Εξισώσεις

› Σε πολλά προβλήματα ζητείται να υπολογίσουμε ένα μέγεθος.

π.χ. «Αν στο διπλάσιο ενός αριθμού προσθέσουμε 12, τότε βρίσκουμε το τριπλάσιο του αριθμού αυτού. Ποιος είναι αυτός ο αριθμός;»

Τέτοιου είδους προβλήματα λύνονται και με τη χρήση εξισώσεων. Στο παραπάνω παράδειγμα, αν ονομάσουμε με x τον αριθμό, τότε τα δεδομένα του προβλήματος μας δίνουν ότι:

$$2x + 12 = 3x$$

Η τελευταία σχέση είναι μία **εξίσωση με άγνωστο το x**.

Να σημειώσουμε ότι πολλές φορές αντί για x, χρησιμοποιούμε για τον άγνωστο ένα άλλο γράμμα της ελληνικής γλώσσας. Αυτό συμβαίνει όταν τον άγνωστο μάς τον δίνουν με άλλο σύμβολο.

π.χ. «Ποιος είναι ο αριθμός α, ώστε στα δύο κουτιά να έχουμε το ίδιο άθροισμα»;

Εδώ, η εξίσωση που σχηματίζεται είναι η:

$$\alpha + 5 = 8 + 4$$

και άγνωστος είναι το α.

Αντίστροφος αριθμού

Ο αντίστροφος ενός αριθμού είναι ένας άλλος αριθμός τέτοιος ώστε το γινόμενό του με τον αρχικό αριθμό, να ισούται με 1. Δηλαδή, ο αντίστροφος του αριθμού α είναι ο αριθμός x, ώστε:

$$\alpha \cdot x = 1$$

Πρόσεξε ότι στην σχέση $\alpha \cdot x = 1$ το α είναι γνωστός αριθμός, ενώ το x είναι ο άγνωστος.

Η λύση της εξίσωσης $\alpha \cdot x = 1$, είναι η: $x = \frac{1}{\alpha}$.

π.χ. Ο αντίστροφος του $\frac{4}{3}$*, είναι ο:* $\dfrac{1}{\frac{4}{3}} = \dfrac{\frac{1}{1}}{\frac{4}{3}} = \dfrac{3}{4}$

Θυμήσου: Επειδή το 1/0 δεν ορίζεται, το 0 είναι ο **μοναδικός** αριθμός που δεν έχει αντίστροφο.

6

Παρακάτω συγκεντρώνουμε κάποιες βασικές εξισώσεις με έναν άγνωστο στις οποίες βρίσκουμε τη λύση εύκολα και γρήγορα:

Εξίσωση	Ενέργεια	Λύση
1) $x + \alpha = \beta$	$x + \alpha - \alpha = \beta - \alpha$ *Αφαιρούμε το α και από τα δύο μέλη*	**$x = \beta - \alpha$**
2) $x - \alpha = \beta$	$x - \alpha + \alpha = \beta + \alpha$ *Προσθέτουμε το α και στα δύο μέλη*	**$x = \beta + \alpha$**
3) $\alpha - x = \beta$	$\alpha - x + x = \beta + x$ *Προσθέτουμε το x και στα δύο μέλη, οπότε έχουμε β + x = α (περίπτωση 1)*	**$x = \alpha - \beta$**
4) $\alpha \cdot x = \beta$	$\frac{\alpha \cdot x}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha}$ *Διαιρούμε με το **α** και τα δύο μέλη*	**$x = \beta : \alpha$**
5) $x : \alpha = \beta$	$\left(\frac{x}{\alpha}\right) \cdot \alpha = \beta \cdot \alpha$ *Πολλαπλασιάζουμε με το **α** και τα δύο μέλη*	**$x = \beta \cdot \alpha$**
6) $\alpha : x = \beta$	$\frac{\alpha}{x} = \beta$ άρα $\beta \cdot x = \alpha$ *Κάνουμε χιαστί και προκύπτει η περίπτωση 4*	**$x = \alpha : \beta$**

Στον παραπάνω πίνακα, χρησιμοποιήσαμε το γράμμα **x** για να δηλώσουμε τον άγνωστο της εξίσωσης και τα γράμματα **α** και **β** για να δηλώσουμε τους γνωστούς, όπως φαίνεται και στα επόμενα παραδείγματα:

Παραδείγματα:

Εξίσωση	Ενέργεια	Λύση
1) x + 3 = 14	$x + 3 - 3 = 14 - 3$ *Αφαιρούμε το **3** και από τα δύο μέλη*	**x = 14 – 3 = 11**
2) x – 6 = 20	$x - 6 + 6 = 20 + 6$ *Προσθέτουμε το 6 και στα δύο μέλη*	**x =20 + 6 =26**
3) 7,5 – x = 4,1	$7{,}5 - x + x = 4{,}1 + x$ *Προσθέτουμε το **x** και στα δύο μέλη, οπότε έχουμε 4,1 + x = 7,5 (περίπτωση 1)*	**x = 7,5 – 4,1 = 3,4**
4) 4 • x = 3	$\frac{4 \cdot x}{4} = \frac{3}{4}$ *Διαιρούμε με το **4** και τα δύο μέλη*	$\mathbf{x = 3 : 4 = \frac{3}{4}}$
5) x: 2 = 10	$\left(\frac{x}{2}\right) \cdot 2 = 10 \cdot 2$ *Πολλαπλασιάζουμε με το **2** και τα δύο μέλη*	**x = 10 • 2 =20**
6) 11: x = 7	$\frac{11}{x} = 7$ άρα $7 \cdot x = 11$ *Κάνουμε χιαστί και προκύπτει η περίπτωση 4*	$\mathbf{x = 11 : 7 = \frac{11}{7}}$

Να σημειώσουμε ότι εάν υπάρχουν μεικτές αριθμητικές παραστάσεις, τότε λειτουργούμε σύμφωνα με τον Κανόνα Προτεραιότητας των Πράξεων.

ΣΧΟΛΙΟ

1. $+\alpha - \alpha = 0$ π.χ. $+5 - 5 = 0$, $+30 - 30 = 0$, $+7 - 7 = 0$

   $+x - x = 0$

   $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha} = 1$ π.χ. $3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$, $6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$

2. Είτε γράψουμε $\alpha = \beta + x$ ή $\beta + x = \alpha$ είναι το ίδιο.
3. Σε μία ισότητα Α = Β, μπορούμε να κάνουμε πρόσθεση, αφαίρεση και πολλαπλασιασμό με τον ΙΔΙΟ αριθμό και στα δύο μέλη της ισότητας χωρίς να «διαταραχθεί» η ισορροπία. Εξαιρείται το μηδέν στη διαίρεση.

Θέματα Εξετάσεων & Προσομοιώσεις

6.1. Ζυγαριές

ΘΕΜΑ 1

Στο διπλανό σχήμα η ζυγαριά ισορροπεί. Αν το βάρος της πράσινης μπάλας είναι 300 γραμμάρια, πόσο είναι το βάρος της κόκκινης μπάλας;

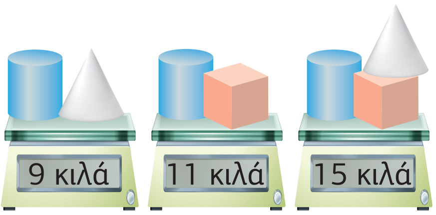
ΘΕΜΑ 2

Δίπλα φαίνονται τα αποτελέσματα τριών ζυγίσεων. Να βρεις πόσα κιλά ζυγίζει το κάθε αντικείμενο:

κύλινδρος: ______________________

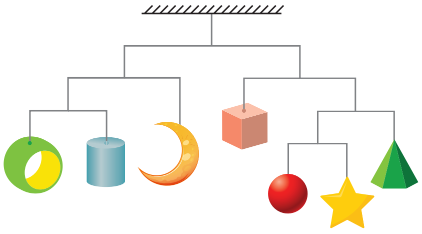
κύβος: ______________________

κώνος: ______________________



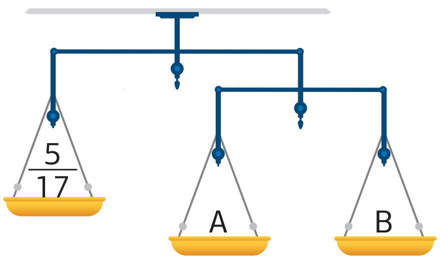
ΘΕΜΑ 3

Το κρεμαστό αντικείμενο, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, βρίσκεται σε ισορροπία. Το βάρος του σπάγκου και οι οριζόντιες ράβδοι δε λαμβάνονται υπόψη στο συνολικό βάρος. Το συνολικό του βάρος είναι 112 γραμμάρια. Πόσο ζυγίζει το αστέρι;



ΘΕΜΑ 4

Στο αριστερό μέρος της κεντρικής ράβδου ενός πολύζυγου έχει τοποθετηθεί ένα βάρος ίσο με τα 5/17 του κιλού. Στο δεξιό μέρος είναι τοποθετημένος άλλος ένας ζυγός με δύο βάρη, αριστερά Α και δεξιά Β. Τι μέρη του κιλού πρέπει να είναι τα βάρη Α και Β ώστε να ισορροπούν και οι δύο ζυγοί;



ΘΕΜΑ 5

Παρατήρησε προσεκτικά τη διπλανή ζυγαριά. Το βάρος του κύβου είναι μικρότερο, μεγαλύτερο ή ίσο με 22 γραμμάρια;