Κεφ. 6.3. - Τράπεζα Θεμάτων 2022 - Γεωμετρία Α’ Λυκείου

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ & ΛΥΣΕΙΣ

Η Τράπεζα Θεμάτων για τη Γεωμετρία Α’ Λυκείου είναι μία μεγάλη «θάλασσα». Εμείς όμως έχουμε φροντίσει για εσένα, συγκεντρώνοντας εκείνα τα θέματα που αποτελούν τη «βάση» της γνώσης και για τα υπόλοιπα. Μελετώντας και κατανοώντας το μοτίβο σκέψης για τα συγκεκριμένα, μπορείς να λύσεις με επιτυχία και τα υπόλοιπα θέματα. Στην ιστοσελίδα μας www.arnos.gr για το Course της Γεωμετρίας, μελετάς και προετοιμάζεσαι με την αναλυτική διδασκαλία σε ασκήσεις και θέματα, στο ύφος της Τράπεζας.

Θέμα 1 - Κωδικοί:

12106

1. Θέμα 12106

α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

i. Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται όμοια άνισες γωνίες.

ii. Από σημείο εκτός ευθείας διέρχονται άπειρες κάθετες στην ευθεία.

iii. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες.

iv. Κάθε τετράπλευρο με ίσες διαγωνίους είναι ορθογώνιο.

v. Η γωνία που σχηματίζεται από μία χορδή κύκλου και την εφαπτομένη του κύκλου στο άκρο της χορδής ισούται με την επίκεντρη που βαίνει στο τόξο της χορδής.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος, αν είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) i. Σωστό (σελ. 60)

ii. Λάθος γιατί από σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μοναδική κάθετος.

iii. Σωστό (σελ. 89)

iv. Λάθος γιατί μπορούμε να σχεδιάσουμε τετράπλευρο με ίσες διαγωνίους οι οποίες δεν διχοτομούνται.

v. Λάθος γιατί η γωνία που σχηματίζεται από μία χορδή κύκλου και την εφαπτομένη στο άκρο της χορδής ισούται με κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο τόξο της χορδής και η εγγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης.

β) σελ. 107

Θέμα 2 - Κωδικοί:

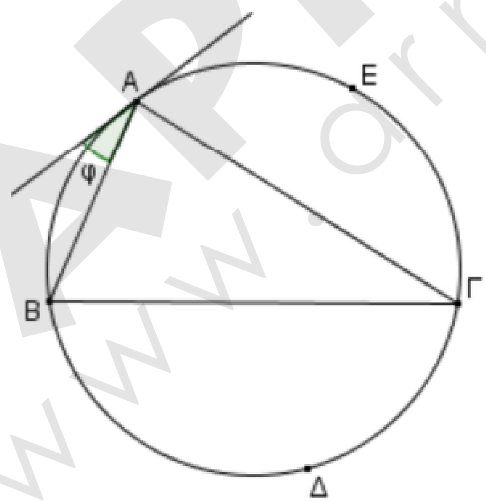
1561, 1626, 1672, 1695, 12637, 13754

2. Θέμα 1561

Στο ακόλουθο σχήμα, η εφαπτομένη του κύκλου στην κορυφή Α του τριγώνου ΑΒΓ σχηματίζει γωνία φ=30° με την πλευρά ΑΒ. Αν το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{B\Delta\Gamma}$ είναι 160°,

α) να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 18)

β) να βρείτε το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{A E\Gamma}$. (Μονάδες 7)



ΛΥΣΗ

α) Η γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένη γωνία στο τόξο $\overset{\frown}{B\Delta\Gamma}=160^0$,

άρα $\hat{A} = \dfrac{160^o}{2} = 80^o$.

Η $\widehat{\varphi}$ είναι γωνία που σχηματίζεται από τη χορδή ΑΒ και την εφαπτομένη στο άκρο Α της χορδής ΑΒ οπότε θα είναι ίση με την εγγεγραμμένη γωνία $\widehat{\Gamma}$ που βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{AB}$ της χορδής, δηλαδή $\widehat{\Gamma} = \widehat{\varphi} = 30^o$.

Για τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ ισχύει ότι $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^o$, οπότε η γωνία $\widehat{B}$ είναι $\widehat{B} = 180^o - 80^o - 30^o$ ή $\widehat{B} = 70^o$.

