

Κεφ. 6.6. - Τράπεζα Θεμάτων 2022 - Γεωμετρία Α' Λυκείου**ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ**

Η Τράπεζα Θεμάτων για τη Γεωμετρία Α' Λυκείου είναι μία μεγάλη «θάλασσα». Εμείς όμως έχουμε φροντίσει για εσένα, συγκεντρώνοντας εκείνα τα θέματα που αποτελούν τη «βάση» της γνώσης και για τα υπόλοιπα. Μελετώντας και κατανοώντας το μοτίβο σκέψης για τα συγκεκριμένα, μπορείς να λύσεις με επιτυχία και τα υπόλοιπα θέματα. Στην ιστοσελίδα μας www.arnos.gr για το Course της Γεωμετρίας, μελετάς και προετοιμάζεσαι με την αναλυτική διδασκαλία σε ασκήσεις και θέματα, στο ύφος της Τράπεζας.

Θέμα 1 - Κωδικός:**12066****1. Θέμα 12066**

α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

- i. Αν οι χορδές δύο τόξων ενός κύκλου είναι ίσες, τότε και τα τόξα είναι ίσα.
- ii. Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι μεγαλύτερη από καθεμιά από τις γωνίες του τριγώνου.
- iii. Αν δύο διαφορετικές ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 είναι παράλληλες προς μια τρίτη ευθεία ϵ , τότε είναι και μεταξύ τους παράλληλες.
- iv. Αν ένα τετράπλευρο έχει όλες τις γωνίες του ίσες, τότε είναι τετράγωνο.

Έξυπνα & εύκολα!

ν. Αν σε ένα τετράπλευρο δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές, τότε το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

(Μονάδες 10)

β) Από ένα σημείο Α εκτός ευθείας ϵ φέρουμε το κάθετο τμήμα ΑΚ προς την ϵ και τα πλάγια τμήματα ΑΒ και ΑΓ. Να αποδείξετε ότι, αν τα πλάγια τμήματα ΑΒ και ΑΓ είναι ίσα, τότε τα ίχνη τους Β και Γ ισαπέχουν από το ίχνος Κ της καθέτου.

(Μονάδες 15)

Θέμα 2 - Κωδικοί:

12641, 13818

2. Θέμα 12641

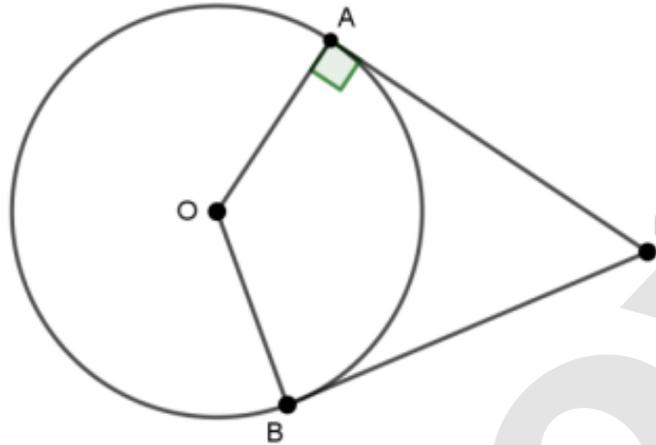
Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα 4 cm. Από σημείο Ρ εκτός του κύκλου φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ προς τον κύκλο. Επίσης η γωνία ΑΡΒ ισούται με 60° .

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΡΑΟΒ είναι εγγράψιμο. (Μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας ΑΡΟ. (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΟΡ. (Μονάδες 9)

Έξυπνα & εύκολα!


