ΘΕΜΑΤΑ ΦΥΕ -40 -Κβαντική
Θέματα Ενδιάμεσων 2022

Επιμέλεια : Β. Καράβολας

1 Θέμα Πρώτο

1.1 Ερώτηση 1η

Εκφωνηση :Σωματίδιο μάζας m βρίσκεται σε απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού που εκτείνεται στην περιοχή $-L < x < +L$ σε κατάσταση που περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση $\psi(x) = C[\psi_1(x) + (\sqrt{2}+i)\psi_2(x)]$. Σε μετρήσεις της ενέργειας ποια θα είναι κατά προσέγγιση η μέση τιμή (σε σύστημα μονάδων με $\hbar = m = L = 1$)

1. 16.04
2. 6.17
3. 24.67
4. 64.15
5. 0

.

Λυση :
Η ενέργεια κάθε κατάστασης με κβαντικό αριθμό n στο πηγάδι δυναμικού δίνεται από

$$\begin{bmatrix} E_n = \dfrac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2ma^2} \\ a = 2L \\ \hbar = m = L = 1 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow E_n = \frac{\pi^2 n^2}{8}$$

καθώς το πλάτος του πηγαδιού είναι $2L$.

Απο κανονικοποίηση έχουμε ότι:

$$\begin{bmatrix} <\psi|\psi>= 1 \\ \psi(x) = C[\psi_1(x) + (\sqrt{2}+i)\psi_2(x)] \\ \psi^*(x) = C^*[\psi_1(x) + (\sqrt{2}-i)\psi_2(x)] \\ <\psi_n(x)|\psi_m(x)>= \delta_{nm} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow 1 = C^2[1^2 + (\sqrt{2}+i)(\sqrt{2}-i)] = 4C^2 \Longleftrightarrow C = \frac{1}{\sqrt{4}}$$

Η μέση τιμή ενός μεγέθους το οποίο έχει διακριτές ιδιοτιμές είναι:

$$< A >= \sum_{i=1,n} a_i^* \lambda_i a_i$$

όπου λ_i είναι η ιδιοτιμή της ιδιοκατάστασης i. Όμως για την ενέργεια γνωρίσουμε ότι:

$$\hat{H}\psi_n = E_n \psi_n$$

Στην περίπτωση μας

$$\begin{bmatrix} \psi(x) = C[\psi_1(x) + (\sqrt{2}+i)\psi_2(x)] \\ C = \dfrac{1}{\sqrt{4}} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} a_1 = \dfrac{1}{\sqrt{4}} \\ a_2 = \dfrac{1}{\sqrt{4}}(\sqrt{2}+i) \end{bmatrix}$$

Επομένως η μέση τιμή της ενέργειας θα είναι:

$$\begin{bmatrix} < E >= \sum_{i=1,2} a_i^* E_i a_i \\ E_1 = \dfrac{\pi^2}{8} \\ E_2 = \dfrac{\pi^2}{2} \\ a_1 = \dfrac{1}{\sqrt{4}} \\ a_2 = \dfrac{1}{\sqrt{4}}(\sqrt{2}+i) \end{bmatrix} \Longleftrightarrow < E >= \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}(\sqrt{2}+i)(\sqrt{2}-i)\frac{\pi^2}{2} \Longleftrightarrow$$

$$< E >= \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{8} + \frac{3}{4}\frac{\pi^2}{2} = 4.0095$$

Δεν υπάρχει **καμία σωστή απάντηση σε αυτές που μας δίνεται.**

Οι ενδεικτικές λύσεις του ΕΑΠ δίνουν ως σωστή απάντηση την α). Καθώς αυτή είναι 4 φορές μεγαλύτερη από την απάντηση που βρήκαμε θα μπορούσε να είναι η σωστή αν το πηγάδι ήταν $-L/2 < x < +L/2$

Επομένως σωστή απάντηση είναι η (α)

1.2 Ερώτηση 2η

Εκφωνηση :Αρμονικός ταλαντωτής συχνότητας ω περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση $\psi = A(3\psi_0 + 4\psi_1)$, όπου $\psi_n, n = 0, 1, 2, ...$, οι ιδιοκαταστάσεις της ενέργειας. Μετράμε την πάριτη και τη βρίσκουμε -1. Κατόπιν μετράμε την ενέργεια. Ποιες οι δυνατές τιμές της μέτρησης;

1. Μόνο η $\frac{3\hbar\omega}{2}$

2. Μόνο η $\frac{57\hbar\omega}{50}$

3. Μόνο η $\frac{1\hbar\omega}{2}$

4. Μία από τις $\frac{3\hbar\omega}{2}, \frac{\hbar\omega}{2}$

5. Καμία από αυτές.

.

Λυση :

Η ψ_0 είναι άρτια ενώ η ψ_1 είναι περιττή. Η τιμή της πάριτυ της οποία βρήκαμε (-1) σημαίνει ότι μετρήσαμε περιττή κυματοσυνάρτηση επομένως μετρήσαμε την ψ_1. Η μέτρηση κατέστρεψε τον γραμμικό συνδυασμό των κυματοσυναρτήσεων και το σύστημα πια βρίσκεται στην κατάσταση με $n = 1$. Η ενέργεια που συνδέεται με την ψ_1 είναι η $E_1 = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}) \overset{n=1}{=} \frac{3\hbar\omega}{2}$

Επομένως σωστή απάντηση είναι η (α)

1.3 Ερώτηση 3η

Εκφωνηση :Τα φυσικά μεγέθη που περιγράφονται από τους τελεστές $\hat{A}$ και $\hat{B}$ είναι συμβιβαστά. Αυτό γενικά συμβαίνει όταν:

1. $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$

2. $\hat{A} = \hat{B}^\dagger$

3. $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$

4. $\hat{A} = \hat{B}^{-1}$

5. $\hat{A}^\dagger = \hat{B}^{-1}$

.

Λυση :

Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι δύο μεγέθη είναι συμβιβαστά όταν μπορούν να μετρηθούν ταυτόχρονα και αυτό σημαίνει ότι ο μεταθέτης τους πρέπει να είναι μηδενικός.

Επομένως σωστή απάντηση είναι η (α)

1.4 Ερώτηση 4η

ΕΚΦΩΝΗΣΗ :Για ποιές από τις παρακάτω τιμές της σταθεράς α ο τελεστής $\hat{q} = (\hat{p}\hat{x} + \alpha\hat{x}\hat{p})$ είναι ερμητιανός

1. Μόνο για $\alpha = 1$.
2. Μόνο για $\alpha = -1$
3. Μόνο για $\alpha = i$
4. Μόνο για $\alpha = -i$
5. Μόνο για $\alpha = 1$, $\alpha = -1$.

