Κεφ. 6.6. - Τράπεζα Θεμάτων 2022 - Γεωμετρία Α' Λυκείου

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ & ΛΥΣΕΙΣ

Η Τράπεζα Θεμάτων για τη Γεωμετρία Α' Λυκείου είναι μία μεγάλη «θάλασσα». Εμείς όμως έχουμε φροντίσει για εσένα, συγκεντρώνοντας εκείνα τα θέματα που αποτελούν τη «βάση» της γνώσης και για τα υπόλοιπα. Μελετώντας και κατανοώντας το μοτίβο σκέψης για τα συγκεκριμένα, μπορείς να λύσεις με επιτυχία και τα υπόλοιπα θέματα. Στην ιστοσελίδα μας www.arnos.gr για το Course της Γεωμετρίας, μελετάς και προετοιμάζεσαι με την αναλυτική διδασκαλία σε ασκήσεις και θέματα, στο ύφος της Τράπεζας.

Θέμα 1 - Κωδικοί:

12066

1. Θέμα 12066

α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Αν οι χορδές δύο τόξων ενός κύκλου είναι ίσες, τότε και τα τόξα είναι ίσα.

ii. Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι μεγαλύτερη από καθεμία από τις γωνίες του τριγώνου.

iii. Αν δύο διαφορετικές ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες προς μια τρίτη ευθεία ε, τότε είναι και μεταξύ τους παράλληλες.

iv. Αν ένα τετράπλευρο έχει όλες τις γωνίες του ίσες, τότε είναι τετράγωνο.

v. Αν σε ένα τετράπλευρο δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές, τότε το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

(Μονάδες 10)

β) Από ένα σημείο Α εκτός ευθείας ε φέρουμε το κάθετο τμήμα ΑΚ προς την ε και τα πλάγια τμήματα ΑΒ και ΑΓ. Να αποδείξετε ότι, αν τα πλάγια τμήματα ΑΒ και ΑΓ είναι ίσα, τότε τα ίχνη τους Β και Γ ισαπέχουν από το ίχνος Κ της καθέτου.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α)

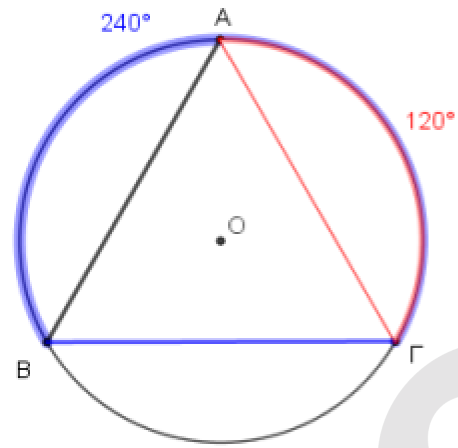
i. Λ

§ 3.4

Γιατί δεν αναφέρεται αν τα τόξα είναι και τα δύο μικρότερα ή μεγαλύτερα του ημικυκλίου.

Μπορούμε να δώσουμε ως αντιπαράδειγμα το εξής.

Ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου Ο. Οι ίσες πλευρές του ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ είναι και ίσες χορδές του κύκλου. Στην χορδή ΑΓ το τόξο το μικρότερο του ημικυκλίου έχει μέτρο 120°, ενώ στην χορδή ΒΓ το τόξο το μεγαλύτερο του ημικυκλίου έχει μέτρο 240°. Είναι προφανές ότι, ενώ οι χορδές ΑΓ και ΒΓ είναι ίσες τα τόξα ΑΓ και ΒΑΓ δεν είναι ίσα.



ii. Λ

§ 3.10

Γιατί κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι μεγαλύτερη από καθεμία από τις <u>απέναντι</u> εσωτερικές γωνίες. Για παράδειγμα, η εξωτερική γωνία της ορθής γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου, είναι ίση με την εσωτερική της, δηλαδή την ορθή και όχι μεγαλύτερη.

iii. Σ

§ 4.2

iv. Λ

§ 5.5

Γιατί τότε είναι ορθογώνιο. Χρειάζεται επιπλέον να είναι και ρόμβος ώστε τελικά να είναι τετράγωνο.

v. Σ

§ 6.6

β) § 3.13

Θεώρημα Ι σχ. βιβλίο σελ. 65 (μόνο το ευθύ)

Θέμα 2 - Κωδικοί:
12641, 13818

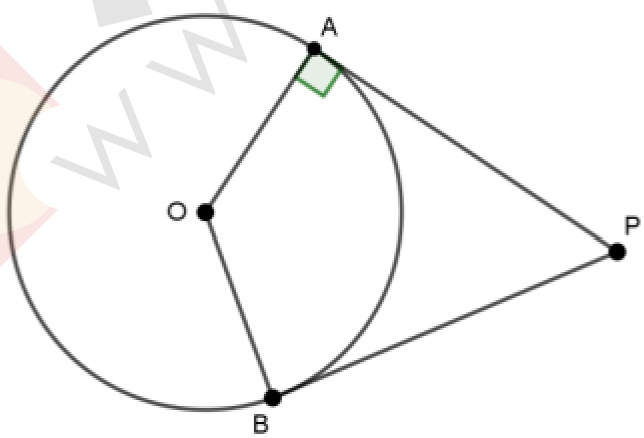
2. Θέμα 12641

Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα 4 cm. Από σημείο Ρ εκτός του κύκλου φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ προς τον κύκλο. Επίσης η γωνία ΑΡΒ ισούται με 60^0.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΡΑΟΒ είναι εγγράψιμο. (Μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας ΑΡΟ. (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΟΡ. (Μονάδες 9)

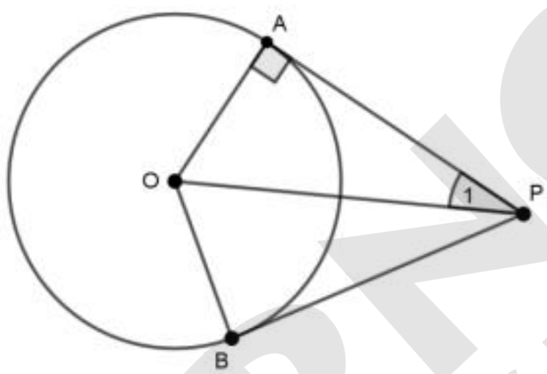


ΛΥΣΗ

α) Γνωρίζουμε ότι τα εφαπτόμενα τμήματα από σημείο εκτός κύκλου είναι κάθετα στις ακτίνες που αντιστοιχούν στα σημεία επαφής οπότε

$P\hat{A}O + P\hat{B}O = 90^0 + 90^0 = 180^0$ επομένως το τετράπλευρο ΡΑΟΒ είναι εγγράψιμο.

β)



Γνωρίζουμε ότι η διακεντρική ευθεία διχοτομεί τη γωνία των εφαπτόμενων τμημάτων άρα $A\hat{P}O = \frac{A\hat{P}B}{2} = \frac{60^0}{2} = 30^0$.

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΡ η γωνία P_1 ισούται λόγω του (β) ερωτήματος με 30^0, οπότε η απέναντι κάθετη πλευρά ισούται με το μισό της υποτείνουσας,

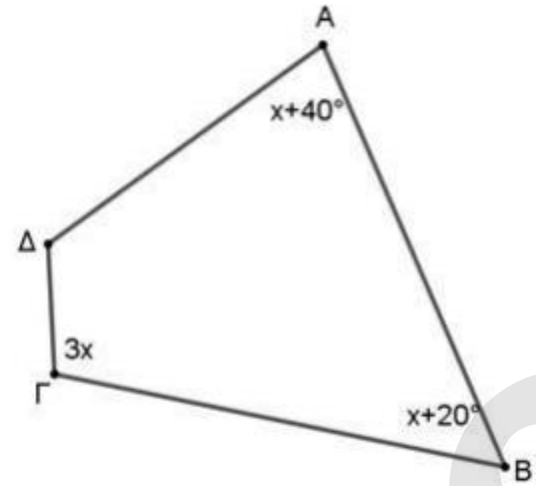
άρα $OA = \frac{OP}{2}$ ή $OP = 2 \cdot OA = 2 \cdot 4 = 8$ cm.

3. Θέμα 13818

Δίνεται το τετράπλευρο ΑΒΓΔ το οποίο είναι εγγράψιμο. Οι γωνίες Α, Β, Γ έχουν αντίστοιχα μέτρα $x + 40°$, $x + 20°$, $3x$. Να υπολογίσετε :

α) πόσες μοίρες είναι το x. (Μονάδες 12)

β) τα μέτρα των γωνιών του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ

α) Επειδή το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο, οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές. Άρα έτσι έχουμε $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 180°$ ή $x + 40° + 3x = 180°$ ή $4x = 140°$ ή $x = 35°$.

β) Έχουμε $\hat{A} = 35° + 40° = 75°$, $\hat{B} = 35° + 20° = 55°$, $\hat{\Gamma} = 3 \cdot 35° = 105°$.

Οι γωνίες Β και Δ είναι απέναντι γωνίες του εγγράψιμου τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, άρα είναι παραπληρωματικές. Οπότε $\hat{B} + \hat{\Delta} = 180°$ ή $55° + \hat{\Delta} = 180°$ ή

$\hat{\Delta} = 125°$.