3. Θέμα 13818

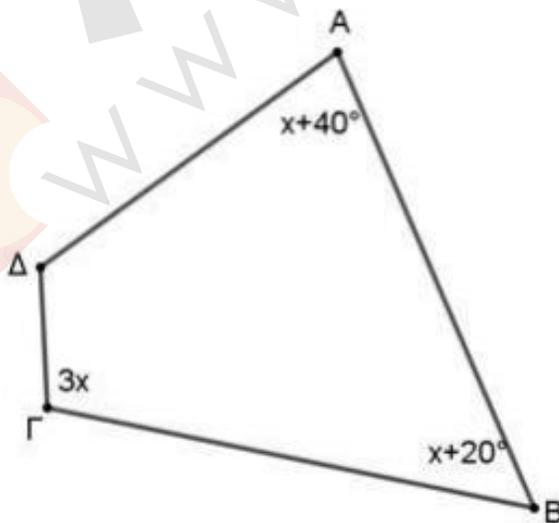
Δίνεται το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ το οποίο είναι εγγράψιμο. Οι γωνίες A, B, Γ έχουν αντίστοιχα μέτρα $x + 40^\circ, x + 20^\circ, 3x$. Να υπολογίσετε :

α) πόσες μοίρες είναι το x .

(Μονάδες 12)

β) τα μέτρα των γωνιών του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$.

(Μονάδες 13)



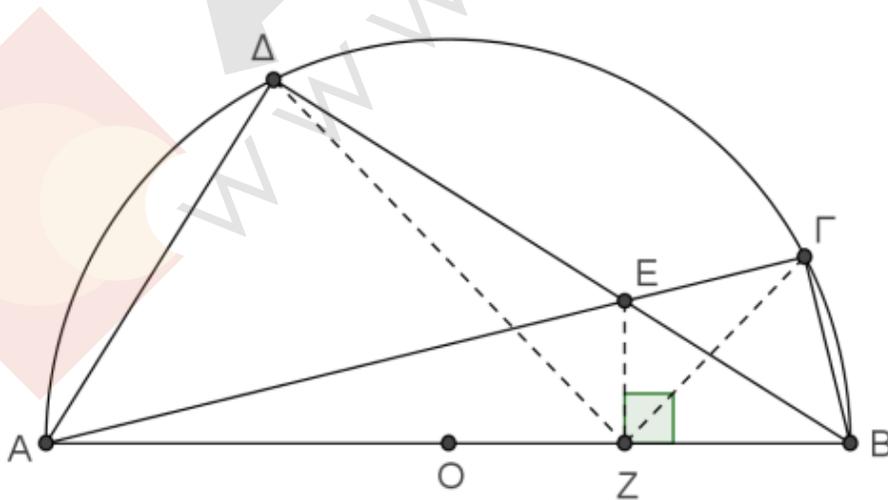
Έξυπνα & εύκολα!

Θέμα 4 - Κωδικοί:
1769, 1774, 1776, 1799, 1807, 1847, 1864, 1886, 1896, 13521, 13538
13670, 13671, 13847, 14878
4. Θέμα 1769

Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου AB και δύο χορδές του $A\Gamma$ και $B\Delta$, οι οποίες τέμνονται στο σημείο E . Φέρουμε $EZ \perp AB$.

Να αποδείξετε ότι:

- α) Οι γωνίες $\Delta A\Gamma$ και $\Delta B\Gamma$ είναι ίσες (Μονάδες 7)
- β) Τα τετράπλευρα $A\Delta E Z$ και $E Z B\Gamma$ είναι εγγράψιμα. (Μονάδες 9)
- γ) Η EZ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta \hat{Z}\Gamma$. (Μονάδες 9)



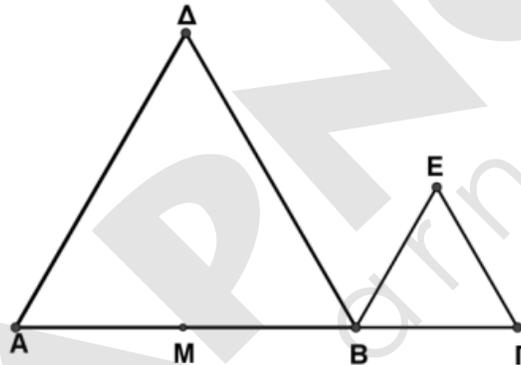
Έξυπνα & εύκολα!