ΛΥΣΗ :

Για να είναι ένας τελεστής $\hat{q}$ αυτοσυζηγής θα πρέπει να ισχύει (ο τελεστής της ορμής είναι αυτοσυζηγής, όπως και η θέση):

$$\left[\begin{array}{c}
((\hat{q}\Psi),\Psi)=(\Psi,\hat{q}\Psi) \\
(\Psi,\hat{q}\Psi)=\int_{-\infty}^{\infty}\Psi^{\dagger}\hat{q}\Psi dx \\
((\hat{q}\Psi),\Psi)=\int_{-\infty}^{\infty}(\hat{q}\Psi)^{\dagger}\Psi dx \\
\hat{p}=-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\ ,\ \hat{p}^{\dagger}=i\hbar\frac{\partial}{\partial x} \\
\hat{x}\Psi\rightarrow x\Psi \\
\hat{q}=(\hat{p}\hat{x}+\alpha\hat{x}\hat{p}) \\
\int_{-\infty}^{\infty}\Psi d\Psi^{\dagger}=(\Psi\Psi^{\dagger})_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}\Psi^{\dagger}d\Psi \overset{\Psi(x=\pm\infty)=\Psi^{\dagger}(x=\pm\infty)=0}{=} -\int_{-\infty}^{\infty}\Psi^{\dagger}d\Psi \\
\int_{-\infty}^{\infty}\Psi x d\Psi^{\dagger}=(x\Psi\Psi^{\dagger})_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}\Psi^{\dagger}d(x\Psi) \overset{\Psi(x=\pm\infty)=\Psi^{\dagger}(x=\pm\infty)=0}{=} -\int_{-\infty}^{\infty}\Psi^{\dagger}\Psi dx-\int_{-\infty}^{\infty}\Psi^{\dagger}x d\Psi \\
\int_{-\infty}^{\infty}\Psi^{\dagger}\Psi dx=1
\end{array}\right]\Longleftrightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}(\hat{q}\Psi)^{\dagger}\Psi dx=\int_{-\infty}^{\infty}\Psi^{\dagger}\hat{q}\Psi dx\Longleftrightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}((\hat{p}\hat{x}+\alpha\hat{x}\hat{p})\Psi)^{\dagger}\Psi dx=\int_{-\infty}^{\infty}\Psi^{\dagger}(\hat{p}\hat{x}+\alpha\hat{x}\hat{p})\Psi dx\Longleftrightarrow$$

$$i\hbar[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}(x\Psi)^{\dagger}\Psi dx+\alpha^{\dagger}\int_{-\infty}^{\infty}x\frac{\partial\Psi^{\dagger}}{\partial x}\Psi dx]=-i\hbar[\int_{-\infty}^{\infty}\Psi^{\dagger}\frac{\partial}{\partial x}(x\Psi)dx+\alpha\int_{-\infty}^{\infty}x\Psi^{\dagger}\frac{\partial\Psi}{\partial x}dx]\Longleftrightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}x\frac{\partial\Psi^{\dagger}}{\partial x}\Psi dx+\int_{-\infty}^{\infty}\Psi\Psi^{\dagger}dx+\alpha^{\dagger}\int_{-\infty}^{\infty}x\frac{\partial\Psi^{\dagger}}{\partial x}\Psi dx=-\int_{-\infty}^{\infty}\Psi^{\dagger}\Psi dx-\int_{-\infty}^{\infty}x\Psi^{\dagger}\frac{\partial\Psi}{\partial x}dx-\alpha\int_{-\infty}^{\infty}x\Psi^{\dagger}\frac{\partial\Psi}{\partial x}dx\Longleftrightarrow$$

$$1+(\alpha^{\dagger}+1)\int_{-\infty}^{\infty}x\Psi d\Psi^{\dagger}=-1-(1+\alpha)\int_{-\infty}^{\infty}x\Psi^{\dagger}d\Psi\Longleftrightarrow$$

$$2=-(\alpha^{\dagger}+1)\int_{-\infty}^{\infty}x\Psi d\Psi^{\dagger}-(1+\alpha)\int_{-\infty}^{\infty}x\Psi^{\dagger}d\Psi\Longleftrightarrow$$

$$2=-(\alpha^{\dagger}+1)(-1-\int_{-\infty}^{\infty}x\Psi^{\dagger}d\Psi)-(1+\alpha)\int_{-\infty}^{\infty}x\Psi^{\dagger}d\Psi\Longleftrightarrow$$

$$2=(\alpha^{\dagger}+1)+(\alpha^{\dagger}-\alpha)\int_{-\infty}^{\infty}x\Psi^{\dagger}d\Psi \overset{\int_{-\infty}^{\infty}x\Psi^{\dagger}d\Psi\neq 0}{\Longleftrightarrow} \alpha=\alpha^{\dagger}=1$$

επομένως σωστή απάντηση είναι η α)

1.5 Ερώτηση 5η

ΕΚΦΩΝΗΣΗ :Ο μεταθέτης $[J^2, S_x]$ ισούται με ;

1. $2i\hbar(L_zS_y - L_yS_z)$
2. 0
3. $2\hbar L_x(S_x + S_y)$
4. Κανένα από αυτά.
5. $i\hbar(S_y - S_x)$

ΛΥΣΗ :
Ο μεταθέτης θα είναι:

$$\begin{bmatrix} \hat{J} = \hat{L} + \hat{S} \Longleftrightarrow J^2 = L^2 + S^2 + 2\hat{L}\hat{S} = L^2 + S^2 + 2(L_xS_x + L_yS_y + L_zS_z) \\ M_1 = [J^2, S_x] \\ [L^2, S_x] = 0 \\ [S^2, S_x] = 0 \\ [L_i, S_x] = 0 \\ [S_x, S_x] = 0 \\ [S_y, S_x] = -i\hbar S_z \\ [S_z, S_x] = i\hbar S_y \\ [\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B} \\ [\hat{A} + \hat{B}, \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{B}, \hat{C}] \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$M_1 = [J^2, S_x] = [L^2 + S^2 + 2(L_xS_x + L_yS_y + L_zS_z), S_x] \Longleftrightarrow$$
$$M_1 = [L^2, S_x] + [S^2, S_x] + 2[L_xS_x, S_x] + 2[L_yS_y, S_x] + 2[L_zS_z, S_x] \Longleftrightarrow$$
$$M_1 = 2L_x[S_x, S_x] + 2[L_x, S_x]S_x + 2L_y[S_y, S_x] + 2[L_x, S_x]S_y + 2L_z[S_z, S_x] + 2[L_x, S_z]S_x \Longleftrightarrow$$
$$M_1 = 2L_y(-i\hbar S_z) + 2L_z(i\hbar S_y) = 2i\hbar(L_zS_y - L_yS_z)$$

επομένως σωστή απάντηση είναι η (α)

1.6 Ερώτηση 6η

ΕΚΦΩΝΗΣΗ :Άτομο υδρογόνου βρίσκεται στην κατάσταση $3d_{3/2}$. Το μέτρο της μαγνητικής διπολικής ροπής του ηλεκτρονίου σε μονάδες μ_B ισούται με