Θέμα 4 - Κωδικοί:

1769, 1774, 1776, 1799, 1807, 1847, 1864, 1886, 1896, 13521, 13538

13670, 13671, 13847, 14878

4. Θέμα 1769

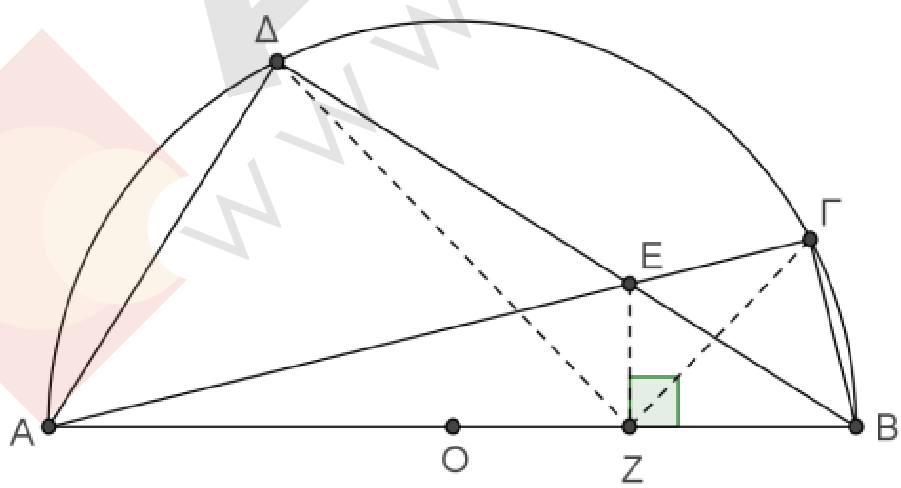
Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ και δύο χορδές του ΑΓ και ΒΔ, οι οποίες τέμνονται στο σημείο Ε. Φέρουμε $ΕΖ \perp ΑΒ$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Οι γωνίες ΔΑΓ και ΔΒΓ είναι ίσες (Μονάδες 7)

β) Τα τετράπλευρα ΑΔΕΖ και ΕΖΒΓ είναι εγγράψιμα. (Μονάδες 9)

γ) Η ΕΖ είναι διχοτόμος της γωνίας $Δ\hat{Ζ}Γ$. (Μονάδες 9)



ΛΥΣΗ

α) Επειδή οι γωνίες $\Delta\hat{A}\Gamma$ και $\Delta\hat{B}\Gamma$ είναι εγγεγραμμένες και βαίνουν στο τόξο $\overset{\frown}{\Delta\Gamma}$, συμπεραίνουμε ότι είναι ίσες.

β) Είναι $A\hat{\Delta}B = A\hat{\Gamma}B = 90^o$ γιατί είναι εγγεγραμμένες σε ημικύκλιο. Στο τετράπλευρο ΑΔΕΖ είναι

$A\hat{\Delta}B + E\hat{Z}A = 90^o + 90^o = 180^o$, άρα είναι εγγράψιμο.

Στο τετράπλευρο ΕΖΒΓ είναι

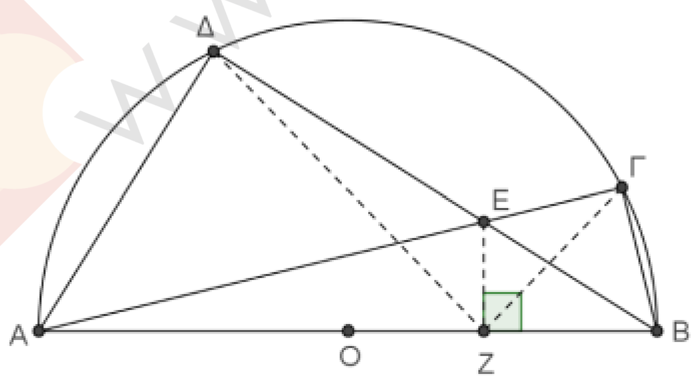
$A\hat{\Gamma}B + E\hat{Z}B = 90^o + 90^o = 180^o$, άρα είναι εγγράψιμο.

γ) Στο εγγράψιμο ΑΔΕΖ η πλευρά ΔΕ φαίνεται από τις κορυφές Α, Ζ υπό ίσες γωνίες, δηλαδή $\Delta\hat{Z}E = \Delta\hat{A}E \Leftrightarrow \Delta\hat{Z}E = \Delta\hat{A}\Gamma$ (1).

Στο εγγράψιμο ΕΖΒΓ η πλευρά ΕΓ φαίνεται από τις κορυφές Ζ και Β υπό ίσες γωνίες, δηλαδή: $E\hat{Z}\Gamma = E\hat{B}\Gamma \Leftrightarrow E\hat{Z}\Gamma = \Delta\hat{B}\Gamma$ (2).

Από το ερώτημα (α) έχουμε ότι $\Delta\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{B}\Gamma$ οπότε από τις (1), (2) προκύπτει: $\Delta\hat{Z}E = E\hat{Z}\Gamma$.

Άρα η ΕΖ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{Z}\Gamma$.



5. Θέμα 1774

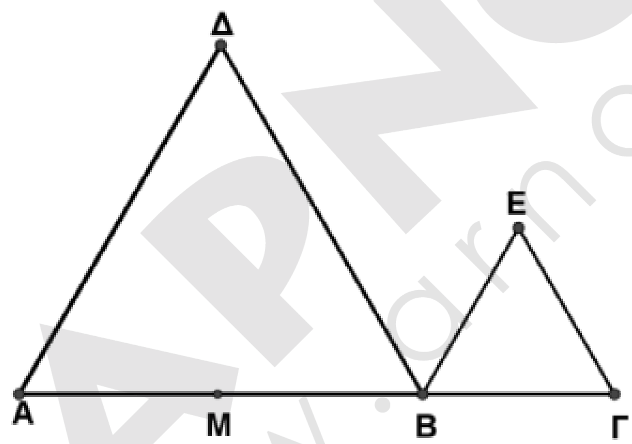
Έστω Α, Β, Γ συνευθειακά σημεία με ΑΒ=2ΒΓ. Θεωρούμε το μέσο Μ της ΑΒ. Προς το ίδιο ημιεπίπεδο κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΔΒ, ΒΕΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΔΕΒ είναι τραπέζιο (ΑΔ//ΒΕ). (Μονάδες 9)

β) Τα τρίγωνα ΔΜΒ, ΔΕΒ είναι ίσα. (Μονάδες 8)

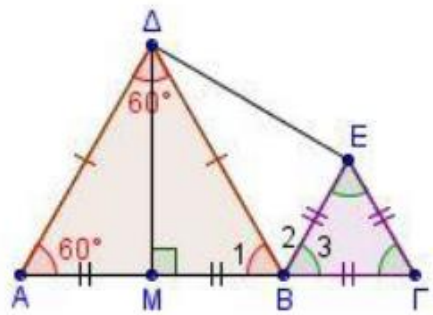
γ) Το τετράπλευρο ΔΜΒΕ είναι εγγράψιμο. (Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ

α) Είναι $\widehat{A} = \widehat{B}_3 = 60^o$ ως γωνίες ισοπλεύρων τριγώνων. Οι ίσες γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{B}_3$ είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη ΑΔ και ΕΒ που τέμνονται από την ΑΓ οπότε ΑΔ // ΒΕ.

Έστω ότι ΔΕ // ΑΒ. Τότε το τετράπλευρο ΑΔΕΒ θα έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες και θα είναι παραλληλόγραμμο, οπότε ΑΔ = ΒΕ. Όμως ΑΒ =ΑΔ και ΒΕ = ΒΓ άρα ΑΒ = ΒΓ που είναι άτοπο αφού ΑΒ = 2ΒΓ. Άρα οι ΔΕ, ΑΒ τέμνονται και συνεπώς το ΑΔΕΒ είναι τραπέζιο.



β) Είναι $\widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 + \widehat{B}_3 = 180^o \Leftrightarrow 60^o + \widehat{B}_2 + 60^o = 180^o \Leftrightarrow \widehat{B}_2 = 60^o$ και $\widehat{B}_1 = 60^o$ ως γωνία του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΔ.

Τα τρίγωνα ΔΜΒ και ΔΕΒ έχουν:

ΔΒ κοινή πλευρά

ΒΜ = ΕΒ διότι $BM = \frac{AB}{2} = \frac{2B\Gamma}{2} = B\Gamma = EB$

$\widehat{B}_2 = 60^o = \widehat{B}_1$

Σύμφωνα με το κριτήριο Π – Γ – Π τα τρίγωνα είναι ίσα.

γ) Το ΔΜ είναι διάμεσος στο ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΔ, άρα θα είναι και ύψος του οπότε $\Delta\widehat{M}B = 90^o$.

Επειδή τα τρίγωνα ΔΜΒ και ΔΕΒ είναι ίσα, είναι και $\Delta\widehat{E}B = \widehat{M} = 90^o$ αφού οι γωνίες αυτές είναι απέναντι από την πλευρά κοινή τους πλευρά ΔΒ. Οπότε $\Delta\widehat{E}B + \widehat{M} = 180^o$.