5. Θέμα 1774

Έστω A, B, Γ συνευθειακά σημεία με $AB=2B\Gamma$. Θεωρούμε το μέσο M της AB . Προς το ίδιο ημιεπίπεδο κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα $\Delta B, B\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο $A\Delta E B$ είναι τραπέζιο ($A\Delta // B E$). (Μονάδες 9)
- β) Τα τρίγωνα $\Delta M B, \Delta E B$ είναι ίσα. (Μονάδες 8)
- γ) Το τετράπλευρο $\Delta M B E$ είναι εγγράψιμο. (Μονάδες 8)

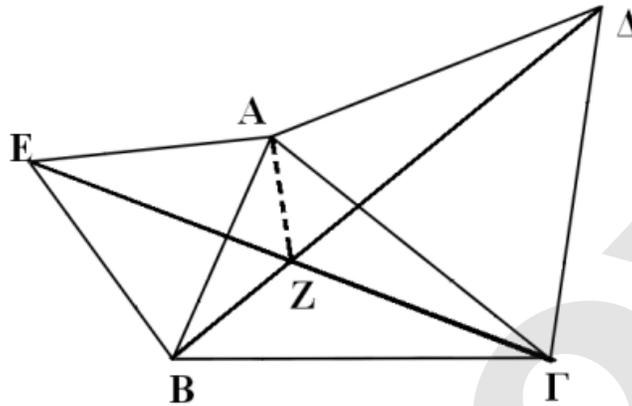

6. Θέμα 1776

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου τα ισόπλευρα τρίγωνα $AEB, A\Gamma\Delta$. Ονομάζουμε Z το σημείο τομής των ευθυγράμμων τμημάτων $B\Delta, \Gamma E$.

Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τρίγωνα $A\Gamma Z$ και $AB\Delta$ είναι ίσα και να γράψετε τα ζεύγη των ίσων γωνιών (Μονάδες 10)
- β) Τα τετράπλευρα $AZ\Gamma\Delta, AZBE$ είναι εγγράψιμα. (Μονάδες 10)
- γ) Η γωνία $\hat{BZ\Gamma}$ είναι 120° . (Μονάδες 5)

Έξυπνα & εύκολα!



7. Θέμα 1799

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $A\Delta$, BE τα ύψη του.

Να αποδείξετε ότι:

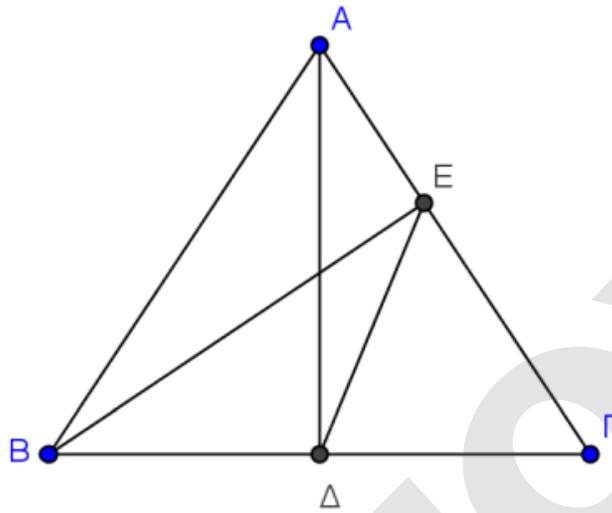
α) $B\Gamma = 2 \text{ } E\Delta$. (Μονάδες 6)

β) $\widehat{BE\Delta} = \frac{\widehat{A}}{2}$. (Μονάδες 7)

γ) Το τετράπλευρο $AE\Delta B$ είναι εγγράψιμο. (Μονάδες 6)

δ) $\widehat{ABE} = \widehat{A\Delta E}$. (Μονάδες 6)

Έξυπνα & εύκολα!


8. Θέμα 1807

Δίνονται ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta B\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{\Delta} = 90^\circ$ και M, N τα μέσα των $B\Gamma$ και $A\Delta$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) $AM = M\Delta$.

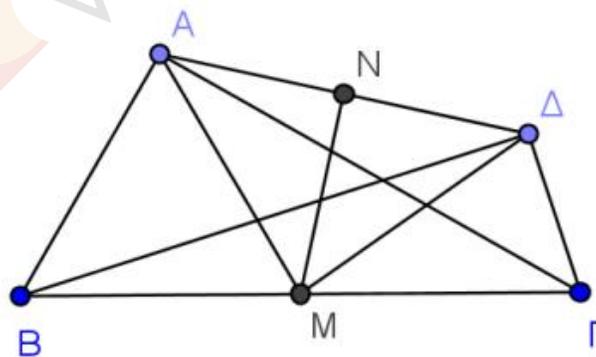
(Μονάδες 10)

β) Η MN είναι κάθετη στην $A\Delta$.