1. $\sqrt{3}$
2. $\sqrt{13}$

3. 1
4. 3
5. $\sqrt{6}$

ΛΥΣΗ :Η συνολική μαγνητική διπολική ροπή του ηλεκτρονίου είναι:

$$\vec{\mu} = -\mu_B[\hat{L} + 2\hat{S}] \Longleftrightarrow \mu^2 = \mu_B^2(L^2 + 4S^2 + 4\vec{L}\cdot\vec{S})$$

Όμως το ηλεκτρόνιο είναι στην κατάσταση $3d_{3/2}$ επομένως:

$$j = \frac{3}{2} \quad , \quad l = 2 \quad , \quad s = \frac{1}{2}$$

Επομένως:

$$\left[\begin{array}{c} \mu^2 = \mu_B^2(L^2 + 4S^2 + 4\vec{L}\cdot\vec{S}) \\ L^2 = \hbar^2 l(l+1) \overset{l=2}{=} 6\hbar^2 \\ S^2 = \hbar^2 s(s+1) \overset{s=1/2}{=} \frac{3}{4}\hbar^2 \\ J^2 = \hbar^2 j(j+1) = \hbar^2\frac{15}{4} \\ \vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \Longleftrightarrow J^2 = L^2 + S^2 + 2\vec{L}\cdot\vec{S} \end{array}\right] \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{c} \mu^2 = \mu_B^2(L^2 + 4S^2 + 4\vec{L}\cdot\vec{S}) \\ L^2 = \hbar^2 l(l+1) \overset{l=2}{=} 6\hbar^2 \\ S^2 = \hbar^2 s(s+1) \overset{s=1/2}{=} \frac{3}{4}\hbar^2 \\ 2\vec{L}\cdot\vec{S} = J^2 - L^2 - S^2 = \hbar^2\frac{15}{4} - 6\hbar^2 - \frac{3}{4}\hbar^2 = -3\hbar^2 \end{array}\right] \Longleftrightarrow$$

$$\mu^2 = \mu_B^2(6\hbar^2 + 3\hbar^2 - 6\hbar^2) \Longleftrightarrow |\vec{\mu}| = \mu_B\sqrt{3}$$

επομένως σωστή απάντηση είναι η (α)

1.7 Ερώτηση 7η

ΕΚΦΩΝΗΣΗ :Η κυματοσυνάρτηση σωματιδίου σπιν 1/2 δίνεται από $\chi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$ Η αβεβαιότητα (ΔS_z) ισούται με

1. $\frac{\hbar}{2}$
2. $\frac{3\hbar}{2}$
3. $\frac{\hbar}{3}$
4. $\frac{\hbar}{4}$

5. 0

ΛΥΣΗ :
Η μέση τιμή του τελεστή S_z είναι:

$$\left[\begin{matrix} <\hat{S}_z>=<\chi|\hat{S}_z|\chi> \\ \chi=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-i\\1\end{pmatrix} \\ \chi^*=\frac{1}{\sqrt{2}}^*\begin{pmatrix}i & 1\end{pmatrix} \\ \hat{S}_z=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\end{matrix}\right] \Longleftrightarrow <\hat{S}_z>=\frac{\hbar}{2}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}i & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-i\\1\end{pmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$<\hat{S}_z>=\frac{\hbar}{4}\begin{pmatrix}i & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-i\\-1\end{pmatrix}=\frac{\hbar}{4}[-i^2-1]=0$$

Η μέση τιμή του τελεστή S_z^2 είναι:

$$\left[\begin{matrix} <\hat{S}_z^2>=<\chi|\hat{S}_z\hat{S}_z|\chi> \\ \chi=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-i\\1\end{pmatrix} \\ \chi^*=\frac{1}{\sqrt{2}}^*\begin{pmatrix}i & 1\end{pmatrix} \\ \hat{S}_z=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\end{matrix}\right] \Longleftrightarrow <\hat{S}_z^2>=\frac{\hbar^2}{4}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}i & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-i\\1\end{pmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$<\hat{S}_z>=\frac{\hbar^2}{8}\begin{pmatrix}i & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-i\\-1\end{pmatrix}=\frac{\hbar^2}{8}\begin{pmatrix}i & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-i\\1\end{pmatrix}=\frac{\hbar^2}{8}\frac{\hbar}{4}[-i^2+1]=\frac{\hbar^2}{4}$$

Η απροσδιοριστία θα είναι τότε:

$$\left[\begin{matrix} \Delta S_z=\sqrt{<S_z^2>-(<S_z>)^2} \\ <S_z>=0 \\ <S_z^2>=\frac{\hbar^2}{4}\end{matrix}\right] \Longleftrightarrow \Delta S_z=\frac{\hbar}{2}$$

Επομένως σωστή απάντηση είναι η (α)

1.8 Ερώτηση 8η

ΕΚΦΩΝΗΣΗ :Άτομο υδρογόνου τίθεται εντός μαγνητικού πεδίου $\vec{B} = -B_0\hat{z}$ με $B_0 > 0$. Ποια από τις εκφυλισμένες καταστάσεις με $l = 2$ θα αποκτήσει την μικρότερη ενέργεια;

1. Αυτή με $m = +2$.
2. Αυτή με $m = -2$.
3. Αυτή με $m = 0$.
4. Αυτή με $m = +1$.
5. Αυτή με $m = -1$.

ΛΥΣΗ :
Η ενέργεια ενός ηλεκτρονίου με κβαντικούς αριθμούς nlm μέσα σε ένα μαγνητικό πεδίο δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{bmatrix} E = E_n - \vec{\mu}\cdot\vec{B} \\ \vec{B} = -B_0\hat{z} \\ \vec{\mu} = -\dfrac{\mu_B g\vec{L}}{\hbar} \\ \vec{L}_z = m_l\hbar \\ l = 2 \Longleftrightarrow m_l = -2, -1, 0, 1, 2 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow E = E_n + \frac{\mu_B g}{\hbar}\vec{B}\cdot\vec{L} = E = E_n + \frac{\mu_B g}{\hbar}m_l B_0$$

Προφανώς ελάχιστη ενέργεια θα έχει για ελάχιστο m_l το οποίο θα είναι το $m_l = -2$.
επομένως σωστή απάντηση είναι η (β)

1.9 Ερώτηση 9η

ΕΚΦΩΝΗΣΗ :Η πρώτη διεγερμένη κατάσταση υδρογονοειδούς ιόντος έχει ενέργεια $-85\ eV$. Ποιος ο ατομικός αριθμός του ιόντος;

1. Αυτή με $Z = 5$.
2. Αυτή με $Z = 6$.
3. Αυτή με $Z = 4$.
4. Αυτή με $Z = 3$.
5. Αυτή με $Z = 2$.