β) Η γωνία $\widehat{B}$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{AE\Gamma}$ οπότε το μέτρο της θα ισούται με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου της, δηλαδή θα είναι

$\widehat{B} = \dfrac{\overset{\frown}{AE\Gamma}}{2}$ ή $70^o = \dfrac{\overset{\frown}{AE\Gamma}}{2}$, άρα $\overset{\frown}{AE\Gamma} = 140^o$.

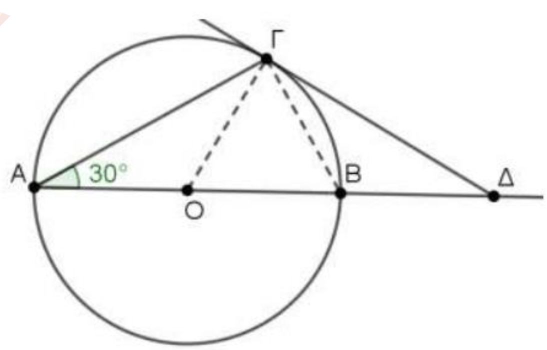
3. Θέμα 1626

Δίνεται κύκλος (Ο, R) διαμέτρου ΑΒ, και χορδή ΑΓ τέτοια ώστε $B\hat{A}\Gamma = 30^o$. Στο σημείο Γ φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου, η οποία τέμνει την προέκταση της διαμέτρου ΑΒ (προς το Β) στο σημείο Δ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΟΓΔ. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ



α) Η εφαπτομένη ΓΔ είναι κάθετη στην ακτίνα ΟΓ, άρα $O\hat{Γ}Δ = 90^o$. Η εγγεγραμμένη γωνία $B\hat{A}Γ$ και η επίκεντρη $B\hat{O}Γ$ βαίνουν στο ίδιο τόξο ΒΓ, άρα:

$$B\hat{A}Γ = \frac{B\hat{O}Γ}{2} \Leftrightarrow 30^o = \frac{B\hat{O}Γ}{2} \Leftrightarrow B\hat{O}Γ = 60^o$$

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΟΓΔ έχουμε:

$$O\hat{Γ}Δ + Γ\hat{O}Δ + O\hat{Δ}Γ = 180^o \Leftrightarrow 90^o + 60^o + O\hat{Δ}Γ = 180^o \Leftrightarrow O\hat{Δ}Γ = 30^o$$

β) Η γωνία $B\hat{Γ}Δ$ είναι γωνία μεταξύ χορδής ΒΓ και εφαπτομένης ΓΔ του κύκλου, άρα είναι ίση με την εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής ΒΓ του κύκλου, δηλαδή με την $\hat{A} = 30^o$. Άρα $B\hat{Γ}Δ = 30^o$.

Επίσης, από το α) $O\hat{Δ}Γ = 30^o$, δηλαδή $B\hat{Δ}Γ = 30^o$. Άρα το τρίγωνο ΒΓΔ έχει δύο ίσες γωνίες, επομένως είναι ισοσκελές.

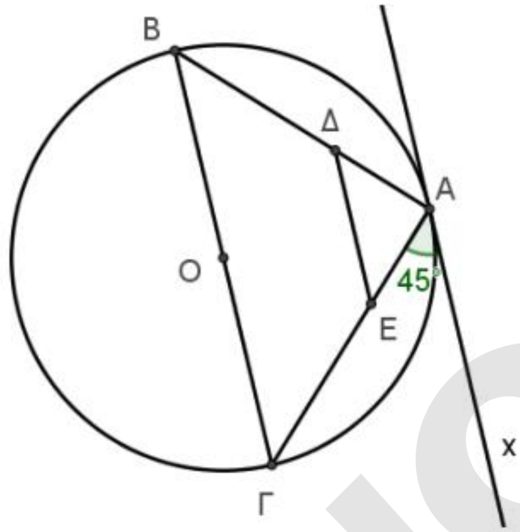
4. Θέμα 1672

Σε σημείο Α ενός κύκλου, φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου Αx και τη χορδή ΑΓ που σχηματίζει με την εφαπτομένη γωνία 45^o. Φέρουμε τη διάμετρο ΓΒ και μια παράλληλη ευθεία στη ΒΓ που τέμνει την ΑΒ στο Δ και την ΑΓ στο Ε.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΑΓ. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

