ: ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΦΥΕ 14)

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x + 4}$$

- α. Να μελετήσετε την $f(x)$ και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.
- β. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_3^5 f(x) dx$ και να χρωματίσετε το αντίστοιχο εμβαδόν στη γραφική παράσταση της $f(x)$.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΙΚΗ ΛΥΣΗ

α.



Πεδίο ορισμού

Είναι:

$$A = \mathbb{R}$$

αφού: $x^2 - 2x + 4 \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\Delta = 4 - 16 = -12 < 0)$



Συνέχεια

Η f είναι συνεχής ως ρητή.



Άρτια – Περιττή

Παρατηρούμε ότι:

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 - 2(-x) + 4} = \frac{-x}{x^2 + 2x + 4} \neq f(x) \quad \text{και} \quad f(-x) \neq -f(x)$$

Επομένως η f δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.



Σημεία τομής με άξονες



Για $x = 0 \Rightarrow y = f(0) = 0 \Rightarrow O(0,0)$



Για $y = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x}{x^2 - 2x + 4} = 0 \Rightarrow$

$x = 0$



Ασύμπτωτες



Κατακόρυφες

Η f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.



Πλάγιες – Οριζόντιες

Παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x(x^2 - 2x + 4)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^2 - 2x + 4} = 0 = \alpha$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - \alpha x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2 - 2x + 4} = 0 = \beta$$

Η $y = \alpha x + \beta \Rightarrow \boxed{y = 0}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f .



Μονοτονία – Ακρότατα – Σημεία καμπής

Η πρώτη παράγωγος της $f(x)$ είναι:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x}{x^2 - 2x + 4} \right)' = \frac{(x)'(x^2 - 2x + 4) - x(x^2 - 2x + 4)'}{(x^2 - 2x + 4)^2} = \\ &= \frac{x^2 - 2x + 4 - x(2x - 2)}{(x^2 - 2x + 4)^2} = \frac{x^2 - 2x + 4 - 2x^2 + 2x}{(x^2 - 2x + 4)^2} = \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{4 - x^2}{(x^2 - 2x + 4)^2}}$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Rightarrow \frac{4 - x^2}{(x^2 - 2x + 4)^2} = 0 \Rightarrow 4 - x^2 = 0 \Rightarrow \\ &x^2 = 4 \Rightarrow \boxed{x = \pm 2} \end{aligned}$$

Η δεύτερη παράγωγος της $f(x)$ είναι:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left[\frac{4 - x^2}{(x^2 - 2x + 4)^2} \right]' = \\ &= \frac{(4 - x^2)'(x^2 - 2x + 4)^2 - (4 - x^2)[(x^2 - 2x + 4)^2]'}{(x^2 - 2x + 4)^4} = \\ &= \frac{-2x(x^2 - 2x + 4)^2 - (4 - x^2) \cdot 2 \cdot (x^2 - 2x + 4)(x^2 - 2x + 4)'}{(x^2 - 2x + 4)^4} = \\ &= \frac{-2x(x^2 - 2x + 4) - (8 - 2x^2)(2x - 2)}{(x^2 - 2x + 4)^3} = \end{aligned}$$

$$= \frac{-2x^3 + 4x^2 - 8x - 16x + 16 + 4x^3 - 4x^2}{(x^2 - 2x + 4)^3} = \frac{2x^3 - 24x + 16}{(x^2 - 2x + 4)^3} \Rightarrow$$

$$f''(x) = \frac{2(x^3 - 12x + 8)}{(x^2 - 2x + 4)^3}$$

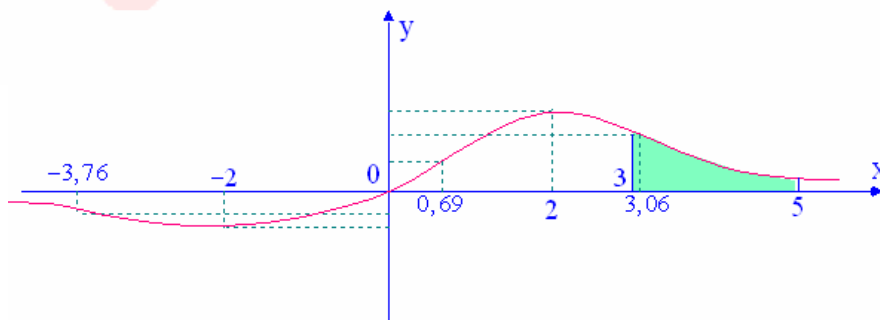
Έχουμε:

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{2(x^3 - 12x + 8)}{(x^2 - 2x + 4)^3} = 0 \Rightarrow x^3 - 12x + 8 = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} x &\approx 0,69 \\ x &\approx 3,06 \\ x &\approx -3,76 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-3,76	-2	0,69	2	3,06	$+\infty$
f'	-	-	0	+	+	0	-
f''	-	0	+	+	0	-	+
f							
		σ.κ.	min	σ.κ.	max	σ.κ.	

- ✿ Η f παρουσιάζει στο $x_0 = -2$ τοπικό ελάχιστο το $f(-2) = -\frac{1}{6}$
- ✿ Η f παρουσιάζει στο $x_0 = 2$ τοπικό μέγιστο το $f(2) = \frac{1}{2}$
- ✿ Η f παρουσιάζει στο $x_0 = -3,76$ σημείο καμπής το $f(-3,76) \approx -0,15$
- ✿ Η f παρουσιάζει στο $x_0 = 0,69$ σημείο καμπής το $f(0,69) \approx 0,22$
- ✿ Η f παρουσιάζει στο $x_0 = 3,06$ σημείο καμπής το $f(3,06) \approx 0,42$



β. Για $x \in [3, 5]$, είναι $f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x + 4} > 0$ άρα το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_3^5 f(x) dx$$

αντιστοιχεί στο εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από την $f(x)$, του άξονα x και τις ευθείες $x = 3$ και $x = 5$. Είναι:

$$I = \int_3^5 \frac{x}{x^2 - 2x + 4} dx$$

Θέτουμε:

$$x = t - \frac{-2}{2} = t + 1 \Rightarrow x = t + 1, (x)' dx = (t + 1)' dt \Rightarrow dx = dt$$

★ Για $x = 3$, $t = 3 - 1 = 2$

★ Για $x = 5$, $t = 5 - 1 = 4$

Άρα:

$$\begin{aligned} I &= \int_2^4 \frac{t+1}{(t+1)^2 - 2(t+1) + 4} dt = \int_2^4 \frac{t+1}{t^2 + 2t + 1 - 2t - 2 + 4} dt = \\ &= \int_2^4 \frac{t+1}{t^2 + 3} dt = \int_2^4 \frac{t}{t^2 + 3} dt + \int_2^4 \frac{1}{t^2 + 3} dt = \frac{1}{2} \int_2^4 \frac{2t}{t^2 + 3} dt + \int_2^4 \frac{dt}{t^2 + (\sqrt{3})^2} = \\ &= \frac{1}{2} \left[\ln(t^2 + 3) \right]_2^4 + \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\arctan \frac{t}{\sqrt{3}} \right]_2^4 = \\ &= \frac{1}{2} (\ln 19 - \ln 7) + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\arctan \frac{4}{\sqrt{3}} - \arctan \frac{2}{\sqrt{3}} \right) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$I = \frac{1}{2} \ln \frac{19}{7} + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\arctan \frac{4}{\sqrt{3}} - \arctan \frac{2}{\sqrt{3}} \right)$$

ΑΣΚΗΣΗ
 (ΕΑΠ: ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ (ΦΥΕ 10))

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση:

$$f(x) = \int_0^x \frac{e^t}{1+t^2} dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του επιπέδου χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $g(x) = e^{-x}f(x)$, τον άξονα $x'Ox$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$ (θεωρώντας γνωστή την τιμή $f(1)$).

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΙΚΗ ΛΥΣΗ

α.

ΓΕΝΙΚΑ

Γνωρίζουμε ότι για την ολοκληρώσιμη συνάρτηση f στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ ορίζονται οι συναρτήσεις:

$$F(x) = \int_{\alpha}^x f(t) dt \quad \text{ή} \quad G(x) = \int_x^{\beta} f(t) dt$$

που είναι συνεχείς σ' αυτό το διάστημα.