Άρα το τετράπλευρο ΔΜΒΕ έχει δύο απέναντι γωνίες παραπληρωματικές, οπότε είναι εγγράψιμο.

6. Θέμα 1776

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΕΒ, ΑΓΔ. Ονομάζουμε Ζ το σημείο τομής των ευθυγράμμων τμημάτων ΒΔ, ΓΕ.

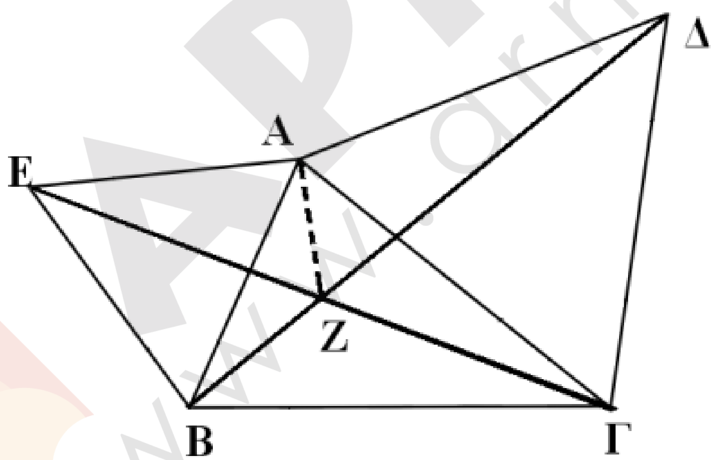
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΕΓ και ΑΒΔ είναι ίσα και να γράψετε τα ζεύγη των ίσων γωνιών

(Μονάδες 10)

β) Τα τετράπλευρα ΑΖΓΔ, ΑΖΒΕ είναι εγγράψιμα. (Μονάδες 10)

γ) Η γωνία $B\hat{Z}\Gamma$ είναι 120^0 . (Μονάδες 5)



ΛΥΣΗ

α) Τα τρίγωνα ΑΕΓ και ΑΒΔ έχουν:

ΑΕ = ΑΒ, ως πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου ΑΕΒ

ΑΓ = ΑΔ, ως πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου ΑΓΔ

$E\hat{A}\Gamma = B\hat{A}\Delta$, διότι $E\hat{A}\Gamma = B\hat{A}\Gamma + 60^o$ και $B\hat{A}\Delta = B\hat{A}\Gamma + 60^o$.

Σύμφωνα με το κριτήριο Π – Γ – Π, τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε: $A\hat{E}\Gamma = A\hat{B}\Delta$ (1) επειδή είναι απέναντι των ίσων πλευρών ΑΓ και ΑΔ και $A\hat{\Delta}B = A\hat{\Gamma}E$ (2) επειδή είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΒ και ΑΕ.

β) Επειδή $A\hat{\Gamma}Z = A\hat{\Delta}Z$, λόγω της (2), στο τετράπλευρο ΑΖΓΔ η πλευρά του ΑΖ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές Γ και Δ υπό ίσες γωνίες, οπότε το τετράπλευρο ΑΖΓΔ είναι εγγράψιμο.

Επειδή $A\hat{E}Z = A\hat{B}Z$, λόγω της (1), στο τετράπλευρο ΑΖΒΕ η πλευρά ΑΖ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές Ε και Β υπό ίσες γωνίες, οπότε το τετράπλευρο ΑΖΒΕ είναι εγγράψιμο.

γ) Οι γωνίες $A\hat{\Delta}\Gamma$ και $A\hat{Z}\Gamma$ είναι απέναντι γωνίες του εγγράψιμου τετραπλεύρου ΑΖΓΔ, άρα είναι παραπληρωματικές. Οπότε:

$A\hat{Z}\Gamma + A\hat{\Delta}\Gamma = 180^o \Leftrightarrow A\hat{Z}\Gamma + 60^o = 180^o \Leftrightarrow A\hat{Z}\Gamma = 120^o$.

Όμοια, στο εγγράψιμο ΑΖΒΕ είναι:

$A\hat{Z}B + A\hat{E}B = 180^o \Leftrightarrow A\hat{Z}B + 60^o = 180^o \Leftrightarrow A\hat{Z}B = 120^o$.

Τελικά:

$A\hat{Z}\Gamma + A\hat{Z}B + B\hat{Z}\Gamma = 180^o \Leftrightarrow 120^o + 120^o + B\hat{Z}\Gamma = 360^o \Leftrightarrow B\hat{Z}\Gamma = 120^o$.

7. Θέμα 1799

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και ΑΔ, ΒΕ τα ύψη του.

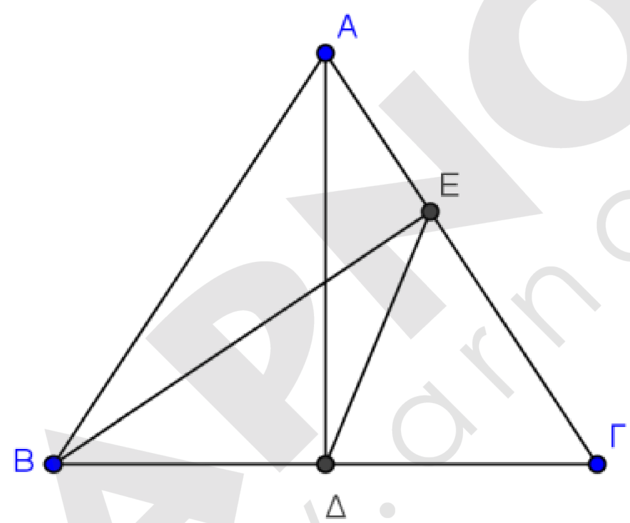
Να αποδείξετε ότι:

α) ΒΓ =2 ΕΔ. (Μονάδες 6)

β) $B\hat{E}\Delta = \frac{\hat{A}}{2}$. (Μονάδες 7)

γ) Το τετράπλευρο ΑΕΔΒ είναι εγγράψιμο. (Μονάδες 6)

δ) $A\hat{B}E = A\hat{\Delta}E$. (Μονάδες 6)



ΛΥΣΗ

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΕΓ η ΕΔ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα $E\Delta = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\Gamma = 2E\Delta$.

β) Είναι $E\Delta = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow E\Delta = \Delta B$

Άρα το τρίγωνο ΕΔΒ είναι ισοσκελές και έχει $B\hat{E}\Delta = E\hat{B}\Delta$.

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΕΒΓ, έχουμε:

$E\hat{B}\Gamma + \hat{\Gamma} = 90^o \Leftrightarrow E\hat{B}\Delta + \hat{\Gamma} = 90^o \Leftrightarrow B\hat{E}\Delta = 90^o - \hat{\Gamma}$

Οπότε έχουμε $B\hat{E}\Delta = \frac{\hat{A}}{2}$.

γ) Επειδή $A\hat{E}B = A\hat{\Delta}B = 90^o$, η πλευρά ΑΒ φαίνεται από τις κορυφές Δ, Ε υπό ίσες γωνίες, οπότε το τετράπλευρο ΑΕΔΒ είναι εγγράψιμο.

δ) Επειδή το ΑΕΔΒ είναι εγγράψιμο, η πλευρά του ΑΕ φαίνεται από τις κορυφές Β, Δ υπό ίσες γωνίες, οπότε $A\hat{B}E = A\hat{\Delta}E$.

8. Θέμα 1807

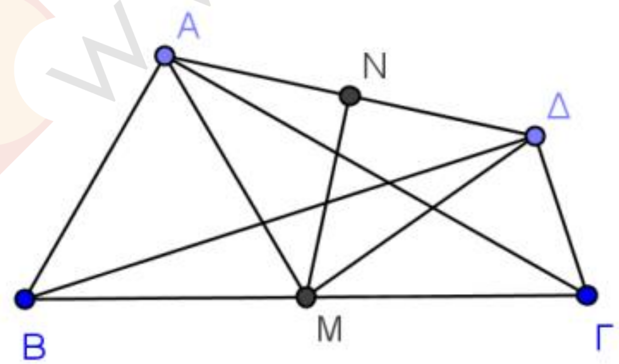
Δίνονται ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΓ με $\hat{A} = 90^o$, $\hat{\Delta} = 90^o$ και Μ, Ν τα μέσα των ΒΓ και ΑΔ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΜ = ΜΔ. (Μονάδες 10)

β) Η ΜΝ είναι κάθετη στην ΑΔ. (Μονάδες 10)

γ) $\Gamma\hat{B}\Delta = \Gamma\hat{A}\Delta$. (Μονάδες 5)

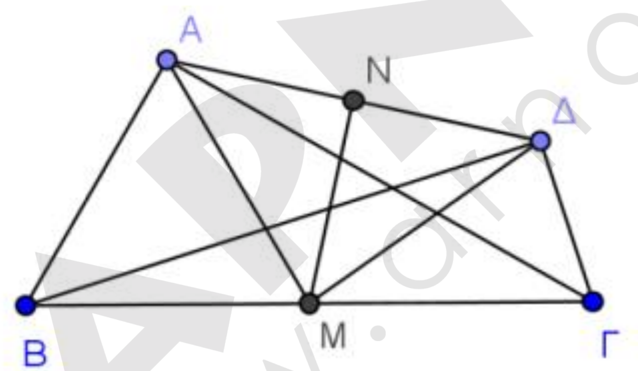


ΛΥΣΗ

α) Η ΑΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, άρα $AM = \dfrac{B\Gamma}{2}$.