ΛΥΣΗ :
Η πρώτη διεγερμένη κατάσταση του ιδρογονοειδούς ιόντος έχει κβαντικό αριθμό $n = 2$.
Η ενέργεια των καταστάσεων του ιόντος θα είναι:

$$\begin{bmatrix} E_n = \dfrac{Z^2}{n^2}E_1 \\ \\ n = 2 \\ \\ E_1 = -13.6\ eV \\ \\ E_2 = -85\ eV \end{bmatrix} \Longleftrightarrow -85 = \frac{Z^2}{4}(-13.6) \Longleftrightarrow Z^2 = 25 \Longleftrightarrow Z = 5$$

επομένως σωστή απάντηση είναι η α)

1.10 Ερώτηση 10η

ΕΚΦΩΝΗΣΗ :Σωματίδιο βρίσκεται σε κεντρικό δυναμικό. Ποιοί από τους τελεστές $\hat{H}, \hat{p}^2, \hat{L}^2, \hat{L}_z$ είναι συμβατοί;

1. Μόνο οι $\hat{H}, \hat{L}^2, \hat{L}_z$.
2. Μόνο οι $\hat{L}^2, \hat{L}_z$.
3. Μόνο οι $\hat{H}, \hat{p}^2$.
4. Όλοι .
5. Μόνο οι $\hat{H}, \hat{L}^2$

ΛΥΣΗ :
Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι οι συμβατοί τελεστές (αυτοί που ο μεταθέτης τους είναι μηδενικός) έχουν κοινές ιδιοκαταστάσεις. Στο άτομο του υδρογόνου κοινές ιδιοκαταστάσεις έχουν η ενέργεια ($\hat{H}$), το τετράγωνο της στροφορμής $\hat{L}^2$ και η z συνιστώσα της στροφορμής $\hat{L}_z$ αλλά όχι η ορμή και το τετράγωνο της.
επομένως σωστή απάντηση είναι η (α)

1.11 Ερώτηση 11η

ΕΚΦΩΝΗΣΗ :Αρμονικός ταλαντωτής συχνότητας ω βρίσκεται στην κατάσταση $\psi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(a^\dagger)^2\psi_0$ όπου ψ_0 η θεμελιώδης κατάσταση και $a^\dagger$ ο τελεστής δημιουργίας. Η ενέργεια του συστήματος ισούται με

1. $\dfrac{5\hbar\omega}{2}$.
2. $\dfrac{3\hbar\omega}{2}$.
3. $\dfrac{7\hbar\omega}{2}$.

4. Το σύστημα δεν έχει καθορισμένη ενέργεια. .

5. 0

ΛΥΣΗ :Γνωρίζουμε ότι αν δράσει ο τελεστής δημιουργίας στην θεμελιώδη κατάσταση ($n = 0$) τότε την μετατρέπει στην 1η διεγερμένη ($n = 1$). Γενικά κάθε φορά που δρά ανεβάζει το n κατά 1. Στην περίπτωση μας έχει δράση δύο φορές επομένως η κατάσταση μας θα είναι η ($n = 2$). Η ενέργεια αυτής της κατάστασης θα είναι:

$$\begin{bmatrix} E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}) \\ \\ n = 2 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow E_2 = \frac{5\hbar\omega}{2}$$

επομένως σωστή απάντηση είναι η (α).

1.12 Ερώτηση 12η

ΕΚΦΩΝΗΣΗ :Ποια/ες από τις παρακάτω είναι ιδιοσυναρτήσεις της πάριτη;

1. $(1 + x^2)e^x$

2. $|x|$

3. $\cos(x)$

1. Μόνο οι (ii) και (iii). .

2. Μόνο η (i) .

3. Μόνο οι (i) και (iii). .

4. Μόνο η (iii) .

5. Καμία

ΛΥΣΗ :Γνωρίζουμε ότι ιδιοσυναρτήσεις της πάριτυ είναι οι άρτιες ($f(x) = f(-x)$) με ιδιοτιμή 1 και οι περιττές ($f(x) = -f(-x)$) με ιδιοτιμή -1. Η (ii) είναι άρτια καθώς $|x| = |-x|$ όπως και η (iii) ($\cos(-x) = \cos(x)$. Η (i) δεν ανήκει σε καμία από τις δύο κατηγορίες καθώς $f(x) = (1 + x^2)e^x$ και $f(-x) = (1 + (-x)^2)e^{-x} = (1 + x^2)e^{-x}$.

επομένως σωστή απάντηση είναι η (α).

1.13 Ερώτηση 13η

ΕΚΦΩΝΗΣΗ :Υδρογονοειδές ιόν βρίσκεται στην κατάσταση $\psi = \frac{1}{\sqrt{6}}[\psi_{3,2,-1} + \psi_{4,2,1} + 2i\psi_{2,1,0}]$. Σε μετρήσεις του L^2 ποια θα είναι η μέση τιμή;

ΛΥΣΗ :Έχουμε τρεις καταστάσεις με $l = 2, 2, 1$ αντίστοιχα. Γι αυτές τις καταστάσεις το τετράγωνο της στροφορμής θα είναι:

$$L^2 = \hbar^2 l(l+1) \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} l = 2 & L^2 = 6\hbar^2 \\ l = 1 & L^2 = 2\hbar^2 \end{bmatrix}$$

Η κυματοσυνάρτηση είναι γραμμικός συνδιασμός ιδιοσυναρτήσεων:

$$\psi = \sum_{j=1}^{3} c_j \psi_j \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} j = 1 & c_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} & \psi_1 = \psi_{3,2,-1} \\ j = 2 & c_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} & \psi_2 = \psi_{4,2,-1} \\ j = 3 & c_3 = \frac{2i}{\sqrt{6}} & \psi_3 = \psi_{2,1,0} \end{bmatrix}$$

Η μέση τιμή του L^2 θα είναι:

$$\begin{bmatrix} < L^2 >= \sum_{j=1}^{3} c_j c_j^* L_j^2 \\ c_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \\ c_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \\ c_3 = \frac{2i}{\sqrt{6}} \\ L_1^2 = L_2^2 = 6\hbar^2 \\ L_3^2 = 2\hbar^2 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow < L^2 >= \frac{1}{6}[6\hbar^2 + 6\hbar^2 + 4 \cdot 2\hbar^2] = \frac{10\hbar^2}{3}$$

επομένως σωστή απάντηση είναι η (α).

1.14 Ερώτηση 14η

ΕΚΦΩΝΗΣΗ :

Ένα πρωτόνιο και ένα ηλεκτρόνιο έχουν το ίδιο μήκος κύματος de Broglie. Ποιες από τις παρακάτω φυσικές ποσότητες είναι επίσης ίδιες;

1. Η ορμή.
2. Η ταχύτητα.
3. Η κινητική ενέργεια.
4. Η ορμή και η κινητική ενέργεια.
5. Καμία από τις αναφερόμενες.

ΛΥΣΗ :

Το μήκος κύματος κατά de Broglie δίνεται από τη σχέση

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

καθώς το h σταθερά αν δύο σώματα έχουν ίδιο μήκος κύματος θα έχουν και ίδια ορμή. Όμως η ορμή είναι ανάλογη της μάζας και της ταχύτητας. Το πρωτόνιο έχει περίπου 2000 φορές μεγαλύτερη μάζα από το ηλεκτρόνιο επομένως θα έχει και μικρότερη ταχύτητα. Η κινητική ενέργεια είναι

$$K = \frac{p^2}{2m}$$

Αν έχουν ίδια ορμή καθώς έχουν διαφορετικές μάζες θα έχουν και διαφορετικές κινητικές ενέργειες.