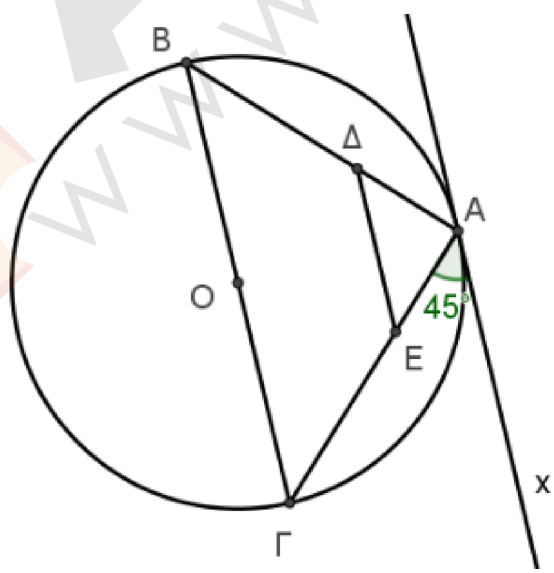
(Μονάδες 15)



ΛΥΣΗ

α) Είναι $B\hat{A}\Gamma = 90^o$ ως εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο. Ακόμη η γωνία $\Gamma\hat{A}x$ σχηματίζεται από την εφαπτομένη Ax και τη χορδή ΑΓ άρα είναι ίση με τη γωνία που βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{A\Gamma}$. Επομένως ισχύει: $\hat{B} = \Gamma\hat{A}x = 45^o$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ βρίσκουμε $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^o \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 45^o$



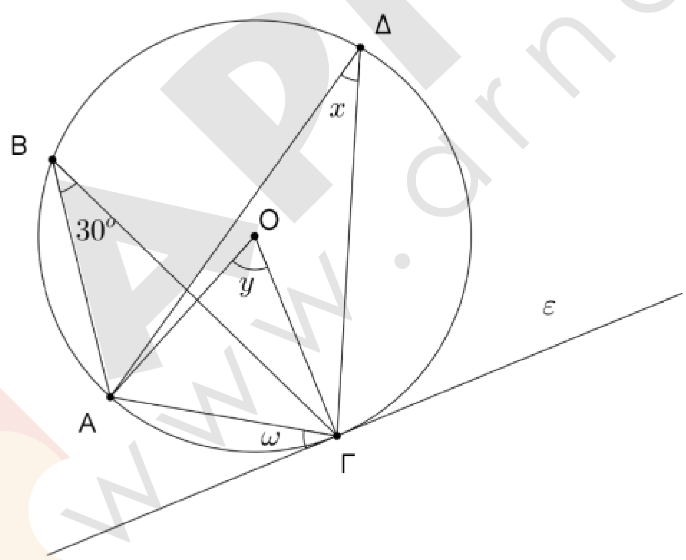
β) Το ΒΓΕΔ είναι τραπέζιο γιατί ΔΕ//ΒΓ και οι πλευρές ΒΔ και ΓΕ τέμνονται στο Α, άρα δεν είναι παράλληλες. Επίσης, έχει τις γωνίες που πρόσκεινται στη βάση ΒΓ ίσες, άρα είναι ισοσκελές τραπέζιο.

5. Θέμα 1695

Στο παρακάτω σχήμα η ευθεία ε εφάπτεται του κύκλου (Ο,ρ) στο σημείο Γ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες x,y και ω δικαιολογώντας σε κάθε περίπτωση την απάντησή σας. (Μονάδες 15)

β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ΟΑΓ ως προς τις πλευρές. (Μονάδες 10)



ΛΥΣΗ

α) Οι γωνιές $A\widehat{\Delta}\Gamma$ και $A\widehat{B}\Gamma$ είναι εγγεγραμμένες του κύκλου που βαίνουν στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{A\Gamma}$, οπότε θα είναι ίσες. Δηλαδή $A\widehat{\Delta}\Gamma = A\widehat{B}\Gamma$, άρα $\hat{x} = 30^o$.

Η γωνία $\text{Α}\hat{\text{Ο}}\text{Γ}$ είναι επίκεντρη γωνία του κύκλου και βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{\text{ΑΓ}}$. Στο ίδιο τόξο βαίνει και η εγγεγραμμένη $\text{Α}\hat{\text{Β}}\text{Γ}$. Οπότε, γνωρίζοντας ότι κάθε εγγεγραμμένη ισούται με το μισό της επίκεντρης που βαίνει στο ίδιο τόξο με αυτήν θα είναι $\text{Α}\hat{\text{Β}}\text{Γ} = \frac{\text{Α}\hat{\text{Ο}}\text{Γ}}{2}$.