Αν για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ η f είναι συνεχής, τότε οι πιο πάνω συναρτήσεις παραγωγίζονται και ισχύει:

$$F'(x) = f(x) \quad \text{ή} \quad G'(x) = -f(x)$$

Επομένως η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης:

$$f(x) = \int_0^x \frac{e^t}{1+t^2} dt$$

είναι:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{e^t}{1+t^2} dt = \frac{e^x}{1+x^2}$$

Αφού $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η f είναι γνησίως αύξουσα. Προκειμένου να μελετήσουμε τη συνάρτηση ως προς την κυρτότητα, υπολογίζουμε τη δεύτερη παράγωγο:

$$f''(x) = \left(\frac{e^x}{1+x^2} \right)' = \frac{(e^x)'(1+x^2) - e^x(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = \frac{e^x(1+x^2) - e^x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{e^x(1+x^2-2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{e^x(x-1)^2}{(1+x^2)^2}$$

Αφού $f''(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η f στρέφει τα κοίλα πάνω.

β. Αποδείξαμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, επομένως:
για $x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(0) \Rightarrow f(x) \geq 0$

Άρα:

$$g(x) = e^{-x}f(x) \geq 0 \quad \text{για} \quad x \in [0,1]$$

Έχουμε:

$$E = \int_0^1 e^{-x}f(x)dx = \int_0^1 (-e^{-x})' f(x)dx = [-e^{-x}f(x)]_0^1 - \int_0^1 (-e^{-x})f'(x)dx =$$

$$= -e^{-1}f(1) + f(0) + \int_0^1 e^{-x} \frac{e^x}{1+x^2} dx = -e^{-1}f(1) + \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx =$$

$$= -e^{-1}f(1) + [\arctan x]_0^1 = -e^{-1}f(1) + \arctan 1 - \arctan 0 \Rightarrow$$

$$E = \frac{\pi}{4} - e^{-1}f(1)$$

ΑΕΙ:ΕΚΠΑ ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ-ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
 (Εξετάση πολυωνυμικής συνάρτησης ως προς το αν αντιστρέφεται και υπολογισμός
 εμβαδού που περικλείετε από συνάρτηση και την αντίστροφή της)

Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = x^5 - 2x^3 + 2x, \text{ όπου } x \in \mathbb{R}.$$

(α) Να αποδειχτεί ότι η $f(x)$ αντιστρέφεται

(β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις f και f^{-1} .

Υποδειγματική Λύση

(α) Θα αποδείξουμε ότι η $f(x)$ αντιστρέφεται. Για να αντιστρέφεται μια συνάρτηση θα πρέπει να είναι συνεχής και γνησίως μονότονη. Η $f(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση ως πολυωνυμική. Για να εξετάσουμε αν είναι γνησίως μονότονη βρίσκουμε πρώτα τη παράγωγο της $f(x)$. Είναι:

$$f'(x) = 5x^4 - 6x^2 + 2$$

Για να εξετάσω τη μονοτονία της συνάρτησης $f(x)$ πρέπει να εξετάσω το πρόσημο της παραγώγου της. Υπολογίζω επομένως τη διακρίνουσα του τριωνύμου $5x^4 - 6x^2 + 2 = 0$. Είναι :

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 2 = 36 - 40 = -4$$

Δηλαδή το τριώνυμο $5x^4 - 6x^2 + 2$ έχει αρνητική διακρίνουσα και επομένως $5x^4 - 6x^2 + 2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δηλαδή :

$$f'(x) > 0$$

Επομένως η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δείξαμε επομένως ότι $f(x)$ συνεχής συνάρτηση ως πολυωνυμική και ότι $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα και επομένως ότι η $f(x)$ αντιστρέφεται.

(β) Θέλουμε να βρούμε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις f και f^{-1} . Επειδή από (α) δείξαμε ότι η $f(x)$ αντιστρέφεται θα είναι :

$$f^{-1}(y) = x$$

Επομένως θέλουμε να βρούμε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις $f(x) = x^5 - 2x^3 + 2x$ και $g(x) = x$.

