Κεφ. 6.5. - Τράπεζα Θεμάτων 2022 - Γεωμετρία Α' Λυκείου

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ & ΛΥΣΕΙΣ

Η Τράπεζα Θεμάτων για τη Γεωμετρία Α' Λυκείου είναι μία μεγάλη «θάλασσα». Εμείς όμως έχουμε φροντίσει για εσένα, συγκεντρώνοντας εκείνα τα θέματα που αποτελούν τη «βάση» της γνώσης και για τα υπόλοιπα. Μελετώντας και κατανοώντας το μοτίβο σκέψης για τα συγκεκριμένα, μπορείς να λύσεις με επιτυχία και τα υπόλοιπα θέματα. Στην ιστοσελίδα μας www.arnos.gr για το Course της Γεωμετρίας, μελετάς και προετοιμάζεσαι με την αναλυτική διδασκαλία σε ασκήσεις και θέματα, στο ύφος της Τράπεζας.

Θέμα 1 - Κωδικοί:

13704

1. Θέμα 13704

α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **ΣΩΣΤΟ**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **ΛΑΘΟΣ**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Η διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου, που αντιστοιχεί στη βάση του, είναι διχοτόμος και ύψος.

ii. Κάθε πλευρά τριγώνου είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα των δύο άλλων πλευρών του και μικρότερη από τη διαφορά τους.

iii. Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες, τότε είναι παράλληλες.

iv. Οι φορείς των υψών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.

v. Κάθε εξωτερική γωνία ενός εγγεγραμμένου τετραπλεύρου ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι: *αν η διάμεσος ενός τριγώνου ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή*.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) i. Σωστό (σελ. 45)

ii. Λάθος. Σύμφωνα με την τριγωνική ανισότητα: Κάθε πλευρά τριγώνου είναι **μικρότερη** από το άθροισμα των δύο άλλων και **μεγαλύτερη** από τη διαφορά τους.

iii. Λάθος, γιατί δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη είναι παράλληλες αν σχηματίζουν δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες **παραπληρωματικές**.

iv. Σωστό (σελ. 113)

v. Σωστό (σελ. 136)

β) Θεώρημα ΙΙ, σελ. 114

Θέμα 2 - Κωδικοί:

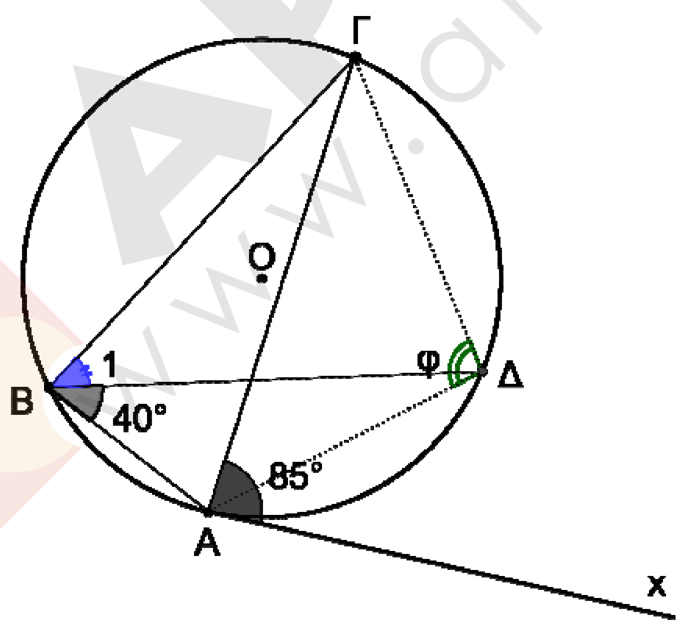
1530, 12643

2. Θέμα 1530

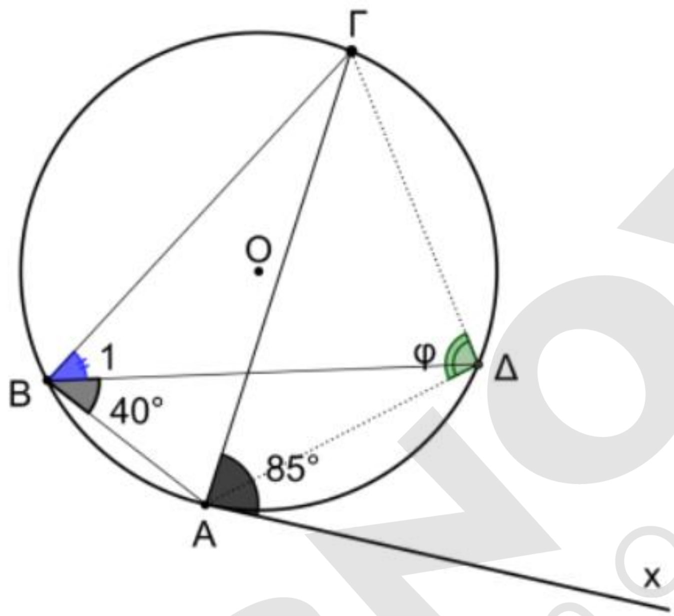
Στο σχήμα που ακολουθεί, η Αx είναι εφαπτομένη του κύκλου (Ο, ρ) σε σημείο του Α και επιπλέον ισχύουν $\Gamma\hat{A}x = 85°$ και $\Delta\hat{B}A = 40°$.

α) Να αποδείξετε ότι $\hat{B}_1 = 45°$. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\phi}$. (Μονάδες 15)



ΛΥΣΗ



α) Η $\Delta\hat{A}x$ είναι γωνία που σχηματίζεται από τη χορδή ΑΔ και την εφαπτομένη στο άκρο της Α οπότε θα ισούται με την εγγεγραμμένη $\Delta\hat{B}A$ που βαίνει στο τόξο ΑΔ. Δηλαδή, είναι $\Delta\hat{B}A = \Delta\hat{A}x = 40^o$, οπότε, $\Gamma\hat{A}\Delta = 85^o - 40^o = 45^o$.

Οι γωνίες $\hat{B}_1$ και $\Gamma\hat{A}\Delta$ είναι ίσες ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο ΓΔ. Άρα $\hat{B}_1 = \Gamma\hat{A}\Delta = 45^o$.

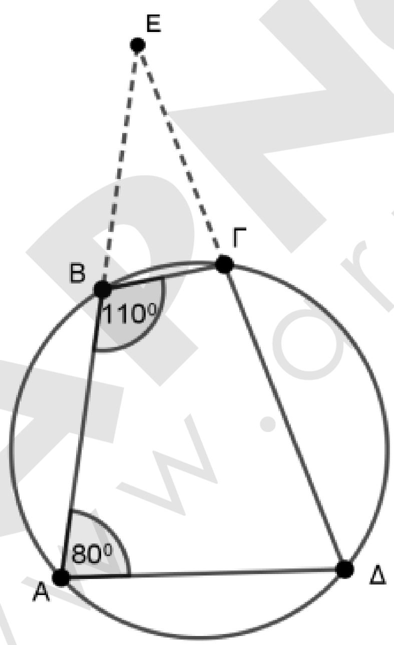
β) Είναι $A\hat{B}\Gamma = 40^o + 45^o = 85^o$ και $A\hat{B}\Gamma + A\hat{\Delta}\Gamma = 180^o$ ως απέναντι γωνίες του εγγεγραμμένου τετραπλεύρου ΑΒΓΔ στον παραπάνω κύκλο. Οπότε $85^o + \hat{\varphi} = 180^o$, άρα $\hat{\varphi} = 95^o$.

3. Θέμα 12643

Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο και οι πλευρές του ΑΒ και ΔΓ προεκτεινόμενες τέμνονται στο σημείο Ε. Αν η γωνία Α του τετραπλεύρου ισούται με 80^0 και η γωνία Β ισούται με 110^0, να υπολογίσετε αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας:

α) το μέτρο της γωνία ΕΓΒ. (Μονάδες 12)

β) το μέτρο της γωνία ΒΕΓ. (Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ

α) Η γωνία ΕΓΒ είναι εξωτερική στο εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΒΓΔ, άρα θα ισούται με την απέναντι εσωτερική. Δηλαδή η $E\hat{\Gamma}B = \hat{A} = 80^0$.