επομένως σωστή απάντηση είναι η (α)

2 Θέμα Δεύτερο

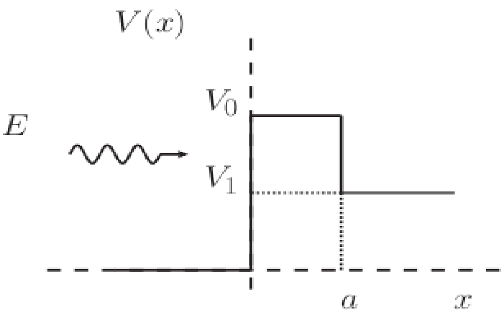
2.1 Εκφώνηση

Σωματίδιο μάζας m προσπίπτει από τα αριστερά με ενέργεια

$$E = \frac{V_0 + V_1}{2} \tag{-29}$$

στο δυναμικό του διπλανού σχήματος (με V_0, V_1 γνωστές θετικές σταθερές με διαστάσεις ενέργειας)

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ +V_0 & 0 < x < a \\ V_1 & x < a \end{cases}$$

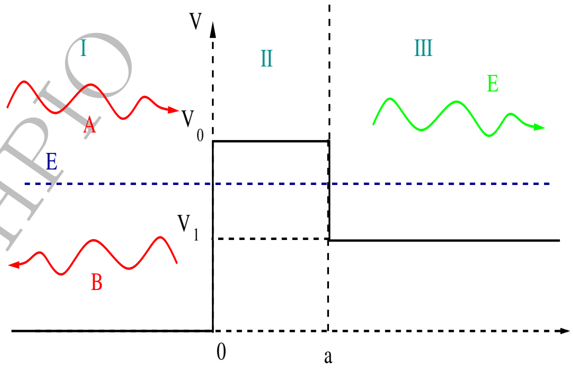


1. Βρείτε τη μορφή της κυματοσυνάρτησης παντού στο χώρο και τις εξισώσεις που ικανοποιούν οι σταθερές που υπεισέρχονται (εξαίρεση την κανονικοποίηση) [40%]
2. Υπολογίστε το συντελεστή διέλευσης . [60%]

2.2 Λύση

1. Αρχικά θα λύσουμε την εξίσωση του *Schrödinger* στις διαφορετικές περιοχές του χώρου.

   Ορίζουμε τρεις περιοχές στην κάθε μία από τις οποίες η δυναμική ενέργεια έχει σταθερή τιμή.



   (α΄) Περιοχή I (δυναμικό $V = 0$) ($x < 0$):

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_I(x) = E\psi_I(x) \Longleftrightarrow \frac{d^2\psi_I(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi_I(x) = 0 \Longleftrightarrow$$
$$\psi_I(x) = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx}$$

   με $k^2 = \dfrac{2mE}{\hbar^2}$

   (β΄) Περιοχή II (δυναμικό $V = V_0$) ($0 < x < \alpha$):

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_{II}(x) + V_0\psi_{II}(x) = E\psi_{II}(x) \Longleftrightarrow \frac{d^2\psi_{II}(x)}{dx^2} - \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}\psi_{II}(x) = 0 \Longleftrightarrow$$
$$\psi_{II}(x) = A_2 e^{\gamma x} + B_2 e^{-\gamma x}$$

   με $\gamma^2 = \dfrac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}$

   (γ΄) Περιοχή III (δυναμικό $V = V_1$) ($x > \alpha$):

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_{III}(x) + V_1\psi_{III}(x) = E\psi_{III}(x) \Longleftrightarrow \frac{d^2\psi_{III}(x)}{dx^2} + \frac{2m(E - V_1)}{\hbar^2}\psi_{III}(x) = 0 \Longleftrightarrow$$
$$\psi_{III}(x) = A_3 e^{i\kappa x} + B_3 e^{-i\kappa x}$$

   με $\kappa^2 = \dfrac{2m(E - V_1)}{\hbar^2}$

   Στην περιοχή αυτή περιέχεται και η θέση $x \to \infty$. Καθώς εκεί δεν έχουμε πηγή ή σημείο ασυνέχειας του δυναμικού δεν μπορούμε να έχουμε κύμα το οποίο επιστρέφει από αυτό το σημείο. Επομένως $B_3 = 0$.

   Καθώς $E = \dfrac{V_0 + V_1}{2}$ παρατηρούμε ότι $\kappa^2 = \dfrac{2m(E - V_1)}{\hbar^2} = \dfrac{m(V_0 - V_1)}{\hbar^2} = \gamma^2$.

   Οι συνοριακές συνθήκες ορίζονται από τη συνθήκη ότι η κυματοσυνάρτηση και η παράγωγος της θα πρέπει να είναι συνεχείς σε κάθε σημείο του χώρου συνεπώς και στα σημεία ασυνέχειας του δυναμικού.

Επομένως στο $x = 0$ η κυματοσυνάρτηση θα πρέπει να είναι συνεχής. Συνεπώς:

$$\begin{bmatrix} \psi_I(x=0) = \psi_{II}(x=0) \\ \\ \psi_I(x) = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx} \\ \\ \psi_{II}(x) = A_2 e^{\kappa x} + B_2 e^{-\kappa x} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow A_1 + B_1 = A_2 + B_2$$

Όμοια και για τις παραγώγους τους:

$$\begin{bmatrix} \frac{d\psi_I}{dx}|_(x=0) = \frac{d\psi_{II}}{dx}|_(x=0) \\ \psi_I(x) = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx} \\ \\ \psi_{II}(x) = A_2 e^{\kappa x} + B_2 e^{-\kappa x} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow ik(A_1 - B_1) = \kappa A_2 - \kappa B_2 \Longleftrightarrow A_2 - B_2 = \frac{ik}{\kappa}(A_1 - B_1)$$

Επίσης στο $x = a$ η κυματοσυνάρτηση θα πρέπει να είναι συνεχής. Συνεπώς:

$$\begin{bmatrix} \psi_{II}(x=a) = \psi_{III}(x=a) \\ \\ \psi_{II}(x) = A_2 e^{\kappa x} + B_2 e^{-\kappa x} \\ \\ \psi_{III}(x) = A_3 e^{i\kappa x} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow A_2 e^{\kappa a} + B_2 e^{-\kappa a} = A_3 e^{i\kappa a}$$

Όμοια και για τις παραγώγους τους:

$$\begin{bmatrix} \frac{d\psi_{II}}{dx}|_(x=a) = \frac{d\psi_{III}}{dx}|_(x=a) \\ \psi_{II}(x) = A_2 e^{\kappa x} + B_2 e^{-\kappa x} \\ \\ \psi_{III}(x) = A_3 e^{i\kappa x} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \kappa(A_2 e^{\kappa a} - B_2 e^{-\kappa a}) = i\kappa A_3 e^{i\kappa a} \Longleftrightarrow A_2 e^{\kappa a} - B_2 e^{-\kappa a} = iA_3 e^{i\kappa a}$$