(Μονάδες 10)

γ) $\hat{\Gamma B\Delta} = \hat{\Gamma \hat{A} \Delta}$.

(Μονάδες 5)



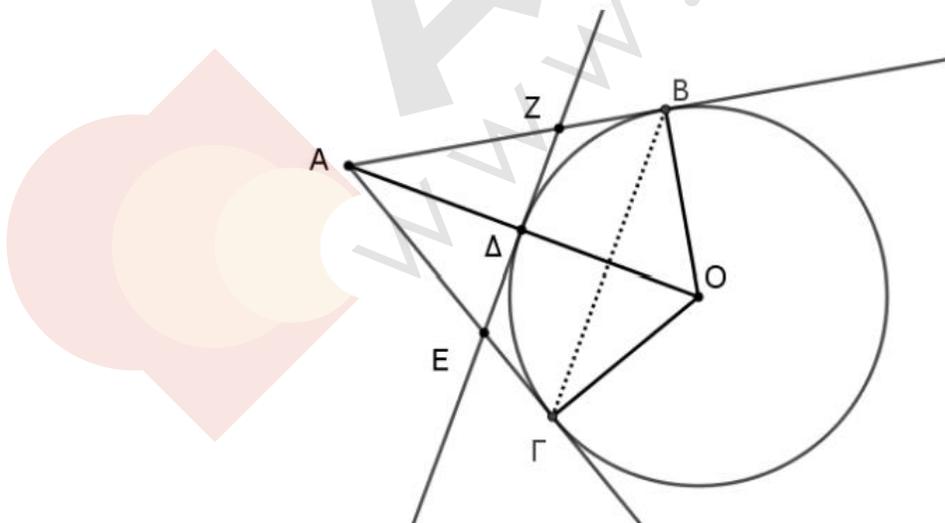
Έξυπνα & εύκολα!

9. Θέμα 1847

Δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Έστω σημείο A εξωτερικό του κύκλου και τα εφαπτόμενα τμήματα AB και AG ώστε να ισχύει $\widehat{BAG} = 60^\circ$. Το OA τέμνει τον κύκλο στο σημείο Δ . Η εφαπτόμενη του κύκλου στο Δ , τέμνει τις AB και AG στα E και Z αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο $ABOG$ είναι εγγράψιμο με $OA=2OB$. (Μονάδες 6)
- β) Το τρίγωνο AEZ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 6)
- γ) $2ZB = AZ$ (Μονάδες 7)
- δ) Το τετράπλευρο $EZBG$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 6)

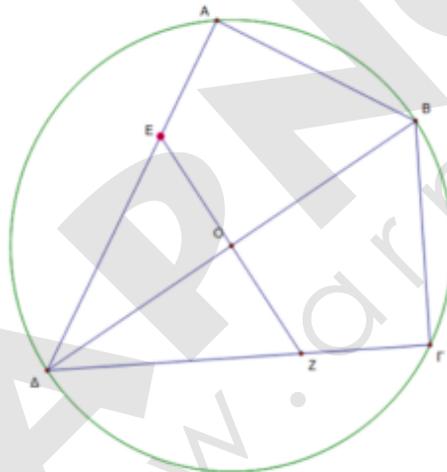


Έξυπνα & εύκολα!

10. Θέμα 1864

Δίνεται τετράπλευρο $ABΓΔ$ και ο περιγεγραμμένος του κύκλος (O, ρ) ώστε η διαγώνιος του ΔB να είναι διάμετρος του κύκλου. Η γωνία B είναι διπλάσια της γωνίας Δ και οι πλευρές AB και $BΓ$ είναι ίσες. Φέρουμε κάθετη στη $BΔ$ στο O , η οποία τέμνει τις πλευρές AD και $ΓD$ στα E και Z αντίστοιχα.