β) Η γωνία ΕΒΓ είναι παραπληρωματική της γωνίας Β του τετραπλεύρου, οπότε θα ισούται με $180^0 - 110^0 = 70^0$. Έτσι στο τρίγωνο ΕΒΓ έχουμε:

$B\hat{E}\Gamma + E\hat{B}\Gamma + E\hat{\Gamma}B = 180^0$ ή $B\hat{E}\Gamma + 70^0 + 80^0 = 180^0$ οπότε η $B\hat{E}\Gamma = 30^0$.

Θέμα 4 - Κωδικοί:

1712, 1897, 13444, 13840

4. Θέμα 1712

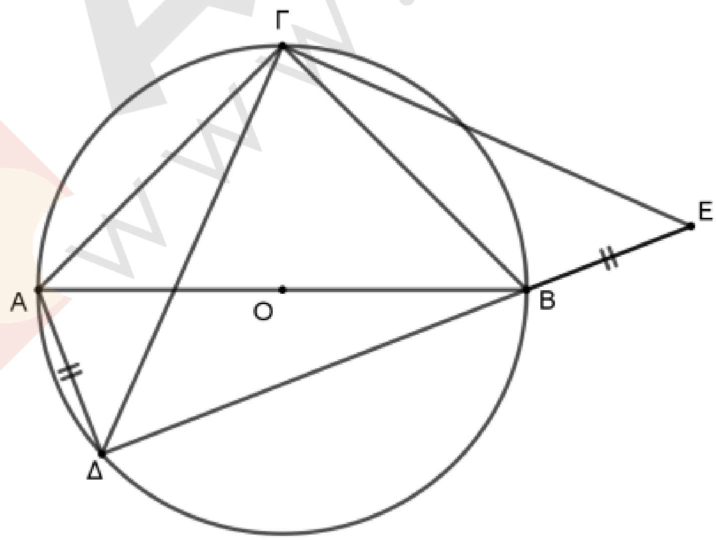
Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο, και έστω ΑΒ μια διάμετρος του, Γ το μέσο του ενός ημικυκλίου του και Δ τυχαίο σημείο του άλλου. Στην προέκταση της ΔΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Ε ώστε ΒΕ=ΑΔ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΕΓ είναι ίσα. (Μονάδες 8)

ii. Η ΓΔ είναι κάθετη στην ΓΕ. (Μονάδες 8)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί, στην περίπτωση που το σημείο Δ είναι το αντιδιαμετρικό του Γ, η ΓΕ είναι εφαπτομένη του κύκλου. (Μονάδες 9)



ΛΥΣΗ

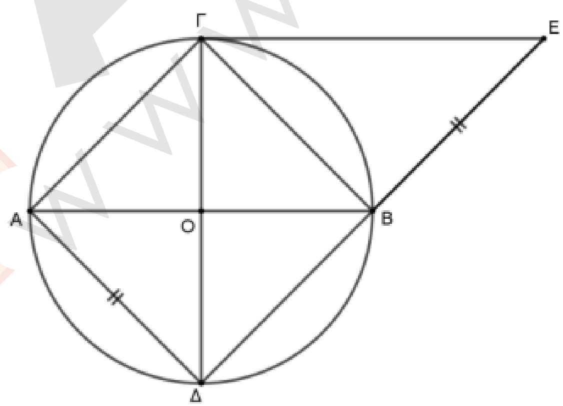
α) i. Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΕΓ έχουν:

- ΑΔ = ΒΕ, από υπόθεση
- ΑΓ = ΓΒ ως ίσες χορδές των ίσων τόξων ΑΓ και ΓΒ αφού το Γ είναι μέσο του τόξου ΑΒ.
- $\Gamma\hat{A}\Delta = \Gamma\hat{B}E$, διότι το τετράπλευρο ΑΔΒΓ είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο κέντρου Ο και κάθε εξωτερική γωνία του ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του τετραπλεύρου.