Δηλαδή, $\text{Α}\hat{\text{Ο}}\text{Γ} = 2\text{Α}\hat{\text{Β}}\text{Γ}$, άρα $\hat{y} = 60^o$ (1)

Η γωνία $\hat{\omega}$ σχηματίζεται από τη χορδή ΑΓ και την εφαπτομένη ευθεία ε στο άκρο Γ της χορδής οπότε θα ισούται με κάθε εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{\text{ΑΓ}}$ της χορδής. Δηλαδή, είναι $\hat{\omega} = \text{Α}\hat{\text{Β}}\text{Γ}$, άρα $\hat{\omega} = 30^o$.

β) Το τρίγωνο ΟΑΓ είναι ισοσκελές αφού ΟΑ = ΟΓ ως ακτίνες του κύκλου, και έχει τη γωνία της κορυφής του $\text{Α}\hat{\text{Ο}}\text{Γ} = y = 60^0$. Άρα, θα είναι ισόπλευρο.

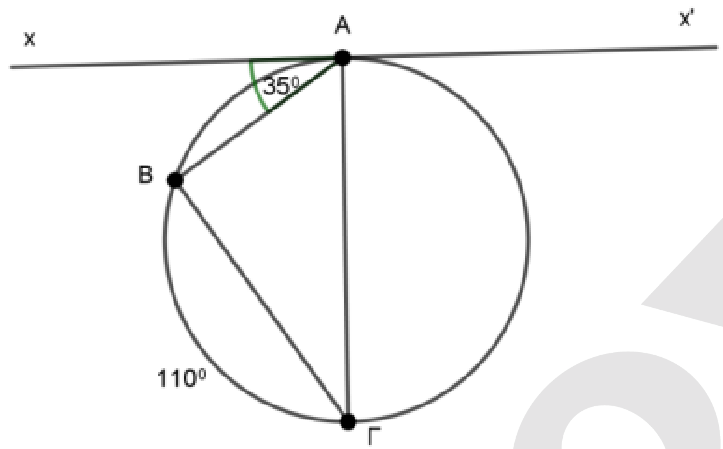
6. Θέμα 12637

Στο παρακάτω σχήμα η xx' είναι εφαπτομένη του κύκλου στο Α και επιπλέον ισχύουν: $\text{Β}\hat{\text{Α}}x = 35^0$ και $\overset{\frown}{\text{ΒΓ}} = 110^0$.

α) Ποιό είναι το μέτρο της γωνίας Γ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

β) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο, ορθογώνιο ή αμβλυγώνιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας σας. (Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ

α) Στον δοθέντα κύκλο η $B\widehat{A}x$ είναι γωνία χορδής και εφαπτομένης και η Γ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής, επομένως $\widehat{\Gamma} = B\widehat{A}x = 35^0$.

β) Στο τρίγωνο ΑΒΓ, η γωνία του Α είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο, που βαίνει στο τόξο ΒΓ, άρα το μέτρο της θα ισούται με το μισό του. Δηλαδή $\widehat{A} = \dfrac{110^0}{2} = 55^0$.

Έτσι στο τρίγωνο ΑΒΓ θα είναι $\widehat{A} + \widehat{\Gamma} = 55^0 + 35^0 = 90^0$, οπότε και $\widehat{B} = 90^0$,

επομένως το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

7. Θέμα 13754

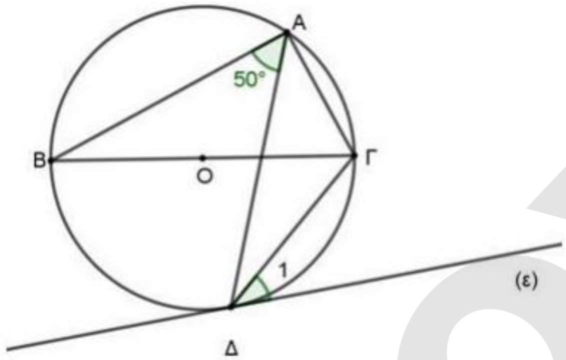
Δίνεται κύκλος (Ο, ρ) με διάμετρο ΒΓ και τα σημεία Α, Δ του κύκλου εκατέρωθεν της διαμέτρου ΒΓ έτσι ώστε $B\widehat{A}\Delta = 50^o$. Φέρουμε εφαπτόμενη ευθεία (ε) στον κύκλο στο σημείο Δ.

Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας :

α) ΒΑΓ. (Μονάδες 6)

β) ΒΓΔ. (Μονάδες 9)

γ) Δ_1. (Μονάδες 10)



ΛΥΣΗ

α) Η γωνία ΒΑΓ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο, επομένως $B\hat{A}\Gamma = 90°$.

β) Οι γωνίες ΒΑΔ, ΒΓΔ είναι εγγεγραμμένες και βαίνουν στο ίδιο τόξο ΒΔ οπότε είναι ίσες. Άρα $B\hat{A}\Delta = B\hat{\Gamma}\Delta = 50°$.

γ) Η γωνία Δ_1 σχηματίζεται από τη χορδή ΔΓ του κύκλου και την εφαπτομένη του στο σημείο Δ. Επομένως η γωνία Δ_1 ισούται με κάθε εγγεγραμμένη γωνία του κύκλου που βαίνει στο τόξο ΔΓ. Η γωνία ΔΑΓ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο ΔΓ, οπότε $\hat{\Delta}_1 = \Delta\hat{A}\Gamma$.

Για τη γωνία ΔΑΓ έχουμε: $\Delta\hat{A}\Gamma = B\hat{A}\Gamma - B\hat{A}\Delta = 90° - 50° = 40°$. Άρα $\hat{\Delta}_1 = 40°$.

Θέμα 4 - Κωδικοί:

12460

8. Θέμα 12460

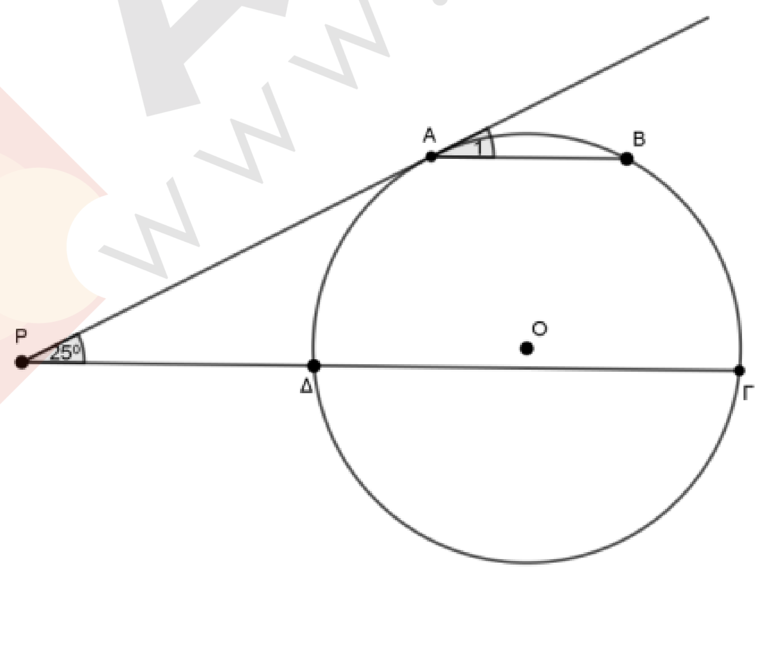
Στον κύκλο (Ο, ρ) δίνονται τα σημεία Α, Β, Γ, Δ έτσι ώστε ΑΒ//ΓΔ. Στο σημείο Α φέρνουμε εφαπτομένη στον κύκλο, η οποία τέμνει την προέκταση της ΓΔ προς το Δ, στο σημείο Ρ. Αν η γωνία $\widehat{\Delta P A}=25^0$ και το τόξο ΓΔ (στο οποίο δεν ανήκουν τα Α,Β) είναι τριπλάσιο του τόξου ΑΒ (στο οποίο δεν ανήκουν τα Γ, Δ) να αποδείξετε ότι:

α) τα τόξα $\overset{\frown}{\Delta A B}$ και $\overset{\frown}{A B \Gamma}$ είναι ίσα. (Μονάδες 7)