Η ΔΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΔΒΓ, άρα $\Delta M = \dfrac{B\Gamma}{2}$.

Οπότε προκύπτει ότι ΑΜ =ΜΔ.



β)Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΜΔ η ΜΝ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση του, άρα είναι και ύψος του τριγώνου, δηλαδή $MN \perp A\Delta$.

γ) Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ ισχύει $B\hat{A}\Gamma = B\hat{\Delta}\Gamma = 90^o$. Δηλαδή η πλευρά ΒΓ φαίνεται από τις κορυφές Α και Δ υπό ίσες γωνίες, άρα το ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο. Επομένως η πλευρά ΔΓ φαίνεται από τις κορυφές Β και Α υπό ίσες γωνίες, δηλαδή $\Gamma\hat{B}\Delta = \Gamma\hat{A}\Delta$.

9. Θέμα 1847

Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Έστω σημείο Α εξωτερικό του κύκλου και τα εφαπτόμενα τμήματα ΑΒ και ΑΓ ώστε να ισχύει $B\hat{A}\Gamma = 60^o$. Το ΟΑ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Δ. Η εφαπτόμενη του κύκλου στο Δ, τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα Ε και Ζ αντίστοιχα.

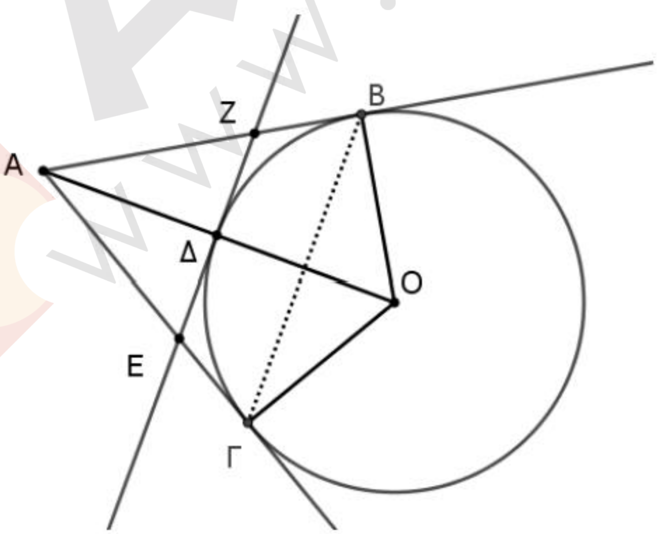
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΒΟΓ είναι εγγράψιμο με ΟΑ=2ΟΒ. (Μονάδες 6)

β) Το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 6)

γ) $2ZB = AZ$ (Μονάδες 7)

δ) Το τετράπλευρο ΕΖΒΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 6)



ΛΥΣΗ

α) Οι εφαπτόμενες ΑΒ και ΑΓ είναι κάθετες στις ακτίνες ΟΑ και ΟΒ, άρα $OB \perp AB$ και $O\Gamma \perp A\Gamma$ οπότε $O\hat{B}A = O\hat{\Gamma}A = 90^o$.

Στο τετράπλευρο ΑΒΟΓ είναι $O\hat{B}A + O\hat{\Gamma}A = 90^o + 90^o = 180^o$ οπότε είναι εγγράψιμο.

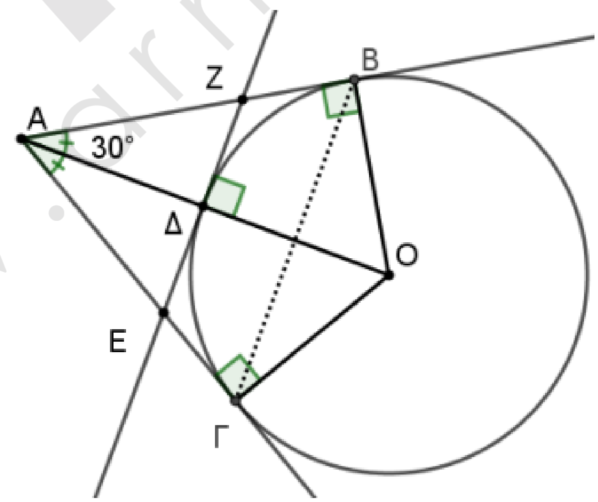
Η διακεντρική ευθεία ΑΟ διχοτομεί τη γωνία των εφαπτόμενων, δηλαδή

$O\hat{A}B = \frac{B\hat{A}\Gamma}{2} = \frac{60^o}{2} = 30^o$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ είναι $O\hat{A}B = 30^o$, άρα η απέναντι κάθετη πλευρά ισούται με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή: $OB = \frac{OA}{2} \Leftrightarrow OA = 2OB$.

β) Η ΖΕ είναι εφαπτομένη του κύκλου στο Δ, άρα $ZE \perp O\Delta$.

Στο τρίγωνο ΑΖΕ το ΑΔ είναι ύψος και διχοτόμος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές. Επειδή $B\hat{A}\Gamma = 60^o$ το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.



γ) Τα τμήματα ΖΒ και ΖΔ είναι εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από το Ζ, οπότε $ZB = Z\Delta$ (1). Στο ισόπλευρο τρίγωνο ΑΕΖ, το ύψος ΑΔ είναι και διάμεσος οπότε:

$ZB = Z\Delta = \frac{EZ}{2} \Leftrightarrow ZB = \frac{AZ}{2} \Leftrightarrow AZ = 2ZB$

δ) Η ΑΟ είναι μεσοκάθετη της χορδής ΒΓ που έχει άκρα τα σημεία επαφής. Τότε: ΒΓ ⊥ ΑΔ και ΕΖ ⊥ ΑΔ. Άρα ΕΖ // ΒΓ, και οι πλευρές ΒΖ και ΕΓ τέμνονται στο Α, άρα δεν είναι παράλληλες, οπότε ΕΖΒΓ τραπέζιο. Επίσης τα τμήματα ΕΓ και ΕΔ είναι εφαπτόμενα του κύκλου που άγονται από το Ε, άρα ΕΓ = ΕΔ (2).

Επειδή ΖΔ = ΕΔ, από τις (1), (2) προκύπτει ΖΒ = ΕΓ, οπότε το τραπέζιο ΕΖΒΓ είναι ισοσκελές.

10. Θέμα 1864

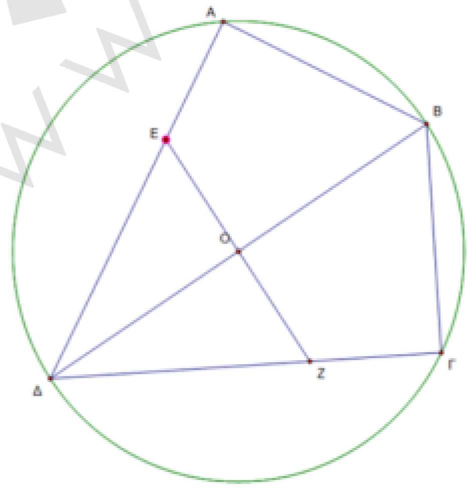
Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και ο περιγεγραμμένος του κύκλος (Ο, ρ) ώστε η διαγώνιος του ΔΒ να είναι διάμετρος του κύκλου. Η γωνία Β είναι διπλάσια της γωνίας Δ και οι πλευρές ΑΒ και ΒΓ είναι ίσες. Φέρουμε κάθετη στη ΒΔ στο Ο, η οποία τέμνει τις πλευρές ΑΔ και ΓΔ στα Ε και Ζ αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 6)

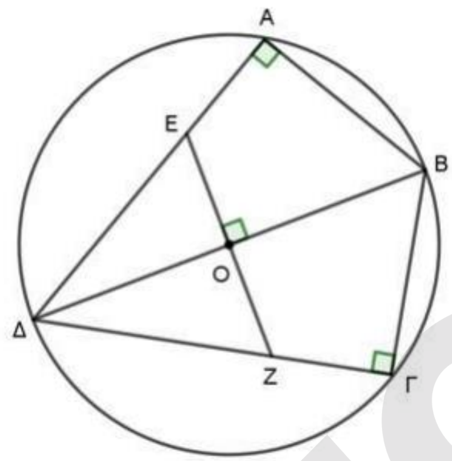
β) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔΑΒ και ΔΓΒ. (Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΟ είναι ρόμβος. (Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΟΕ είναι εγγράψιμο σε κύκλο. (Μονάδες 6)



ΛΥΣΗ



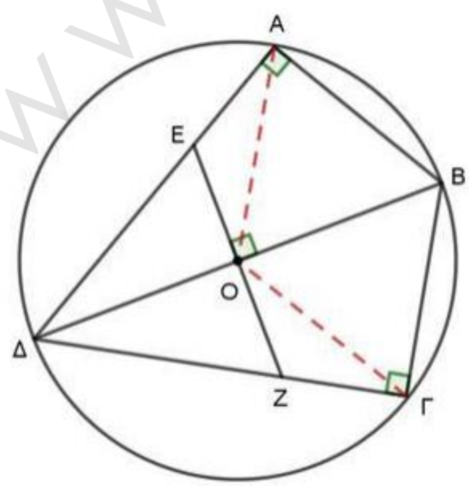
α) Είναι $\hat{A} = \hat{\Gamma} = 90^o$ ως εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ημικύκλιο. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο άρα $\hat{B} + \hat{\Delta} = 180^o$. Όμως $\hat{B} = 2\hat{\Delta}$, άρα

$2\hat{\Delta} + \hat{\Delta} = 180^o \Leftrightarrow 3\hat{\Delta} = 180^o \Leftrightarrow \hat{\Delta} = 60^o$ και $\hat{B} = 120^o$.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΑΒ και ΔΓΒ έχουν:

- ΒΔ κοινή πλευρά και
- ΑΒ = ΒΓ, από υπόθεση

Άρα τα τρίγωνα ΔΑΒ και ΔΓΒ είναι ίσα.