Σύμφωνα με το κριτήριο Π – Γ – Π τα τρίγωνα είναι ίσα.

ii. Επειδή τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΕΓ είναι ίσα, προκύπτει ότι $A\hat{\Gamma}\Delta = B\hat{\Gamma}E$ γιατί είναι γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΔ και ΒΕ αντίστοιχα. Τότε: $\Delta\hat{\Gamma}E = \Delta\hat{\Gamma}B + B\hat{\Gamma}E = \Delta\hat{\Gamma}B + A\hat{\Gamma}\Delta = A\hat{\Gamma}B$. Όμως $A\hat{\Gamma}B = 90^\circ$, γιατί είναι εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο. Άρα $\Gamma\Delta \perp \Gamma E$.

β)



Όταν το Δ είναι αντιδιαμετρικό του Γ, τότε από το **α)ii.** ερώτημα είδαμε ότι $\Gamma\Delta \perp \Gamma E$ ή $O\Gamma \perp \Gamma E$ αφού ΓΔ διάμετρος και ΟΓ ακτίνα του κύκλου. Δηλαδή για την ακτίνα ΟΓ ισχύει ότι είναι κάθετη στο τμήμα ΓΕ, οπότε η ΓΕ είναι εφαπτομένη του κύκλου.

5. Θέμα 1897

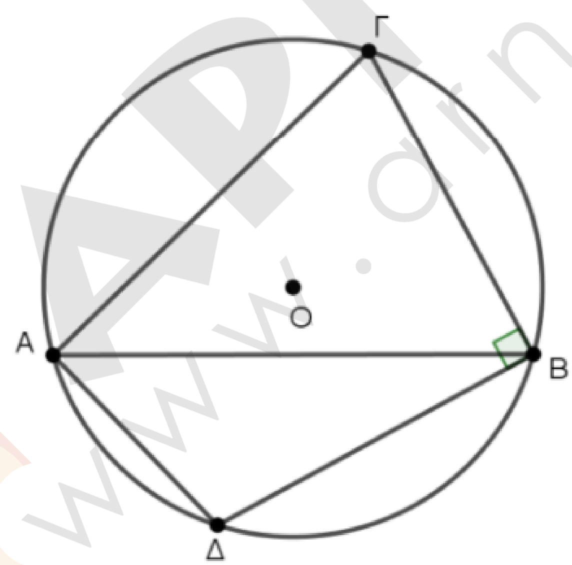
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R). Έστω σημείο Δ του τόξου ΑΒ τέτοιο ώστε ΔΒ⊥ΒΓ.

α) Να αποδείξετε ότι ΑΔ⊥ΑΓ. (Μονάδες 8)

β) Έστω Η το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΒΗ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)

γ) Αν Μ το μέσον της ΒΓ, να αποδείξετε ότι ΟΜ= $\frac{AH}{2}$. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ



α) Στο τετράπλευρο ΑΓΒΔ, λόγω του ότι είναι εγγεγραμμένο ισχύει ότι οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές, δηλαδή:

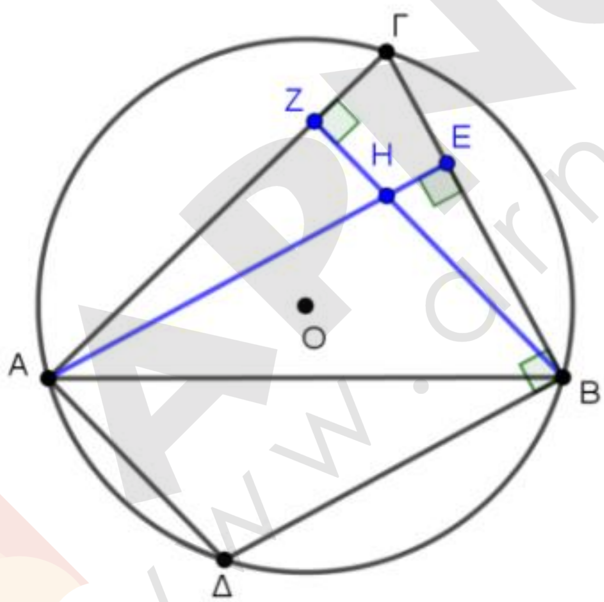
$\Delta\hat{A}\Gamma + \Delta\hat{B}\Gamma = 180^o \Leftrightarrow \Delta\hat{A}\Gamma + 90^o = 180^o \Leftrightarrow \Delta\hat{A}\Gamma = 90^o$.

Άρα ΑΔ $\perp$ ΑΓ.