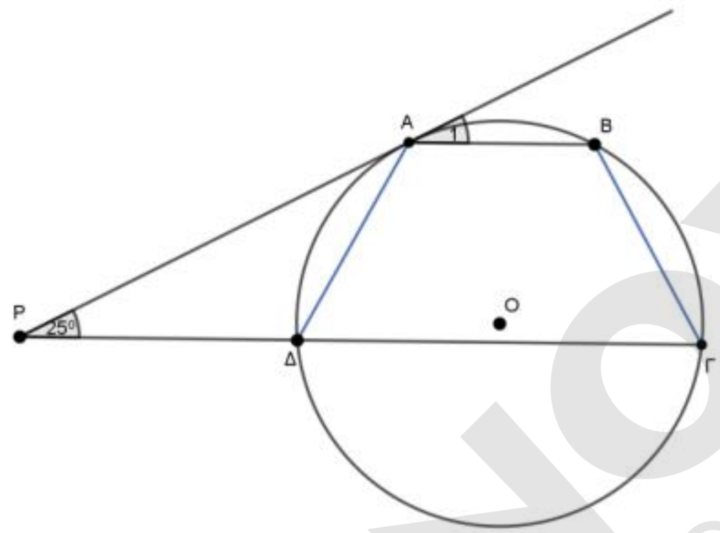
β) το τόξο ΑΒ που είναι μικρότερο του ημικυκλίου ισούται με 50^0. (Μονάδες 6)

γ) το τόξο ΔΑ στο οποίο δεν ανήκουν τα Β, Γ ισούται με 80^0. (Μονάδες 6)

δ) το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 6)



ΛΥΣΗ



α) Εφόσον ΑΒ//ΓΔ θα είναι $\overset{\frown}{ΔΑ} = \overset{\frown}{ΒΓ}$ (1),

γιατί τα τόξα που περιέχονται μεταξύ παραλλήλων χορδών είναι ίσα, επομένως $\overset{\frown}{ΔΑ} + \overset{\frown}{ΑΒ} = \overset{\frown}{ΒΓ} + \overset{\frown}{ΑΒ}$, άρα $\overset{\frown}{ΔΑΒ} = \overset{\frown}{ΑΒΓ}$.

β) Είναι $\hat{Α}_1 = Δ\hat{Ρ}Α = 25^0$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΑΒ και ΡΓ που τέμνονται από την ΡΑ. Η $\hat{Α}_1$ είναι γωνία χορδής και εφαπτομένης, επομένως είναι ίση με οποιαδήποτε εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής. Όμως η εγγεγραμμένη, ισούται με το μισό του τόξου στο οποίο βαίνει. Άρα το τόξο έχει μέτρο διπλάσιο της εγγεγραμμένης, οπότε το τόξο της χορδής θα έχει μέτρο διπλάσιο της γωνίας χορδής και εφαπτομένης.

Επομένως $\overset{\frown}{ΑΒ} = 2\hat{Α}_1 = 2 \cdot 25^0 = 50^0$ (2).

γ) Από την υπόθεση, $\overset{\frown}{ΓΔ} = 3 \cdot \overset{\frown}{ΑΒ} = 3 \cdot 50^0 = 150^0$ (3).

Όμως $\overset{\frown}{ΔΑ} + \overset{\frown}{ΑΒ} + \overset{\frown}{ΒΓ} + \overset{\frown}{ΓΔ} = 360^0$ και λόγω της (1), (2), (3) έχουμε:

$\overset{\frown}{ΔΑ} + 50^0 + \overset{\frown}{ΔΑ} + 150^0 = 360^0$, επομένως $2 \cdot \overset{\frown}{ΔΑ} = 160^0$, άρα $\overset{\frown}{ΔΑ} = 80^0$.

δ) Έχουμε ότι ΑΒ//ΓΔ, από την υπόθεση, ενώ $ΑΒ \neq ΓΔ$, ως χορδές που αντιστοιχούν στα άνισα τόξα ΑΒ και ΓΔ. Επομένως, οι πλευρές ΑΔ και ΒΓ δεν είναι παράλληλες και το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο.

Λόγω του (α) έχουμε $\overset{\frown}{ΑΔ} = \overset{\frown}{ΒΓ}$, οπότε και οι αντίστοιχες χορδές ΑΔ και ΒΓ είναι ίσες. Άρα το τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές.

Θέμα 4 - Κωδικοί:
1720, 1772, 1809

9. Θέμα 1720

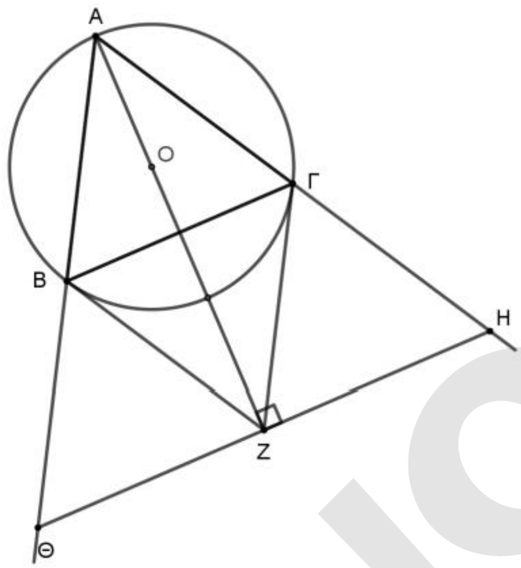
Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ που είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Τα τμήματα ΓΖ και ΒΖ είναι τα εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου στα σημεία Γ και Β αντίστοιχα. Αν το τμήμα ΘΗ είναι κάθετο στο τμήμα ΑΖ στο Ζ , να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΖΒΓ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 7)