- α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου $ABΓΔ$. (Μονάδες 6)
 β) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔAB και $\Delta ΓB$. (Μονάδες 6)
 γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ABΓO$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 7)
 δ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ABOE$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο. (Μονάδες 6)

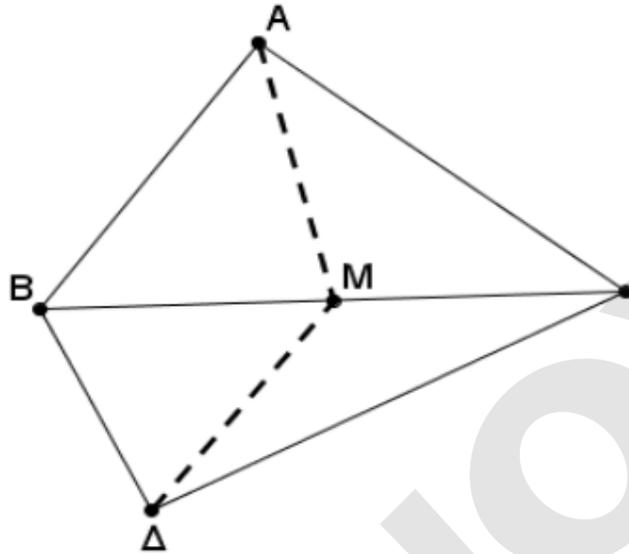

11. Θέμα 1886

Δίνονται τα ορθογώνια τρίγωνα $ABΓ$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και $\Delta BΓ$ ($\hat{\Delta} = 90^\circ$) (όπου A και Δ εκατέρωθεν της $BΓ$) και το μέσο M της $BΓ$.

Να αποδείξετε ότι:

- α) το τρίγωνο $AMΔ$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)
 β) $\hat{AMΔ} = 2\hat{AΓΔ}$ (Μονάδες 9)
 γ) $\hat{BΔ} = \hat{AΔ}$ (Μονάδες 7)

Έξυπνα & εύκολα!

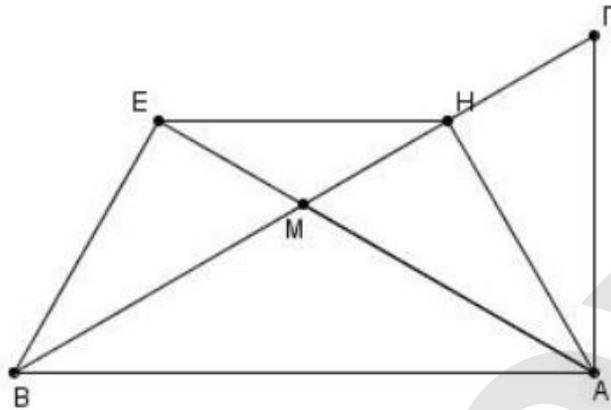

12. Θέμα 1896

Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) έχουμε ότι $\hat{B} = 30^\circ$. Φέρουμε το ύψος AH και τη διάμεσο AM του τριγώνου $AB\Gamma$. Από την κορυφή B φέρνουμε κάθετη στη διάμεσο AM , η οποία την τέμνει στο σημείο E όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Να αποδείξετε ότι:

- | | |
|---|-------------|
| α) $BE = \frac{AB}{2}$, | (Μονάδες 7) |
| β) $AH = BE$, | (Μονάδες 7) |
| γ) το τετράπλευρο $AHEB$ είναι εγγράψιμο, | (Μονάδες 6) |
| δ) $EH \parallel AB$. | (Μονάδες 5) |

Έξυπνα & εύκολα!


13. Θέμα 13521

Σε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB < A\Gamma$) φέρουμε το ύψος $A\Delta$. Έστω K, Λ, M τα μέσα των $AB, A\Gamma, B\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $K\Lambda \parallel B\Gamma$.