β) Αν ΑΕ και ΒΖ τα ύψη του τριγώνου ΑΒΓ, τότε το σημείο τομής τους Η είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου. Έχουμε:

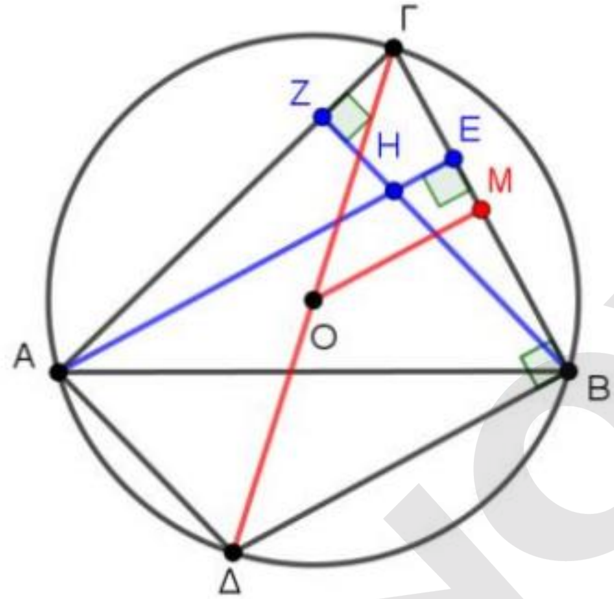
- $ΑΔ \perp ΑΓ$, από το α) και $ΒΖ \perp ΑΓ$. Άρα ΑΔ // ΒΖ, γιατί είναι και οι δύο κάθετες στην ΑΓ. Οπότε και ΑΔ // ΒΗ (1).
- $ΔΒ \perp ΒΓ$, από υπόθεση και $ΑΕ \perp ΒΓ$ άρα ΔΒ // ΑΕ, γιατί είναι και οι δύο κάθετες στην ΒΓ οπότε και ΔΒ // ΑΗ (2).

Από (1), (2) το ΑΔΒΗ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.



γ) Για την εγγεγραμμένη γωνία ΔΑΓ ισχύει $Δ\hat{Α}Γ = 90^o$, άρα βαίνει σε ημικύκλιο. Άρα η χορδή ΓΔ είναι διάμετρος του κύκλου. Στο τρίγωνο ΒΓΔ, το ΟΜ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΓΔ (το Ο είναι κέντρο του κύκλου και η ΓΔ διάμετρός του) και ΓΒ οπότε ισχύει $ΟΜ = \frac{ΒΔ}{2}$ (3).

Επειδή το ΑΔΒΗ είναι παραλληλόγραμμο, έχουμε ΒΔ = ΑΗ (4). Από (3), (4) βρίσκουμε $ΟΜ = \frac{ΑΗ}{2}$.



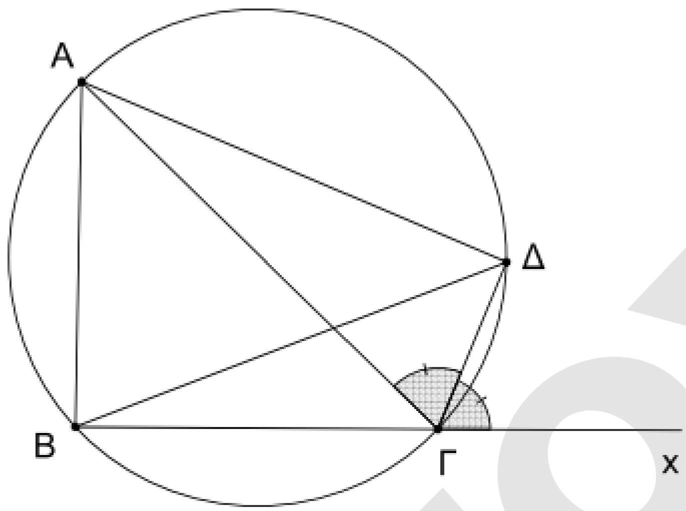
6. Θέμα 13444

Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο σε κύκλο και οι διαγώνιοί του ΑΓ και ΒΔ. Η γωνία $\Delta\hat{\Gamma}x$ είναι εξωτερική γωνία του τετραπλεύρου και η ΓΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{\Gamma}x$.