με

$$\begin{bmatrix} k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \\ \kappa^2 = \frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2} \\ E = \frac{V_0 + V_1}{2} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} k = \sqrt{\frac{m(V_0 + V_1)}{\hbar^2}} \\ \kappa = \sqrt{\frac{m(V_0 - V_1)}{\hbar^2}} \end{bmatrix}$$

Συνεπώς για τις πέντε σταθερές έχουμε το σύστημα των τεσσάρων εξισώσεων (εκτός της κανονικοποίησης):

$$A_1 + B_1 = A_2 + B_2$$
$$A_2 - B_2 = \frac{ik}{\kappa}(A_1 - B_1)$$
$$A_2 e^{\kappa a} - B_2 e^{-\kappa a} = iA_3 e^{ika}$$
$$A_2 e^{\kappa a} + B_2 e^{-\kappa a} = A_3 e^{ika}$$

2. Η σταθερά A_1 αναφέρεται σε κύμα το οποίο ξεκινά από το $x \to -\infty$ που θεωρούμε ότι βρίσκεται η πηγή. Επομένως αυτή η σταθερά αναφέρεται στις ιδιότητες της πηγής και θα τη θεωρήσουμε γνωστή. Θα λύσουμε το σύστημα μας ως προς αυτή τη σταθερά:

$$\begin{bmatrix} A_2 + B_2 = A_1 + B_1 \\ \frac{\kappa}{ik}(A_2 - B_2) = (A_1 - B_1) \\ A_2 e^{\kappa a} - B_2 e^{-\kappa a} = iA_3 e^{ika} \\ A_2 e^{\kappa a} + B_2 e^{-\kappa a} = A_3 e^{ika} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 2A_1 = A_2(1 + \frac{\kappa}{ik}) + B_2(1 - \frac{\kappa}{ik}) \\ 2A_2 e^{\kappa a} = A_3(i+1)e^{ika} \Longleftrightarrow A_2 = A_3\frac{(i+1)}{2}e^{ika}e^{-\kappa a} \\ 2B_2 e^{-\kappa a} = A_3(1-i)e^{ika} \Longleftrightarrow B_2 = A_3\frac{(1-i)}{2}e^{ika}e^{\kappa a} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$A_1 = A_3\frac{(i+1)}{4}e^{ika}e^{-\kappa a}(1 + \frac{\kappa}{ik}) + A_3\frac{(1-i)}{2}e^{ika}e^{\kappa a}(1 - \frac{\kappa}{ik}) \Longleftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} A_1 = A_3\frac{(i+1)}{4}e^{ika}e^{-\kappa a}(1 + \frac{\kappa}{ik}) + A_3\frac{(1-i)}{2}e^{ika}e^{\kappa a}(1 - \frac{\kappa}{ik}) \\ A_1^* = A_3^*\frac{(-i+1)}{4}e^{-ika}e^{-\kappa a}(1 + \frac{\kappa}{-ik}) + A_3^*\frac{(1+i)}{4}e^{-ika}e^{\kappa a}(1 - \frac{\kappa}{-ik}) \end{bmatrix}$$

Ο συντελεστής διέλευσης θα δίνεται από:

$$\left[\begin{array}{c}
T = \dfrac{\kappa A_3^2}{k A_1^2} = \dfrac{\kappa A_3 A_3^*}{k A_1 A_1^*} \\
A_1 = A_3 \dfrac{(i+1)}{4} e^{i\kappa a} e^{-\kappa a}(1 + \dfrac{\kappa}{ik}) + A_3 \dfrac{(1-i)}{2} e^{i\kappa a} e^{\kappa a}(1 - \dfrac{\kappa}{ik}) \\
A_1^* = A_3^* \dfrac{(-i+1)}{4} e^{-i\kappa a} e^{-\kappa a}(1 + \dfrac{\kappa}{-ik}) + A_3^* \dfrac{(1+i)}{4} e^{-i\kappa a} e^{\kappa a}(1 - \dfrac{\kappa}{-ik}) \\
k = \sqrt{\dfrac{m(V_0+V_1)}{\hbar^2}} \\
\kappa = \sqrt{\dfrac{m(V_0-V_1)}{\hbar^2}}
\end{array}\right] \Longleftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{c}
T = \dfrac{\kappa A_3^2}{k A_1^2} = \dfrac{\kappa A_3 A_3^*}{k A_1 A_1^*} \\
4A_1 ik = A_3(i+1)e^{i\kappa a} e^{-\kappa a}(ik+\kappa) + A_3(1-i)e^{i\kappa a} e^{\kappa a}(ik-\kappa) \\
4A_1^*(-ik) = A_3^*(-i+1)e^{-i\kappa a} e^{-\kappa a}(-ik+\kappa) - A_3^*(1+i)e^{-i\kappa a} e^{\kappa a}(+ik+\kappa) \\
\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \Longleftrightarrow \sinh x = e^x - e^{-x} \\
\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \Longleftrightarrow \cosh x = e^x + e^{-x}
\end{array}\right] \Longleftrightarrow$$

$$T = \frac{16\kappa k^2 A_3 A_3^*}{k A_3 A_3^* e^{i\kappa a} e^{-i\kappa a}[(i+1)e^{-\kappa a}(ik+\kappa) + (1-i)e^{\kappa a}(ik-\kappa)][(-i+1)e^{-\kappa a}(-ik+\kappa) - (1+i)e^{\kappa a}(+ik+\kappa)]} \Longleftrightarrow$$

$$T = \frac{16\kappa k}{[(i+1)e^{-\kappa a}(ik+\kappa) + (1-i)e^{\kappa a}(ik-\kappa)][(-i+1)e^{-\kappa a}(-ik+\kappa) - (1+i)e^{\kappa a}(+ik+\kappa)]} \Longleftrightarrow$$

$$T = \frac{16\kappa k}{[e^{-\kappa a}(\kappa - k + i(k+\kappa)) + (k - \kappa + i(k+\kappa))e^{\kappa a}][(\kappa - k - i(k+\kappa))e^{-\kappa a} + e^{\kappa a}(k - \kappa - i(k+\kappa))]} \Longleftrightarrow$$

$$T = \frac{16\kappa k}{[(e^{-\kappa a} - e^{\kappa a})(\kappa - k) + i(k+\kappa)(e^{-\kappa a} + e^{\kappa a})][(\kappa - k)(e^{-\kappa a} - e^{\kappa a}) - i(k+\kappa))(e^{-\kappa a} + e^{\kappa a})]} \Longleftrightarrow$$

$$T = \frac{4\kappa k}{[(-\sinh \kappa a)(\kappa - k) + i(k+\kappa)(\cosh \kappa a))][(\kappa - k)(-\sinh \kappa a) - i(k+\kappa))(\cosh \kappa a)]} \Longleftrightarrow$$

$$T = \frac{4\kappa k}{[\sinh^2 \kappa a)(\kappa - k)^2 + (k+\kappa)^2(\cosh^2 \kappa a))]}$$

3 Θέμα Τρίτο

3.1 Εκφώνηση

Υδρογονοειδές ιόν ατομικού αριθμού $Z = 4$ βρίσκεται στην κατάσταση

$$\psi = \alpha\psi_{2,1,-1}\chi_{-} + \beta\psi_{3,2,1}\chi_{+}$$

όπου α,β θετικές πραγματικές σταθερές. Δίνεται ότι $< \hat{J}_z >= \frac{\hbar}{2}$.