Βρίσκουμε πρώτα τα κοινά τους σημεία λύνοντας το σύστημα :

$$\left. \begin{array}{l} y = x \\ y = x^5 - 2x^3 + 2x \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = x \\ x = x^5 - 2x^3 + 2x \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = x \\ x(x^4 - 2x^2 + 1) = 0 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = x \\ x = 0 \\ x^4 - 2x^2 + 1 = 0 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = x \\ x = 0 \\ (x^2 - 1)^2 = 0 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = x \\ x = 0 \\ (x-1)^2(x+1)^2 = 0 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = x \\ x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{array} \right\}$$

Δηλαδή τα κοινά τους σημεία είναι τα :

$$\left. \begin{array}{l} (x, y) = (-1, 0) \\ (x, y) = (0, 0) \\ (x, y) = (1, 0) \end{array} \right\}$$

ακόμα για τη συνάρτηση $h(x) = x^5 - 2x^3 + x$ η οποία έχει ρίζες τις $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ έχουμε ότι :

$$E = \int_0^1 (x^5 - 2x^3 + x) dx - \int_{-1}^0 (x^5 - 2x^3 + x) dx$$

$$E = \left[\frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 - \left[\frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^2 \right]_{-1}^0$$

$$E = \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 0\right) - \left(0 - \frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \rightarrow$$

$$\boxed{E = \frac{1}{3}}$$

ΑΡΝΟΣ
Studies & Publishing

ΑΣΚΗΣΗ ΑΠΟ ΕΡΓΑΣΙΑ ΦΥΕ 10
ΕΑΠ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ 2003-2004
 (ΕΑΠ: ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΦΥΕ 10)

Να υπολογιστεί το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται από το γράφημα της συνάρτησης:

$$y = f(x) = 4 - x^2$$

τον άξονα $x'Ox$ και τις εφαπτόμενες της f στα σημεία $x_0 = 1$ και $x_1 = -1$.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΙΚΗ ΛΥΣΗ

Παρατηρούμε ότι:

$$y = f(x) = 4 - x^2 \Leftrightarrow x^2 = 4 - y \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4 - y}$$

$$x_0 = 1, \quad f(1) = 3 \quad \text{και} \quad x_1 = -1, \quad f(-1) = 3$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο γράφημα μιας συνάρτησης f σε σημείο x_0 , είναι:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Είναι:

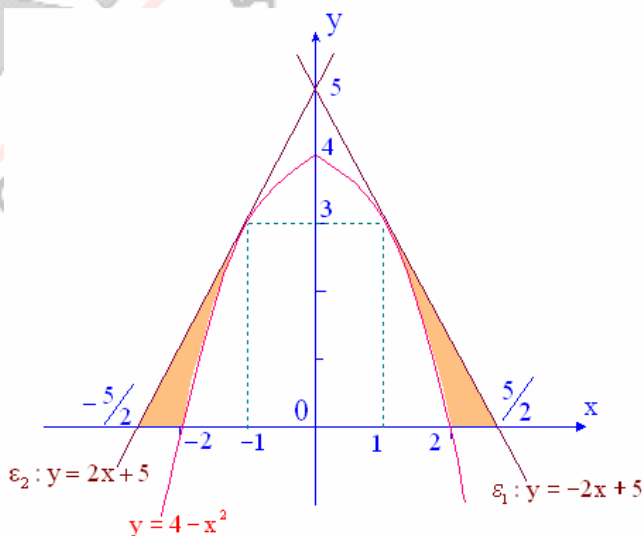
$$f'(x) = -2x.$$

Οι εφαπτόμενες στο γράφημα της συνάρτησης, βρίσκονται ως εξής:

★ Στο σημείο $x_0 = 1$, έχουμε $f'(1) = -2$. Άρα:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1: \quad y - 3 &= -2(x - 1) \Leftrightarrow \\ y - 3 &= -2x + 2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y = -2x + 5}$$



★ Στο σημείο $x_1 = -1$, έχουμε $f'(-1) = 2$. Άρα:

$$\varepsilon_2: y - 3 = 2(x + 1) \Leftrightarrow y - 3 = 2x + 2 \Leftrightarrow \boxed{y = 2x + 5}$$

Επομένως:

$$E = 2 \int_0^3 \left(\frac{5}{2} - \frac{y}{2} - \sqrt{4-y} \right) dy = 2 \left[\frac{5y}{2} - \frac{y^2}{4} + \frac{2}{3} (4-y)^{\frac{3}{2}} \right]_0^3 =$$
$$= 2 \left(\frac{15}{2} - \frac{9}{4} + \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cdot 8 \right) = 2 \left(\frac{21}{4} + \frac{2}{3} - \frac{16}{3} \right) = \frac{21}{2} - \frac{28}{3} = \frac{63-56}{6} \Rightarrow$$

$$E = \frac{7}{6} \text{ τ.μ.}$$