α) Να αποδείξετε ότι $B\hat{A}\Delta = \frac{1}{2}A\hat{\Gamma}x$. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές και να προσδιορίσετε τις ίσες πλευρές του. (Μονάδες 10)

γ) Αν η ΑΓ είναι διάμετρος του κύκλου, να αποδείξετε ότι οι γωνίες $A\hat{\Gamma}B$ και $B\hat{\Delta}\Gamma$ είναι συμπληρωματικές. (Μονάδες 5)

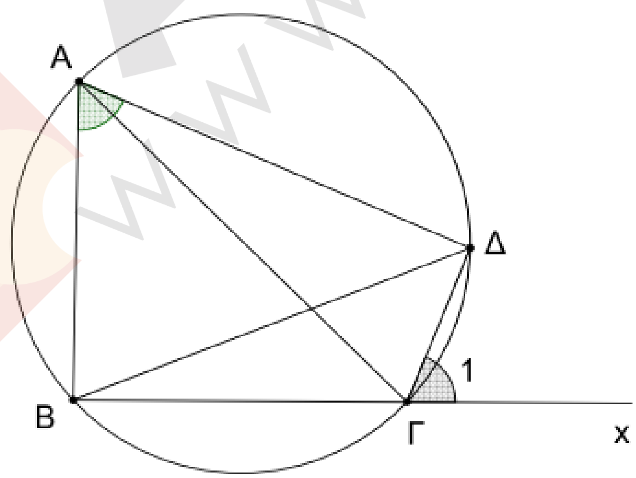


ΛΥΣΗ

α) Η γωνία $\hat{\Gamma}_1$ είναι εξωτερική του εγγεγραμμένου τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, συνεπώς ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του, δηλαδή $\hat{\Gamma}_1 = \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta$ (1).

Η ΓΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{x}$, άρα $\hat{\Gamma}_1 = \frac{1}{2}\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{x}$ (2).

Από τις ισότητες (1), (2) προκύπτει ότι $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta = \frac{1}{2}\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{x}$ (3).



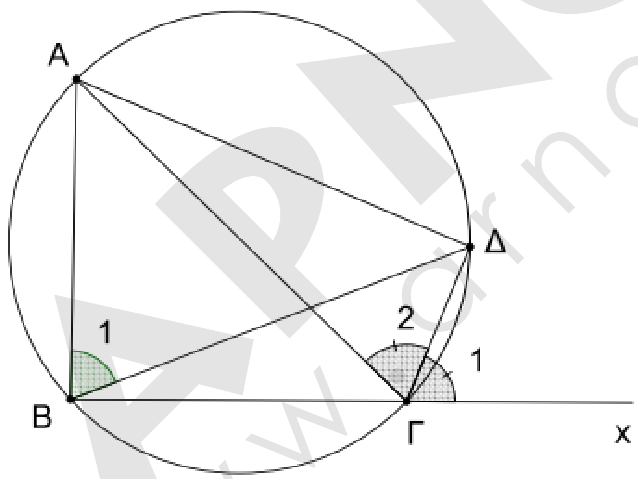
β) Είναι $\widehat{B}_1 = \widehat{\Gamma}_2$ (4),

ως εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο ΑΔ.

Η ΓΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\widehat{\Gamma}x$, άρα $\widehat{\Gamma}_2 = \frac{1}{2}A\widehat{\Gamma}x$ (5).

Από τις σχέσεις (4), (5) προκύπτει ότι $\widehat{B}_1 = \frac{1}{2}A\widehat{\Gamma}x$ (6).

Από τις σχέσεις (3), (6) προκύπτει ότι $B\widehat{A}\Delta = \widehat{B}_1$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές αφού έχει δύο ίσες γωνίες. Ίσες πλευρές του τριγώνου είναι οι ΔΒ και ΔΑ, γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες του $B\widehat{A}\Delta$ και $\widehat{B}_1$ αντίστοιχα.