γ) Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΔ είναι ίσα, ισχύει $\mathrm{A\hat{\Delta}B} = \mathrm{\Gamma\hat{\Delta}B}$ διότι είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΒ, ΒΓ αντίστοιχα, οπότε η ΔΒ είναι διχοτόμος της $\mathrm{A\hat{\Delta}\Gamma}$ οπότε:

$\mathrm{A\hat{\Delta}B} = \mathrm{B\hat{\Delta}\Gamma} = \frac{\mathrm{A\hat{\Delta}\Gamma}}{2} = \frac{60^o}{2} = 30^o$

Επειδή στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ είναι $\mathrm{A\hat{\Delta}B} = 30^o$, η απέναντι κάθετη ισούται με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή $\mathrm{AB} = \frac{\Delta\mathrm{B}}{2} = \frac{2\rho}{2} = \rho$

Όμοια, στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΓΒ είναι $\mathrm{\Gamma\hat{\Delta}B} = 30^o$, οπότε $\mathrm{B\Gamma} = \frac{\Delta\mathrm{B}}{2} = \frac{2\rho}{2} = \rho$

Επίσης ΟΑ = ΟΓ = ρ .

Οπότε προκύπτει ότι το ΑΒΓΟ έχει όλες τις πλευρές του ίσες άρα είναι ρόμβος.

δ) Ισχύει ότι: $\mathrm{E\hat{A}B} + \mathrm{E\hat{O}B} = 90^o + 90^o = 180^o$.

Δηλαδή δύο απέναντι γωνίες του τετραπλεύρου ΑΒΟΕ είναι παραπληρωματικές, άρα είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

11. Θέμα 1886

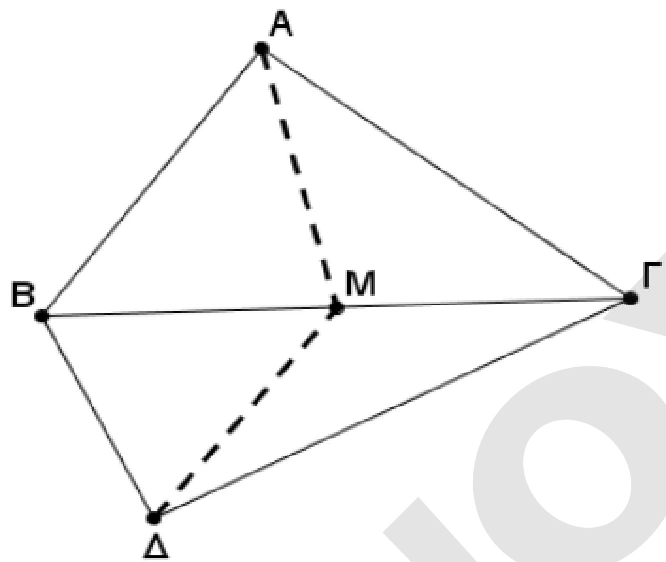
Δίνονται τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ ($\hat{\mathrm{A}} = 90^o$) και ΔΒΓ ($\hat{\Delta} = 90^o$) (όπου Α και Δ εκατέρωθεν της ΒΓ) και το μέσο Μ της ΒΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΑΜΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

β) $\mathrm{A\hat{M}\Delta} = 2\mathrm{A\hat{\Gamma}\Delta}$ (Μονάδες 9)

γ) $\mathrm{\Gamma\hat{B}\Delta} = \mathrm{\Gamma\hat{A}\Delta}$ (Μονάδες 7)



ΛΥΣΗ

α) Το τμήμα ΑΜ είναι διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας οπότε είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή ΑΜ $= \frac{ΒΓ}{2}$.

Όμοια, το τμήμα ΔΜ είναι διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ΒΔΓ, που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας οπότε είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή ΔΜ $= \frac{ΒΓ}{2}$.

Άρα ΑΜ = ΔΜ, οπότε το τρίγωνο ΑΜΔ είναι ισοσκελές.

β) Επειδή ΑΜ $= \frac{ΒΓ}{2}$ = ΜΓ το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισοσκελές οπότε ισχύει ότι:

$Μ\hat{Α}Γ = Μ\hat{Γ}Α$ (1)

Επειδή ΔΜ $= \frac{ΒΓ}{2}$ = ΜΓ το τρίγωνο ΔΜΓ είναι ισοσκελές οπότε ισχύει ότι:

$Μ\hat{Δ}Γ = Μ\hat{Γ}Δ$ (2)

Η γωνία $A\hat{M}B$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΜΓ άρα ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών, οπότε σε συνδυασμό με τη σχέση (1) βρίσκουμε:

$A\hat{M}B = M\hat{A}\Gamma + M\hat{\Gamma}A \Leftrightarrow A\hat{M}B = 2M\hat{\Gamma}A$ (3)

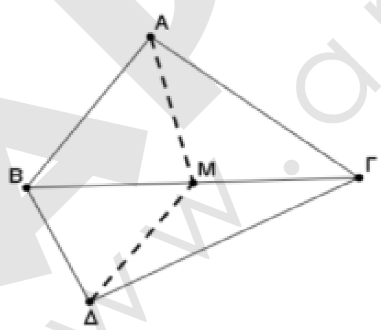
Η γωνία $B\hat{M}\Delta$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΜΔΓ, άρα χρησιμοποιώντας τη σχέση (2) παίρνουμε

$B\hat{M}\Delta = M\hat{\Delta}\Gamma + M\hat{\Gamma}\Delta \Leftrightarrow B\hat{M}\Delta = 2M\hat{\Gamma}\Delta$ (4)

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (3), (4) και βρίσκουμε:

$A\hat{M}B + B\hat{M}\Delta = 2M\hat{\Gamma}A + 2M\hat{\Gamma}\Delta \Leftrightarrow A\hat{M}\Delta = 2A\hat{\Gamma}\Delta$

γ) Είναι $B\hat{A}\Gamma + B\hat{\Delta}\Gamma = 90^o + 90^o = 180^o$, δηλαδή δύο απέναντι γωνίες του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ είναι παραπληρωματικές άρα το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο. Επομένως η πλευρά του ΓΔ φαίνεται από τις κορυφές Α και Β υπό ίσες γωνίες, δηλαδή $\Gamma\hat{B}\Delta = \Gamma\hat{A}\Delta$.



12. Θέμα 1896

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$) έχουμε ότι $\hat{B} = 30^0$. Φέρουμε το ύψος ΑΗ και τη διάμεσο ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ. Από την κορυφή Β φέρνουμε κάθετη στη διάμεσο ΑΜ, η οποία την τέμνει στο σημείο Ε όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

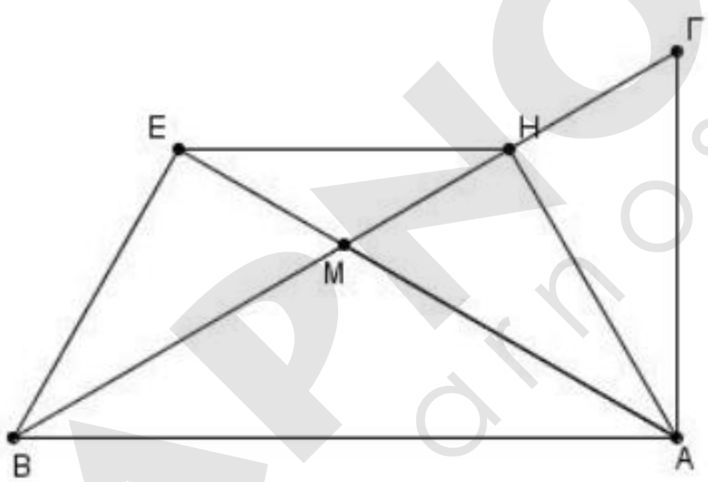
Να αποδείξετε ότι:

α) $BE = \dfrac{AB}{2}$, (Μονάδες 7)

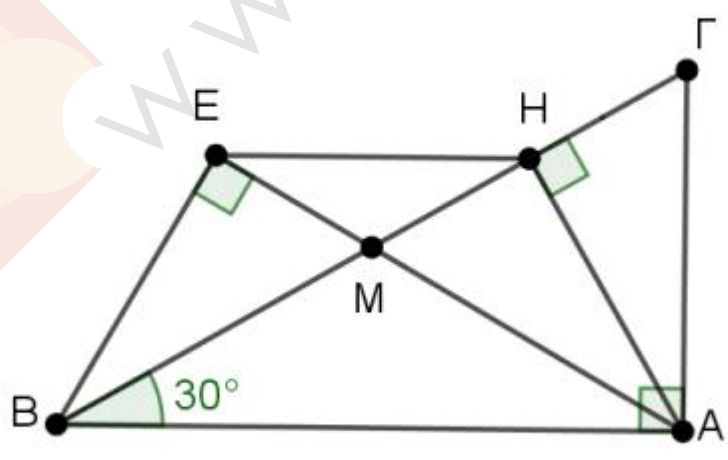
β) AH=BE, (Μονάδες 7)

γ) το τετράπλευρο AHEB είναι εγγράψιμο, (Μονάδες 6)

δ) EH//AB. (Μονάδες 5)



ΛΥΣΗ



α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα ΑΜ = ΜΒ = ΜΓ = $\frac{ΒΓ}{2}$.