(Μονάδες 5)

β) i. $M\Lambda = K\Delta$

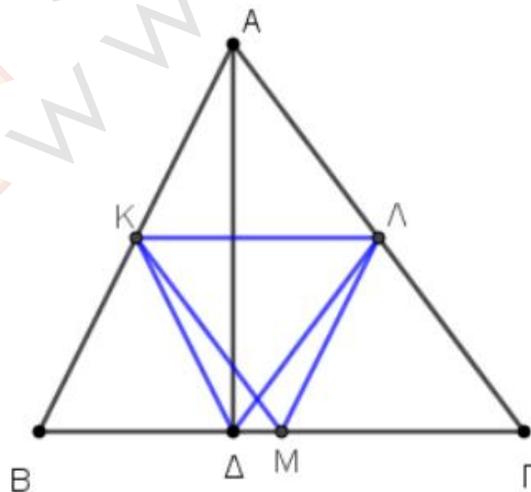
(Μονάδες 6)

ii. $KM = \Delta\Lambda$.

(Μονάδες 6)

γ) Το $K\Lambda M\Delta$ είναι ένα εγγράψιμο τετράπλευρο.

(Μονάδες 8)



Έξυπνα & εύκολα!

14. Θέμα 13538

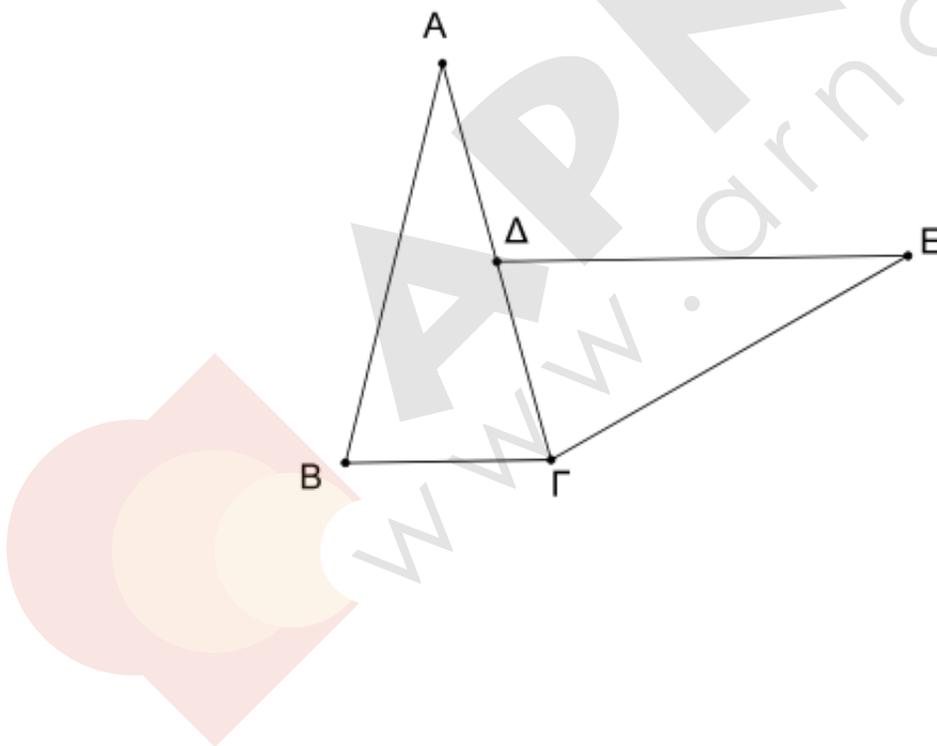
Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ και $E\Gamma\Delta$ με $AB = A\Gamma = E\Gamma = E\Delta$, όπου Δ είναι το μέσο της $A\Gamma$ και $B\Gamma = \frac{AB}{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Gamma\Delta E$ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

β) Αν η προέκταση της $E\Delta$ προς το Δ τέμνει την AB στο σημείο Z , να αποδείξετε ότι:

i. Το σημείο Z είναι το μέσο της AB . (Μονάδες 8)

ii. $\widehat{E\hat{A}\Gamma} = \widehat{E\hat{Z}\Gamma}$. (Μονάδες 7)



Έξυπνα & εύκολα!

15. Θέμα 13670

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B\Gamma = 2AB$. Έστω Δ το μέσο της πλευράς $B\Gamma$ και E το μέσο του τμήματος $B\Delta$. Από το σημείο Δ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την $A\Gamma$, η οποία τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Z . Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ABE και $BZ\Delta$ είναι ίσα.