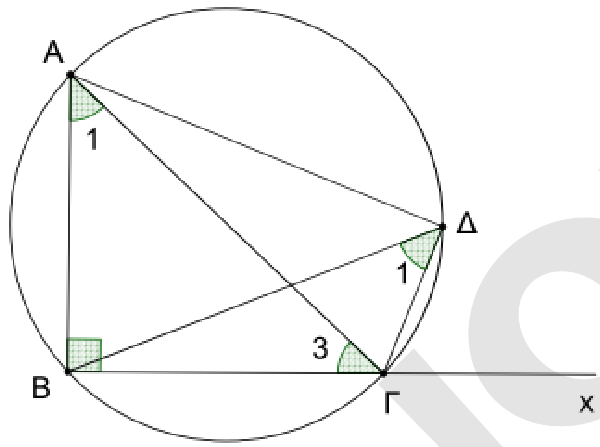


γ) Αν η ΑΓ είναι διάμετρος του κύκλου, τότε το τόξο ΑΔΓ είναι ημικύκλιο, οπότε η γωνία $A\widehat{B}\Gamma$ είναι ορθή ως εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο. Οι οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ είναι συμπληρωματικές, δηλαδή

$\widehat{\Gamma}_3 + \widehat{A}_1 = 90^o$ (7).

Οι γωνίες $\widehat{A}_1, \widehat{\Delta}_1$ είναι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο ΒΓ, άρα $\widehat{A}_1 = \widehat{\Delta}_1$ (8).

Από τις ισότητες (7), (8) προκύπτει ότι $\hat{\Gamma}_3 + \hat{\Delta}_1 = 90^o$, άρα οι γωνίες $A\hat{\Gamma}B$ και $B\hat{\Delta}\Gamma$ είναι συμπληρωματικές.



7. Θέμα 13840

Δίνεται κύκλος (O,R) και μία ευθεία x΄x η οποία έχει μοναδικό κοινό σημείο με τον κύκλο το σημείο Α. Θεωρούμε τυχαίο σημείο Μ της ημιευθείας Αx. Αν για κάποιο σημείο Β του κύκλου ισχύει η σχέση ΜΑ = ΜΒ, να αποδείξετε ότι:

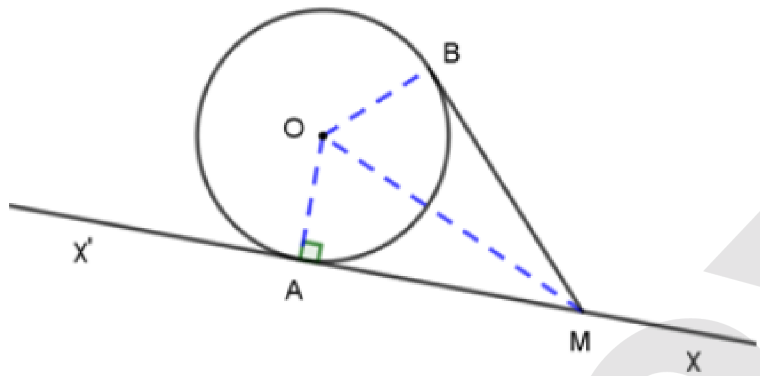
α) το ΜΒ είναι εφαπτόμενο τμήμα του κύκλου (Ο,R). (Μονάδες 7)

β) η διχοτόμος της γωνίας ΒΜx είναι κάθετη στη ΜΟ. (Μονάδες 6)

γ) το τετράπλευρο ΑΟΒΜ είναι εγγράψιμο. (Μονάδες 6)

δ) το ευθύγραμμο τμήμα ΟΒ τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας ΒΜx. (Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ



α) Η ευθεία x΄x έχει μοναδικό κοινό σημείο με τον κύκλο το σημείο Α. Επομένως, η ευθεία x΄x είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Α. Άρα ΟΑ ⊥ ΜΑ.