β) Το τετράπλευρο ΑΓΖΒ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο ΒΓΗΘ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(Μονάδες 10)



ΛΥΣΗ

α) Είναι ΖΒ = ΖΓ ως εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από το Ζ προς τον κύκλο. Άρα το τρίγωνο ΖΒΓ είναι ισοσκελές. Οι γωνίες του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένες που βαίνουν στα τόξα ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ και αφού είναι γωνίες 60^o, τότε τα αντίστοιχα τόξα τους θα είναι τόξα 120^o το καθένα.

Η γωνία $B\hat{\Gamma}Z = \hat{A} = 60^o$ (γωνία από τη χορδή ΒΓ και την εφαπτομένη ΓΖ ίση με την εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής). Οπότε, το ισοσκελές τρίγωνο ΒΓΖ έχει μία γωνία ίση με 60^o, άρα είναι ισόπλευρο.

β) Από το ισόπλευρο τρίγωνο ΒΓΖ έχουμε: ΓΒ = ΓΖ = ΖΒ (1).

Από το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ βρίσκουμε: ΑΓ = ΑΒ = ΓΒ (2).

Από (1), (2) προκύπτει: ΑΓ = ΑΒ = ΓΖ = ΖΒ, δηλαδή το τετράπλευρο ΑΓΖΒ έχει όλες τις πλευρές του ίσες, οπότε είναι ρόμβος.

γ) Ισχύει ότι:

- ΘΗ ⊥ ΑΖ, από υπόθεση και
- ΒΓ ⊥ ΑΖ, γιατί είναι διαγώνιοι του ρόμβου ΑΓΖΒ και τέμνονται κάθετα.

Άρα ΒΓ // ΘΗ αφού είναι κάθετες στην ίδια ευθεία ΑΖ. Επομένως το τετράπλευρο ΒΓΗΘ είναι τραπέζιο αφού ΒΓ // ΘΗ και οι ΘΒ, ΗΓ δεν είναι παράλληλες γιατί τέμνονται στο Α. Επίσης:

- $\widehat{\Theta} = \widehat{B} = 60^{\circ}$ και $\widehat{H} = \widehat{\Gamma} = 60^{\circ}$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των ΒΓ//ΘΗ τεμνομένων από ΑΘ και ΑΗ αντίστοιχα.

Άρα το τραπέζιο ΒΓΗΘ είναι ισοσκελές γιατί οι γωνίες της βάσης του ΒΗ είναι ίσες.

10. Θέμα 1772

Έστω κύκλος (Ο, ρ) και Ε το μέσον του τόξου του ΒΓ. Μια ευθεία (ε) εφάπτεται στο κύκλο στο Ε. Οι προεκτάσεις των ΟΒ, ΟΓ τέμνουν την ευθεία (ε) στα σημεία Ζ και Η αντίστοιχα . Να αποδείξετε ότι :

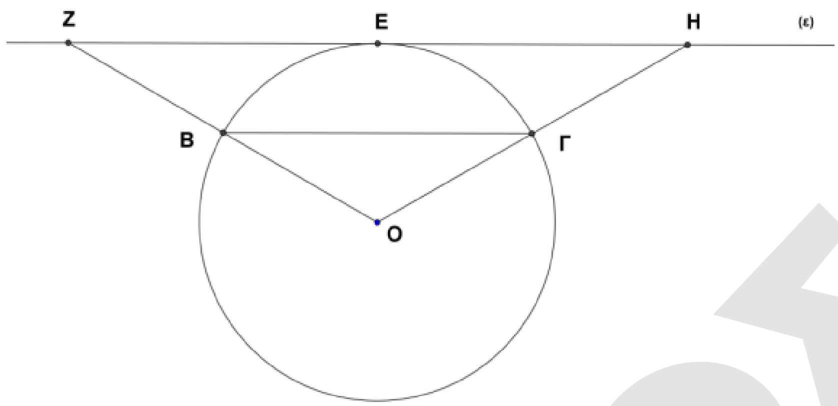
α) ΒΓ//ΖΗ (Μονάδες 5)