Οπότε το τρίγωνο ΜΒΑ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΒ και $M\hat{A}B = M\hat{B}A = 30^o$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΕΑΒ είναι $E\hat{A}B = 30^o$, άρα ΒΕ = $\frac{AB}{2}$ (1).

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΗΑ είναι $H\hat{B}A = 30^o$, άρα ΑΗ = $\frac{AB}{2}$ (2). Τότε από (1), (2) προκύπτει ΑΗ = ΒΕ.

γ) Επειδή $B\hat{E}A = B\hat{H}A = 90^o$, στο τετράπλευρο ΑΗΕΒ η πλευρά του ΑΒ φαίνεται από τις κορυφές Ε και Η υπό ίσες γωνίες, άρα το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο.

δ) Στο τετράπλευρο ΑΗΕΒ, εφόσον είναι εγγράψιμο, η πλευρά του ΑΗ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες, δηλαδή ισχύει $A\hat{E}H = H\hat{B}A$.

Όμως $H\hat{B}A = 30^o$, άρα $A\hat{E}H = 30^o = E\hat{A}B$.

Άρα οι ευθείες ΕΗ και ΑΒ που τέμνονται από την ΑΕ σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες $A\hat{E}H$ και $E\hat{A}B$ ίσες. Επομένως ΕΗ // ΑΒ.

13. Θέμα 13521

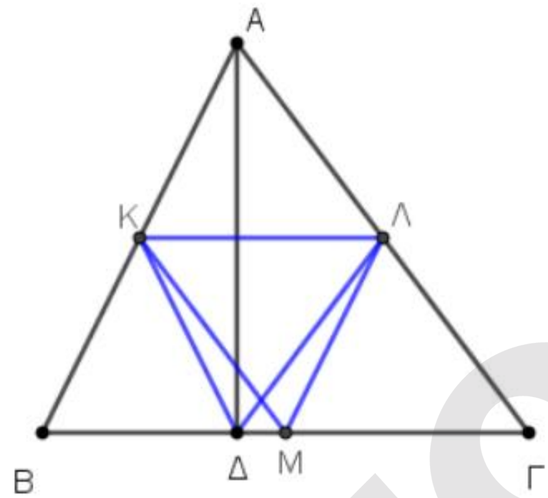
Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ < ΑΓ) φέρουμε το ύψος ΑΔ. Έστω Κ,Λ,Μ τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) ΚΛ // ΒΓ. (Μονάδες 5)

β) i. ΜΛ = ΚΔ (Μονάδες 6)

ii. ΚΜ = ΔΛ. (Μονάδες 6)

γ) Το ΚΛΜΔ είναι ένα εγγράψιμο τετράπλευρο. (Μονάδες 8)



Σχεδιάζουμε το τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ. Θεωρούμε τα μέσα Κ,Λ,Μ των ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ αντίστοιχα και φέρουμε το ύψος ΑΔ.

α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ, το Κ είναι μέσο του ΑΒ και το Λ είναι μέσο του ΑΓ. Άρα, ΚΛ//ΒΓ (1), επειδή το ΚΛ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ.

β) i. Στο τρίγωνο ΑΒΓ το Λ είναι μέσο του ΑΓ και το Μ είναι μέσο του ΒΓ.

Άρα, ΛΜ = $\frac{AB}{2}$ (2), επειδή το ΛΜ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΓ και ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ, είναι ΔΚ = $\frac{AB}{2}$ (3), επειδή η ΔΚ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσά του ΑΒ.

Από (2) και (3) συμπεραίνουμε ότι ΛΜ = ΔΚ. (4)

ii. Από (1), (4) και επειδή οι ΚΔ και ΜΛ δεν είναι παράλληλες, το ΚΛΜΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο, επομένως οι διαγώνιοι του είναι ίσες, δηλαδή ΚΜ = ΔΛ. (5)

γ) Τα σημεία Δ και Μ δεν ταυτίζονται γιατί αν το μέσο της ΒΓ Μ ταυτιζόταν με το ίχνος του ύψους ΑΔ, τότε το ύψος ΑΔ θα ήταν και διάμεσος, δηλαδή το τρίγωνο ΑΒΓ θα ήταν ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ, πράγμα άτοπο από την υπόθεση ΑΒ < ΑΓ. Επομένως το ΚΛΜΔ είναι τετράπλευρο.

Από το ερώτημα β)i. Το τραπέζιο ΚΛΜΔ είναι ισοσκελές. Επομένως ΚΔ = ΜΛ (6) και ΚΜ = ΔΛ.

Τα τρίγωνα ΚΔΛ και ΛΜΔ έχουν:

ΚΔ = ΜΛ, από (6)

ΚΜ = ΔΛ από (5)

ΚΛ κοινή πλευρά.

Επομένως τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί έχουν τις τρεις πλευρές τους ίσες.

Άρα και οι γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές θα είναι αντίστοιχα ίσες, $\text{Κ}\widehat{\Delta}\Lambda = \text{Κ}\widehat{\text{Μ}}\Lambda$. Επομένως το τετράπλευρο ΚΛΜΔ είναι εγγράψιμο γιατί η πλευρά ΚΛ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές Δ και Μ υπό ίσες γωνίες.

14. Θέμα 13538

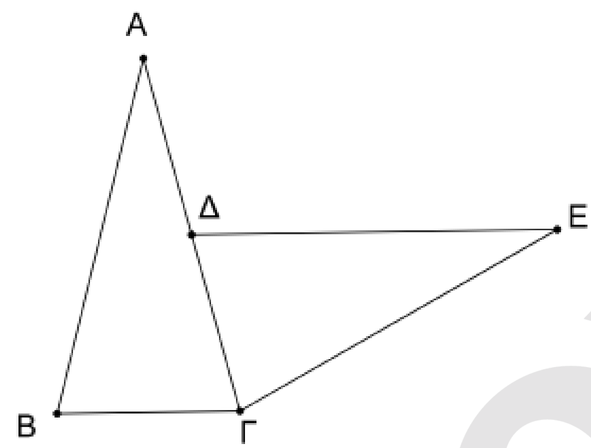
Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΓΔ με $ΑΒ = ΑΓ = ΕΓ = ΕΔ$, όπου Δ είναι το μέσο της ΑΓ και $ΒΓ = \frac{ΑΒ}{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΔΕ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

β) Αν η προέκταση της ΕΔ προς το Δ τέμνει την ΑΒ στο σημείο Ζ, να αποδείξετε ότι:

i. Το σημείο Ζ είναι το μέσο της ΑΒ. (Μονάδες 8)

ii. $\text{Ε}\widehat{\text{Α}}\Gamma = \text{Ε}\widehat{\text{Ζ}}\Gamma$. (Μονάδες 7)



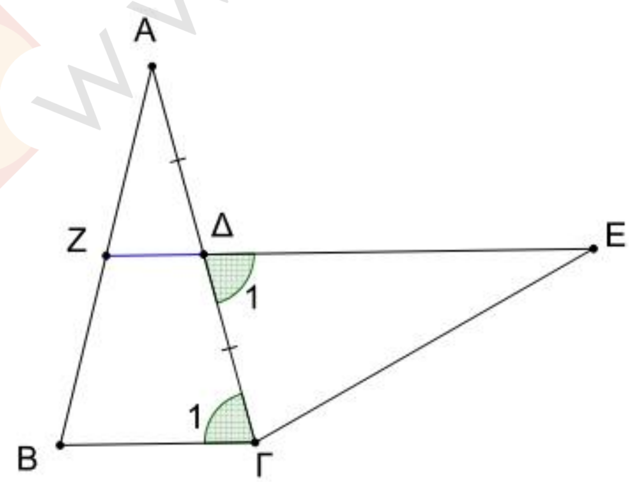
ΛΥΣΗ

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΓΔ έχουν:

- ΑΒ = ΕΓ, από τα δεδομένα.
- ΑΓ = ΕΔ, από τα δεδομένα.
- ΒΓ = ΓΔ, γιατί ΒΓ $= \frac{AB}{2}$ και ΓΔ $= \frac{A\Gamma}{2} = \frac{AB}{2}$, αφού το Δ είναι το μέσο της ΑΓ.