(Μονάδες 10)

β) Το τετράπλευρο $ZADE$ είναι εγγράψιμο.

(Μονάδες 5)

γ) Η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $E\hat{A}\Gamma$.

(Μονάδες 10)

16. Θέμα 13671

Σε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{B} < \hat{\Gamma}$) θεωρούμε τα μέσα Δ , E , Z των πλευρών AB , $A\Gamma$, $B\Gamma$ αντίστοιχα. Έστω H η προβολή της κορυφής Γ πάνω στην πλευρά AB . Να αποδείξετε ότι:

α) $HE = EG$ και $HZ = ZG$.

(Μονάδες 10)

β) $Z\hat{\Delta}E = Z\hat{H}E$.

(Μονάδες 10)

γ) Το τετράπλευρο $Z\Delta HE$ είναι εγγράψιμο.

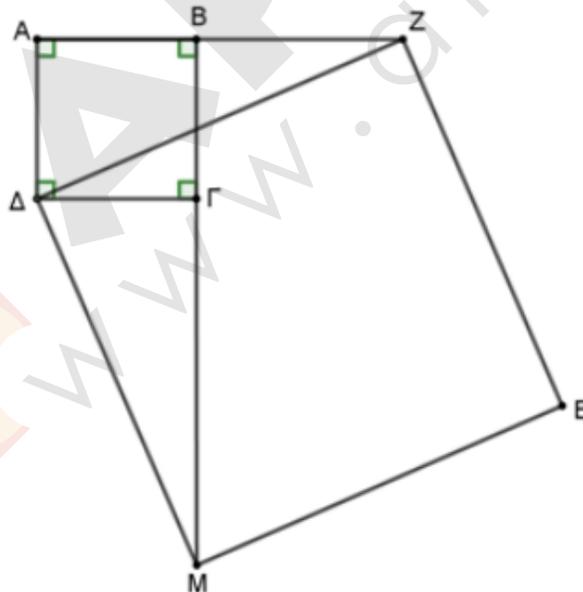
(Μονάδες 5)

Έξυπνα & εύκολα!

17. Θέμα 13847

Δίνεται το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$. Προεκτείνουμε την πλευρά AB προς το B κατά τμήμα BZ . Επίσης προεκτείνουμε την πλευρά $B\Gamma$ προς το Γ κατά τμήμα $\Gamma M = AZ$. Στη συνέχεια, θεωρούμε σημείο E τέτοιο, ώστε το τετράπλευρο $\Delta M E Z$ να είναι παραλληλόγραμμο. Να αποδείξετε ότι:

- α) τα τρίγωνα $A\Delta Z$ και $\Gamma\Delta M$ είναι ίσα. (Μονάδες 5)
- β) το τετράπλευρο $\Delta M E Z$ είναι τετράγωνο. (Μονάδες 9)
- γ) το τετράπλευρο $BZEM$ είναι εγγράψιμο. (Μονάδες 6)
- δ) οι γωνίες BMZ και BEZ είναι ίσες. (Μονάδες 5)



Έξυπνα & εύκολα!

18. Θέμα 14878

Δίνεται κύκλος (O, ρ) και σημείο M εξωτερικό του κύκλου. Από το σημείο M φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα MA και MB του κύκλου και στην προέκταση του OB παίρνουμε σημείο Γ ώστε $B\Gamma = OB$.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AMBO$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

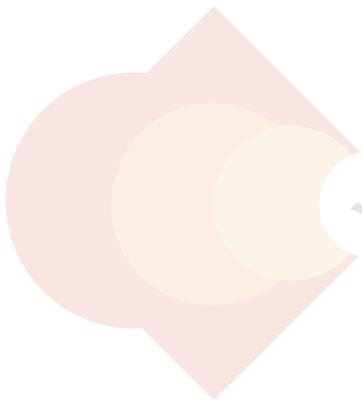
(Μονάδες 7)

β) Να προσδιορίσετε το κέντρο Λ του περιγεγραμμένου κύκλου του τετραπλεύρου $AMBO$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι $B\Lambda \parallel M\Gamma$.

(Μονάδες 9)



Έξυπνα & εύκολα!