1. Να υπολογισθούν οι σταθερές α,β [20%]

2. Σε μετρήσεις των $\hat{J}^2$ και J_z ποιά τα πιθανά ενδεχόμενα; [20%]

3. Να υπολογιστεί η μέση τιμή και η αβεβαιότητα της ενέργειας στο ατομικό σύστημα μονάδων και σε eV. [20%]

4. Να υπολογιστεί η μέση τιμή και η αβεβαιότητα του r. [40%]

3.2 Λύση

1. Η μέση τιμή ενός μεγέθους το οποίο έχει διακριτές ιδιοτιμές είναι:

   $$< A >= \sum_{i=1,n} c_i^* \lambda_i c_i$$

   όπου λ_i είναι η ιδιοτιμή της ιδιοκατάστασης i.

   Η z συνιστώσα της ολικής στροφορμής είναι:

   $$J_z = L_z + S_z$$

   Για την περίπτωση μας θα έχουμε ότι:

   $$\begin{bmatrix} \psi_{2,1,-1}\chi_{-} & m_1 = -1 & m_s = -\frac{1}{2} & J_z = m_l\hbar + m_s\hbar = -\frac{3}{2}\hbar \\ \psi_{3,2,1}\chi_{+} & m_1 = 1 & m_s = \frac{1}{2} & J_z = m_l\hbar + m_s\hbar = \frac{3}{2}\hbar \end{bmatrix}$$

Στην περίπτωση μας

$$\begin{bmatrix} \psi = \alpha\psi_{2,1,-1} + \beta\psi_{3,2,1} \\ c_1 = \alpha \\ c_2 = \beta \\ \psi_1(x) = \psi_{2,1,-1} \\ \psi_2(x) = \psi_{3,2,1} \end{bmatrix}$$

Συνεπώς για την μέση τιμή της στροφορμής θα έχουμε ότι:

$$\begin{bmatrix} < J_z >= \alpha\alpha^*\lambda_1 + bb^*\lambda_2 \\ < J_z >= \frac{\hbar}{2} \\ \lambda_1 = -\frac{3}{2}\hbar \\ \lambda_2 = +\frac{3}{2}\hbar \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \frac{\hbar}{2} = -\alpha\alpha^*\frac{3}{2}\hbar + b^2\frac{3}{2}\hbar \Longleftrightarrow b^2 - \alpha^2 = \frac{1}{3}$$

Από την κανονικοποίηση θα έχουμε:

$$\begin{bmatrix} 1 = \sum_{i=1,2} c_i c_i^* \\ c_1 = \alpha \\ c_2 = b \end{bmatrix} \Longleftrightarrow 1 = \alpha^2 + b^2$$

Λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{bmatrix} 1 = \alpha^2 + b^2 \\ b^2 - \alpha^2 = \frac{1}{3} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha = \sqrt{\frac{1}{3}} \\ b = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

2. Η ολική στροφορμή δίνεται από:

$$\begin{bmatrix} J^2 = \hbar^2 j(j+1) \\ j = |l-s|, ..., l+s \end{bmatrix}$$

Για τις δύο ιδιοσυναρτήσεις θα έχουμε ότι:

$$\begin{bmatrix} \psi_{2,1,-1}\chi_- & l=1 & s=\frac{1}{2} & |l-s| \le j \le l+s \Longleftrightarrow j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \\ \psi_{3,2,1}\chi_+ & l=2 & s=\frac{1}{2} & |l-s| \le j \le l+s \Longleftrightarrow j = \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

Που σημαίνει ότι οι πιθανές τιμές του J^2 είναι:

$$\begin{bmatrix} j=\frac{1}{2} & J^2 = \hbar^2 \frac{1}{2}\frac{3}{2} = \frac{3}{4}\hbar^2 \\ j=\frac{3}{2} & J^2 = \hbar^2 \frac{3}{2}\frac{5}{2} = \frac{15}{4}\hbar^2 \\ j=\frac{5}{2} & J^2 = \hbar^2 \frac{5}{2}\frac{7}{2} = \frac{35}{4}\hbar^2 \end{bmatrix}$$

Όμως βρήκαμε ότι $J_z = \pm\frac{3\hbar}{2}$. Η J_z θα πρέπει να είναι πάντα μικρότερη από την τιμή της ολικής στροφορμής καθώς είναι μια από τις συνιστώσες της. Επομένως απορρίπτεται η τιμή $J^2 = \frac{3}{4}\hbar^2 \Longleftrightarrow J = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar$ καθώς είναι μικρότερη από την τιμή της J_z που βρήκαμε. Συνεπώς παραμένουν μόνο οι δύο άλλες τιμές $J^2 = \frac{15}{4}\hbar^2, \frac{35}{4}\hbar^2$.

3. Οι τιμές της ενέργειας που αντιστοιχούν σε αυτές τις ιδιοκαταστάσεις είναι:

$$\begin{bmatrix} E_n = \frac{E_1 Z^2}{n^2} \\ n=3 \\ n=2 \\ E_1 = -13.6\ eV \\ Z=4 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} E_2 = -54.4\ eV \\ E_3 = -24.2\ eV \end{bmatrix}$$

Η μέση τιμή της ενέργειας θα είναι:

$$\begin{bmatrix} < E >= \alpha\alpha^*\lambda_1 + bb^*\lambda_2 \\ E_2 = -54.4\ eV \\ E_3 = -24.2\ eV \\ \alpha\alpha^* = \dfrac{1}{3} \\ bb^* = \dfrac{2}{3} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow < E >= \frac{1}{3}(-54.4) + \frac{2}{3}(-24.2) = -34.25\ eV$$

Η μέση τιμή του τετραγώνου της ενέργειας θα είναι:

$$\begin{bmatrix} < E^2 >= \alpha\alpha^*\lambda_1\lambda_1 + bb^*\lambda_2\lambda_2 \\ E_2 = -54.4\ eV \\ E_3 = -24.2\ eV \\ \alpha\alpha^* = \dfrac{1}{3} \\ bb^* = \dfrac{2}{3} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow < E^2 >= \frac{1}{3}(-54.4)^2 + \frac{2}{3}(-24.2)^2 = 1376.16\ eV$$

Η απροσδιοριστία της ενέργειας θα είναι:

$$\begin{bmatrix} \Delta E = \sqrt{< E^2 > -(< E >)^2} \\ < E^2 >= 1376.16\ eV^2 \\ < E >= -34.25\ eV \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \Delta E = \sqrt{1376.16 - 1173.2} = 14.25\ eV^2$$