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΓΔ είναι ίσα, γιατί έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία (κριτήριο ΠΠΠ).

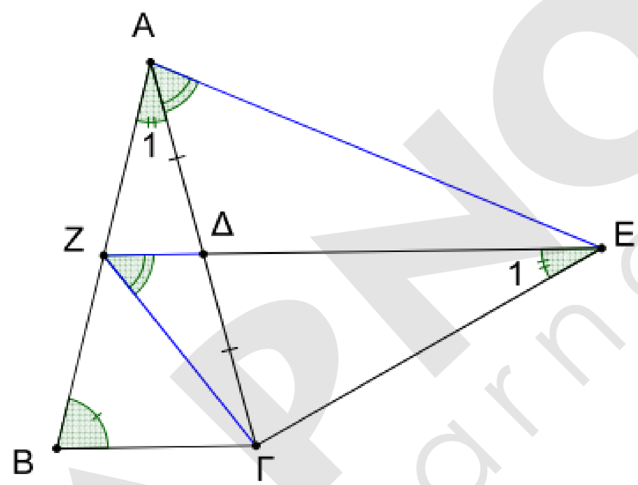
β)



i. Από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΓ και ΕΓΔ προκύπτει ότι $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Delta}_1$, γιατί είναι γωνίες απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΒ, ΕΓ αντίστοιχα.

Οι ΒΓ και ΔΕ τεμνόμενες από την ΑΓ σχηματίζουν ίσες τις εντός εναλλάξ γωνίες τους $\hat{\Gamma}_1$ και $\hat{\Delta}_1$, άρα η ΒΓ είναι παράλληλη στη ΔΕ.

Στο τρίγωνο ΑΒΓ το Δ είναι το μέσο της ΑΓ και η ΔΖ είναι παράλληλη στη ΒΓ, άρα το Ζ είναι το μέσο της ΑΒ.



ii. Από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΓ και ΕΓΔ προκύπτει ότι $\hat{A}_1 = \hat{E}_1$, γιατί είναι γωνίες απέναντι από τις ίσες πλευρές ΒΓ, ΓΔ αντίστοιχα. Άρα το τετράπλευρο ΑΕΓΖ

είναι εγγράψιμο, αφού η πλευρά του ΓΖ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές του Α και Ε υπό ίσες γωνίες. Έτσι στο εγγράψιμο ΑΕΓΖ η πλευρά ΓΕ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές του Α και Ζ υπό ίσες γωνίες, άρα θα είναι $E\hat{A}\Gamma = E\hat{Z}\Gamma$.

15. Θέμα 13670

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $ΒΓ = 2ΑΒ$. Έστω Δ το μέσο της πλευράς ΒΓ και Ε το μέσο του τμήματος ΒΔ. Από το σημείο Δ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την ΑΓ, η οποία τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΒΖΔ είναι ίσα.

(Μονάδες 10)

β) Το τετράπλευρο ΖΑΔΕ είναι εγγράψιμο.

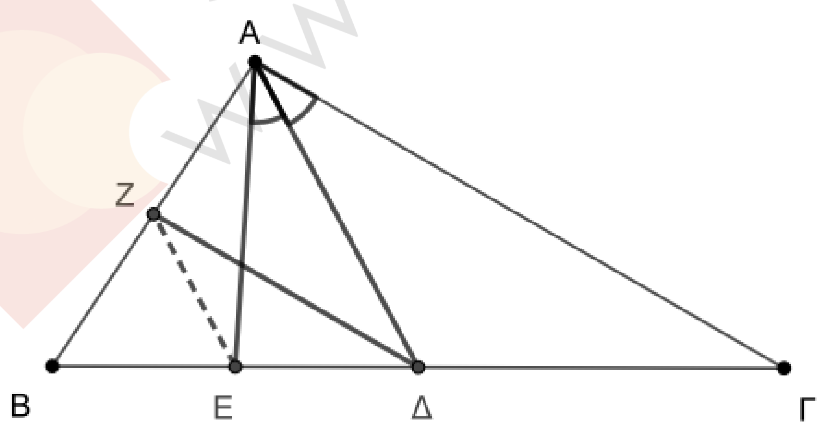
(Μονάδες 5)

γ) Η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $E\hat{A}Γ$.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $ΒΓ = 2ΑΒ$. Έστω Δ το μέσο της πλευράς ΒΓ και Ε το μέσο του τμήματος ΒΔ. Από το σημείο Δ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την ΑΓ, η οποία τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Ζ.



α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ, το τμήμα ΔΖ είναι παράλληλο προς την πλευρά ΑΓ και το Δ είναι μέσο της πλευράς ΒΓ. Επομένως, το Ζ θα είναι μέσο της πλευράς ΑΒ.

Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΒΖ έχουν:

$AB = B\Delta$, ως μισά του ΒΓ, αφού $B\Gamma = 2AB$ (υπόθεση) και $B\Gamma = 2B\Delta$ (το Δ είναι μέσο του ΒΓ).

$BE = BZ$, ως μισά των ίσων τμημάτων ΒΔ και ΑΒ αντίστοιχα.

$\hat{B}$ κοινή γωνία.

Επομένως, τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΒΖ είναι ίσα αφού έχουν δύο πλευρές ίσες μια προς μια και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (Π-Γ-Π).

β) Από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΕ και ΒΖΔ προκύπτει ότι $B\hat{A}E = B\hat{\Delta}Z$ (1), ως γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΒΕ και ΒΖ αντίστοιχα.

Το τετράπλευρο ΖΑΔΕ είναι εγγράψιμο διότι η πλευρά ΖΕ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές Α και Δ υπό τις ίσες γωνίες $B\hat{A}E$ και $B\hat{\Delta}Z$ αντίστοιχα.

γ) Το τρίγωνο ΒΑΔ είναι ισοσκελές με $AB = B\Delta$, οπότε $B\hat{A}\Delta = B\hat{\Delta}A$ (2), ως προσκείμενες στη βάση ΑΔ.

Αφαιρώντας τις ισότητες (1) και (2) κατά μέλη προκύπτει ότι:

$B\hat{A}\Delta - B\hat{A}E = B\hat{\Delta}A - B\hat{\Delta}Z$ ή $E\hat{A}\Delta = Z\hat{\Delta}A$ (3).

Επίσης, $Z\hat{\Delta}A = \Delta\hat{A}\Gamma$ (4), ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔΖ και ΑΓ τεμνόμενων από την ΑΔ.

Από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε $E\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}\Gamma$, άρα η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $E\hat{A}\Gamma$.

16. Θέμα 13671

Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{B} < \hat{\Gamma}$) θεωρούμε τα μέσα Δ, Ε, Ζ των πλευρών ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ αντίστοιχα. Έστω Η η προβολή της κορυφής Γ πάνω στην πλευρά ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:

α) $HE = E\Gamma$ και $HZ = Z\Gamma$.

(Μονάδες 10)

β) $Z\hat{\Delta}E = Z\hat{H}E$.

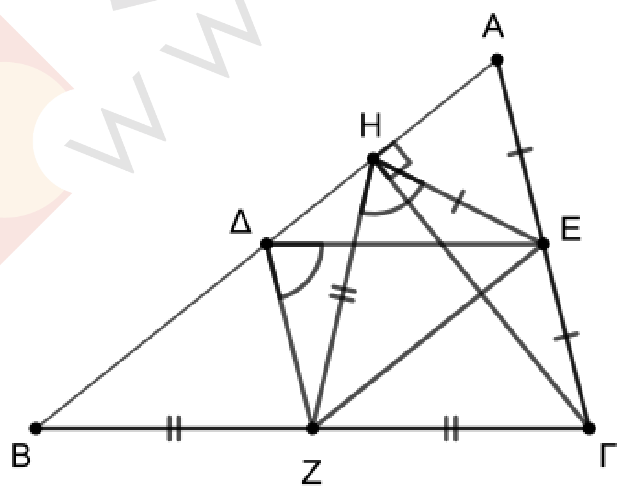
(Μονάδες 10)

γ) Το τετράπλευρο ΖΔΗΕ είναι εγγράψιμο.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

Σχεδιάζουμε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} < \hat{\Gamma}$ και σημειώνουμε τα μέσα Δ, Ε, Ζ των πλευρών ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Φέρουμε την προβολή Η της κορυφής Γ πάνω στην πλευρά ΑΒ, οπότε $\Gamma H \perp AB$.



α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΗΑΓ ($\widehat{\Gamma H A} = 90^o$), η ΗΕ είναι διάμεσος στην υποτείνουσα ΑΓ, οπότε $HE = E\Gamma = EA = \frac{A\Gamma}{2}$.

Ομοίως, στο ορθογώνιο τρίγωνο ΗΒΓ ($\widehat{\Gamma H B} = 90^o$), η ΗΖ είναι διάμεσος στην υποτείνουσα ΒΓ, οπότε $HZ = Z\Gamma = ZB = \frac{B\Gamma}{2}$.

β) Στο τρίγωνο ΑΒΓ, τα σημεία Δ και Ζ είναι μέσα των πλευρών ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα.