Τα τρίγωνα ΜΟΒ και ΜΟΑ έχουν:

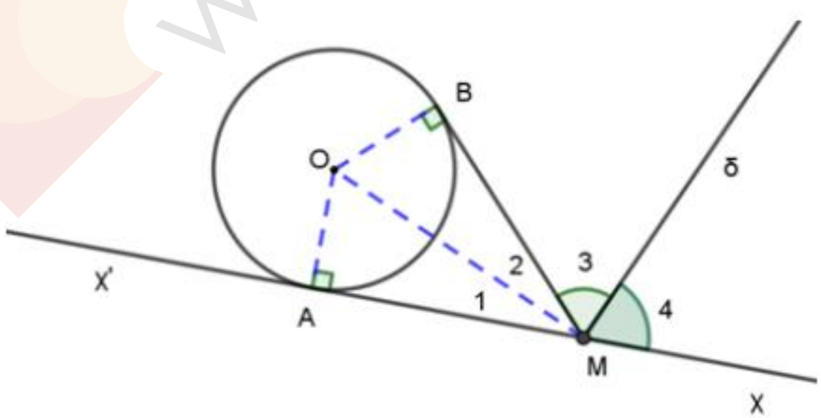
- ΜΟ, κοινή πλευρά
- ΟΒ = ΟΑ, ως ακτίνες του κύκλου (Ο,R)
- ΜΒ = ΜΑ, από την υπόθεση

Επομένως, τα τρίγωνα από το κριτήριο ισότητας Π-Π-Π είναι ίσα. Απέναντι από την πλευρά ΟΜ βρίσκονται αντίστοιχα ίσες γωνίες, οπότε $\hat{A} = \hat{B}$.

Επειδή $\hat{A} = 90°$ συμπεραίνουμε ότι $\hat{B} = 90°$.

Άρα, το ΜΒ είναι εφαπτόμενο τμήμα του κύκλου (Ο,R).

β)



Έστω Μδ η διχοτόμος της γωνίας ΒΜx.

Τα τμήματα ΜΑ και ΜΒ είναι εφαπτόμενα του κύκλου (Ο,R). Η ΜΟ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΜΒ, οπότε $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$. Επειδή Μδ είναι η διχοτόμος της γωνίας ΒΜx έχουμε $\widehat{M}_3 = \widehat{M}_4$.

$A\widehat{M}x = 180°$ οπότε $\widehat{M}_1 + \widehat{M}_2 + \widehat{M}_3 + \widehat{M}_4 = 180°$,ή $2\widehat{M}_2 + 2\widehat{M}_3 = 180°$, ή $\widehat{M}_2 + \widehat{M}_3 = 90°$, δηλαδή $O\widehat{M}\delta = 90°$. Άρα η Μδ είναι κάθετη στη ΜΟ.

γ) Στο τετράπλευρο ΑΟΒΜ έχουμε $\widehat{A} = \widehat{B} = 90°$ οπότε $\widehat{A} + \widehat{B} = 180°$. Επομένως δύο απέναντι γωνίες του τετραπλεύρου είναι παραπληρωματικές οπότε το ΑΟΒΜ είναι εγγράψιμο.

δ) Το ευθύγραμμο τμήμα ΟΒ και η διχοτόμος Μδ τέμνονται από το ευθύγραμμο τμήμα ΟΜ. Αρκεί να αποδείξουμε ότι οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες που σχηματίζονται έχουν άθροισμα μικρότερο από 180°, οπότε το ΟΒ και η Μδ θα τέμνονται προς το μέρος της τέμνουσας ΟΜ που βρίσκονται οι γωνίες.

Το ευθύγραμμο τμήμα ΟΒ σχηματίζει με το ΟΜ τη γωνία ΒΟΜ .

Το ευθύγραμμο τμήμα ΟΜ σχηματίζει με τη διχοτόμο Μδ τη γωνία ΟΜδ.

Πρέπει να αποδείξουμε ότι $B\widehat{O}M + O\widehat{M}\delta < 180°$.

Η γωνία ΒΟΜ είναι οξεία γωνία του ορθογωνίου τριγώνου ΟΒΜ, οπότε $B\widehat{O}M < 90°$.

Η γωνία ΟΜδ είναι ίση με το άθροισμα των γωνιών M_2 και M_3, όμως από το ερώτημα (β) έχουμε $\widehat{M}_2 + \widehat{M}_3 = 90°$, οπότε $O\widehat{M}\delta = \widehat{M}_2 + \widehat{M}_3 = 90°$.

Έχουμε $B\widehat{O}M + O\widehat{M}\delta = B\widehat{O}M + 90° < 90° + 90°$, δηλαδή $B\widehat{O}M + O\widehat{M}\delta < 180°$.