Σε ατομικές μονάδες:

$$\begin{bmatrix} E_n = -\dfrac{Zme^4}{2n^2\hbar^2} \\ e = 1 \\ Z = 4 \\ m = 1 \\ \hbar = 1 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} n = 2 & E_2 = \dfrac{-16}{2 \cdot 4} = -2 \\ n = 3 & E_3 = \dfrac{-16}{2 \cdot 9} = -\dfrac{8}{9} \end{bmatrix}$$

Η μέση τιμή της ενέργειας θα είναι:

$$\begin{bmatrix} < E >= \alpha\alpha^*\lambda_1 + bb^*\lambda_2 \\ E_2 = -2 \\ E_3 = -\dfrac{8}{9} \\ \alpha\alpha^* = \dfrac{1}{3} \\ bb^* = \dfrac{2}{3} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow < E >= \frac{1}{3}(-2) + \frac{2}{3}(-\frac{8}{9}) = -\frac{34}{27}$$

Η μέση τιμή του τετραγώνου της ενέργειας θα είναι:

$$\begin{bmatrix} < E^2 >= \alpha\alpha^*\lambda_1\lambda_1 + bb^*\lambda_2\lambda_2 \\ E_2 = -2\ eV \\ E_3 = -\dfrac{8}{9}\ eV \\ \alpha\alpha^* = \dfrac{1}{3} \\ bb^* = \dfrac{2}{3} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow < E^2 >= \frac{1}{3}(-2)^2 + \frac{2}{3}(-\frac{8}{9})^2 = \frac{452}{243}$$

Η απροσδιοριστία της ενέργειας θα είναι:

$$\begin{bmatrix} \Delta E = \sqrt{< E^2 > -(< E >)^2} \\ < E^2 >= \dfrac{452}{243} \\ < E >= -\dfrac{34}{27} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \Delta E = \sqrt{\frac{452}{243} - (-\frac{34}{27})^2} = 0.524$$

4. Η μέση τιμή της θέσης θα είναι:

$$\begin{bmatrix} < r >=< \psi|r|\psi > \\ \psi = \sqrt{\dfrac{1}{3}}\psi_{2,1,-1}\chi_- + \sqrt{\dfrac{2}{3}}\psi_{3,2,1}\chi_+ \\ < \psi_{nlm}|\psi_{n'l'm'} >= \int_0^\infty r^2 R_{nl}(r)R_{n'l'}dr\delta_{ll'}\delta_{mm'} \\ < \chi_i|\chi_j >= \delta_{ij} \end{bmatrix}$$

Επομένως τα γινόμενα με κυματοσυναρτήσεις με διαφορετικά l και m μηδενίζονται και η μέση τιμή της απόστασης θα είναι:

$$< r >= \frac{1}{3}\int_0^\infty r^2 R_{21} r R_{21} dr + \frac{2}{3}\int_0^\infty r^2 R_{32} r R_{32} dr$$

Για υδρογονοειδή ιόντα θα έχουμε ότι:

$$\begin{bmatrix} <r>=\frac{1}{3}\int_0^\infty r^2R_{21}rR_{21}dr+\frac{2}{3}\int_0^\infty r^2R_{32}rR_{32}dr \\ R_{21}=Z^{3/2}\frac{Zr}{2\sqrt{6}}e^{-Zr/2} \\ R_{32}=Z^{3/2}\frac{4Z^2r^2}{81\sqrt{30}}e^{-Zr/3} \\ Z=4 \\ \int_0^\infty z^ne^{-z}dz=n! \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$<r>=\frac{1}{3}\frac{4^5}{24}\int_0^\infty r^5e^{-4r}dr+\frac{2}{3}\frac{Z^9}{81^2\cdot 30}\int_0^\infty r^7e^{-8r/3}dr \overset{z_1=4r\ ,\ z_2=8r/3}{\Longleftrightarrow}$$

$$<r>=\frac{1}{3}\frac{4^5}{24}\frac{1}{4^6}\int_0^\infty z_1^5e^{-z_1}dz_1+\frac{2}{3}\frac{4^9}{3^8\cdot 30}\frac{3^8}{8^8}\int_0^\infty z_2^7e^{-z_2}dz_2 \Longleftrightarrow$$

$$<r>=\frac{1}{3}\frac{4^5}{24}\frac{1}{4^6}5!+\frac{2}{3}\frac{4^9}{3^8\cdot 30}\frac{3^8}{8^8}7!=\frac{5}{12}+\frac{7}{4}=\frac{26}{12}$$

Για τη μέση τιμή του τετραγώνου της θέσης:

$$\begin{bmatrix} <r^2>=\frac{1}{3}\int_0^\infty r^2R_{21}r^2R_{21}dr+\frac{2}{3}\int_0^\infty r^2R_{32}r^2R_{32}dr \\ R_{21}=Z^{3/2}\frac{Zr}{2\sqrt{6}}e^{-Zr/2} \\ R_{32}=Z^{3/2}\frac{4Z^2r^2}{81\sqrt{30}}e^{-Zr/3} \\ Z=4 \\ \int_0^\infty z^ne^{-z}dz=n! \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$<r^2>=\frac{1}{3}\frac{4^5}{24}\int_0^\infty r^6e^{-4r}dr+\frac{2}{3}\frac{Z^9}{81^2\cdot 30}\int_0^\infty r^8e^{-8r/3}dr \overset{z_1=4r\ ,\ z_2=8r/3}{\Longleftrightarrow}$$

$$<r^2>=\frac{1}{3}\frac{4^5}{24}\frac{1}{4^6}\int_0^\infty z_1^6e^{-z_1}dz_1+\frac{2}{3}\frac{4^9}{3^8\cdot 30}\frac{3^8}{8^8}\int_0^\infty z_2^8e^{-z_2}dz_2 \Longleftrightarrow$$

$$<r^2>=\frac{1}{3}\frac{4^5}{24}\frac{1}{4^7}6!+\frac{2}{3}\frac{4^9}{3^8\cdot 30}\frac{3^9}{8^9}8!=\frac{5}{8}+\frac{42}{8}=\frac{47}{8}$$

Η απροσδιοριστία της θέσης θα είναι:

$$\begin{bmatrix} \Delta r = \sqrt{< r^2 > -(< r >)^2} \\ \\ < r^2 >= \dfrac{47}{8}\alpha_0^2 \\ \\ < r >= \dfrac{26}{12}\alpha_0 \\ \\ \alpha_0 = 0.53 \times 10^{-10}\ m \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \Delta r = \sqrt{\frac{47}{8} - (\frac{26}{12})^2}\alpha_0 = 1.086\alpha_0 = 0.576 \times 10^{-10}\ m$$

όπου στο τέλος αποκαταστήσαμε και τις μονάδες. Η μονάδα μήκους στο ατομικό σύστημα είναι η ακτίνα του Bohr ($\alpha_0 = 0.53 \times 10^{-10}\ m$) .