Επομένως, ΔΖ//ΑΓ και $\Delta Z = \frac{A\Gamma}{2} = E\Gamma$.

Άρα, το τετράπλευρο ΖΔΕΓ είναι παραλληλόγραμμο, αφού έχει τις δύο απέναντι πλευρές του ΔΖ και ΕΓ ίσες και παράλληλες, οπότε $Z\widehat{\Delta}E = E\widehat{\Gamma}Z$ (1).

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΗΕΓ είναι $\Gamma\widehat{H}E = H\widehat{\Gamma}E$ (2), αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΕΓ και ΗΕ αντίστοιχα.

Επίσης, στο ισοσκελές τρίγωνο ΗΖΓ είναι $Z\widehat{H}\Gamma = H\widehat{\Gamma}Z$ (3), αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΖΓ και ΗΖ αντίστοιχα.

Προσθέτοντας τις ισότητες (2) και (3) κατά μέλη, έχουμε:

$Z\widehat{H}\Gamma + \Gamma\widehat{H}E = H\widehat{\Gamma}Z + H\widehat{\Gamma}E$ και άρα $Z\widehat{H}E = E\widehat{\Gamma}Z$ (4).

Από τις ισότητες (1) και (4) προκύπτει τελικά ότι $Z\widehat{\Delta}E = Z\widehat{H}E$.

γ) Το τετράπλευρο ΖΔΗΕ είναι εγγράψιμο διότι η πλευρά ΖΕ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές Δ και Η υπό τις ίσες γωνίες $Z\widehat{\Delta}E$ και $Z\widehat{H}E$ αντίστοιχα.

17. Θέμα 13847

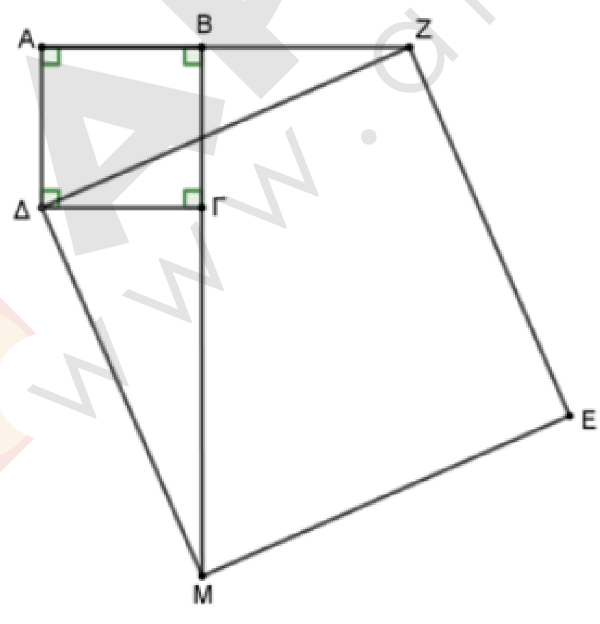
Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ προς το Β κατά τμήμα ΒΖ. Επίσης προεκτείνουμε την πλευρά ΒΓ προς το Γ κατά τμήμα ΓΜ = ΑΖ. Στη συνέχεια, θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε το τετράπλευρο ΔΜΕΖ να είναι παραλληλόγραμμο. Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΓΔΜ είναι ίσα. (Μονάδες 5)

β) το τετράπλευρο ΔΜΕΖ είναι τετράγωνο. (Μονάδες 9)

γ) το τετράπλευρο ΒΖΕΜ είναι εγγράψιμο. (Μονάδες 6)

δ) οι γωνίες ΒΜΖ και ΒΕΖ είναι ίσες. (Μονάδες 5)



ΛΥΣΗ

Για να είναι το τετράπλευρο ΔΜΕΖ τετράγωνο, γνωρίζοντας ότι είναι παραλληλόγραμμο, αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι ορθογώνιο και ρόμβος.

Έχουμε $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_3$ διότι βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΖ και ΓΜ των ίσων τριγώνων ΑΔΖ και ΓΔΜ.

Άρα $M\hat{\Delta}Z = \hat{\Delta}_2 + \hat{\Delta}_3 = \hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 = 90^\circ$, δηλαδή το παραλληλόγραμμο ΔΜΕΖ είναι και Ορθογώνιο διότι έχει μία ορθή γωνία.

Επειδή τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΓΔΜ είναι ίσα θα έχουν και τις υποτείνουσες αντίστοιχα ίσες, οπότε ΔΖ = ΔΜ. Άρα το ορθογώνιο ΔΜΕΖ είναι και ρόμβος, διότι έχει δύο διαδοχικές πλευρές είναι ίσες. Άρα είναι τετράγωνο.

γ) Για να είναι το τετράπλευρο ΒΖΕΜ εγγράψιμο αρκεί να αποδείξουμε ότι οι απέναντι γωνίες του ΖΒΜ και ΖΕΜ είναι παραπληρωματικές, δηλαδή

$Z\hat{B}M + Z\hat{E}M = 180^\circ$.

Από το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχουμε $A\hat{B}\Gamma = 90^\circ$ άρα και $Z\hat{B}M = 90^\circ$ ως παραπληρωματική.

Από το τετράγωνο ΔΜΕΖ έχουμε $Z\hat{E}M = 90^\circ$.

Άρα $Z\hat{B}M + Z\hat{E}M = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.

δ)

Επειδή το τετράπλευρο ΒΖΕΜ είναι εγγράψιμο η πλευρά ΒΖ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές του Μ και Ε υπό ίσες γωνίες, δηλαδή $B\hat{M}Z = B\hat{E}Z$.

18. Θέμα 14878

Δίνεται κύκλος (Ο, ρ) και σημείο Μ εξωτερικό του κύκλου. Από το σημείο Μ φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΜΑ και ΜΒ του κύκλου και στην προέκταση του ΟΒ παίρνουμε σημείο Γ ώστε ΒΓ = ΟΒ.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΜΒΟ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

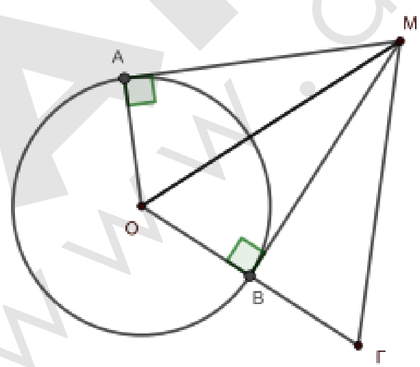
(Μονάδες 7)

β) Να προσδιορίσετε το κέντρο Λ του περιγεγραμμένου κύκλου του τετραπλεύρου ΑΜΒΟ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι ΒΛ //ΜΓ. (Μονάδες 9)

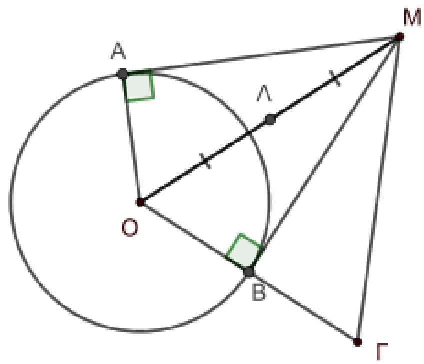
ΛΥΣΗ

α)

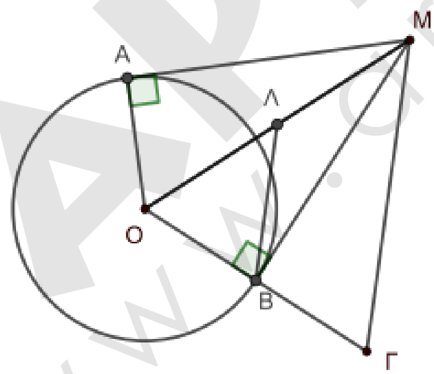


Οι ακτίνες ΟΑ και ΟΒ είναι κάθετες στα εφαπτόμενα τμήματα ΜΑ και ΜΒ, δηλαδή: ΟΑ $\perp$ ΜΑ και ΟΒ $\perp$ ΜΒ.

Τότε, στο τετράπλευρο ΑΜΒΟ ισχύει: $\widehat{A} + \widehat{B} = 90^o + 90^o = 180^o$, δηλαδή δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές, οπότε είναι εγγράψιμο.



β) Έστω Λ το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τετραπλεύρου ΑΜΒΟ. Οι γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{B}$ θα είναι εγγεγραμμένες γωνίες του κύκλου που περνάει από τις κορυφές του τετράπλευρου ΑΜΒΟ και είναι $\widehat{A} = \widehat{B} = 90^o$. Άρα οι γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{B}$ βαίνουν σε ημικύκλιο, δηλαδή η ΟΜ είναι διάμετρος του περιγεγραμμένου κύκλου. Έτσι το κέντρο Λ του περιγεγραμμένου κύκλου είναι το μέσο του τμήματος ΟΜ.



γ) Στο τρίγωνο ΟΜΓ τα Β, Λ είναι τα μέσα των ΟΓ, ΟΜ αντίστοιχα, άρα το τμήμα ΒΛ είναι παράλληλο στην τρίτη πλευρά του τριγώνου, δηλαδή ΒΛ // ΜΓ.