β) ΟΖ=ΟΗ (Μονάδες 5)

γ) Αν Β μέσον της ΟΖ

i. να αποδείξετε ότι $B\hat{E}Z = \dfrac{Z\hat{O}H}{4}$ (Μονάδες 8)

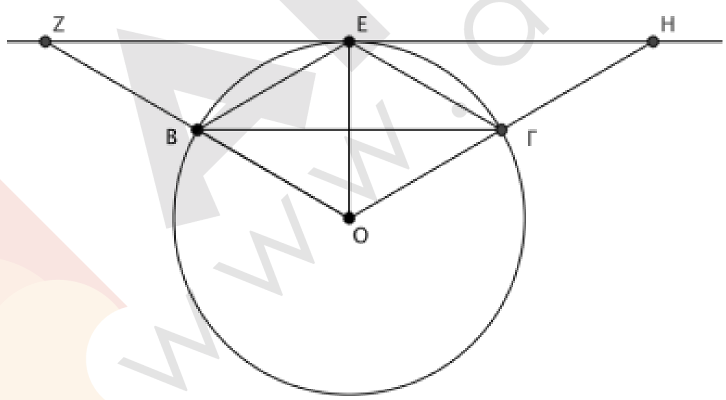
ii. να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΖΟΗ. (Μονάδες 7)



ΛΥΣΗ

α) Είναι ΟΕ ⊥ ΖΗ διότι η ακτίνα ΟΕ είναι κάθετη στην εφαπτομένη ΖΗ στο σημείο επαφής Ε. Επειδή το Ε είναι μέσον του τόξου ΒΓ, οι χορδές ΕΒ, ΕΓ είναι ίσες (ΕΒ = ΕΓ) και ΟΒ = ΟΓ . Άρα ΟΕ μεσοκάθετη του ΒΓ . Οπότε ΟΕ ⊥ ΖΗ και ΟΕ⊥ ΒΓ.

Άρα ΒΓ // ΖΗ.



β) Επειδή ΟΒ = ΟΓ = ρ, το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισοσκελές οπότε $O\hat{B}\Gamma = O\hat{\Gamma}B$ (1).

Επίσης $O\hat{B}\Gamma = \hat{Z}$ (2) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΒΓ και ΖΗ και

$O\hat{\Gamma}B = \hat{H}$ (3) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΒΓ και ΖΗ.

Τότε, από (1), (2), (3) προκύπτει:

$\hat{Z} = \hat{H}$, οπότε το τρίγωνο ΟΖΗ είναι ισοσκελές, δηλαδή ΟΖ = ΟΗ.

γ) i. Η γωνία $B\hat{E}Z$ σχηματίζεται από τη χορδή ΒΕ και την εφαπτομένη ΕΖ, οπότε ισούται με την εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο τόξο ΒΕ, δηλαδή

$B\hat{E}Z = B\hat{\Gamma}E$ (1). Η γωνία $B\hat{\Gamma}E$ είναι εγγεγραμμένη και βαίνει στο τόξο ΒΕ και η επίκεντρη $B\hat{O}E$ βαίνει στο τόξο ΒΕ, άρα $B\hat{\Gamma}E = \frac{B\hat{O}E}{2}$ (2).

Επειδή Ε μέσο του τόξου ΒΓ είναι , και $B\hat{O}E = \Gamma\hat{O}E = \frac{Z\hat{O}H}{2}$ (3).

Από τις σχέσεις (1), (2), (3) είναι $B\hat{E}Z = \frac{B\hat{O}E}{2} = \frac{Z\hat{O}H}{4}$.

ii. Επειδή ΟΒ = ΒΖ = ΟΕ προκύπτει ότι στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΕΖ είναι

$OE = \frac{OZ}{2}$ άρα $\hat{Z} = 30^0$. Επειδή το τρίγωνο ΟΖΗ είναι ισοσκελές με ΟΖ = ΟΗ είναι

$\hat{H} = \hat{Z} = 30^0$. Επιπλέον $\hat{H} + \hat{Z} + Z\hat{O}H = 180^0$ ή $30^0 + 30^0 + Z\hat{O}H = 180^0$ ή $Z\hat{O}H = 120^0$.

11. Θέμα 1809

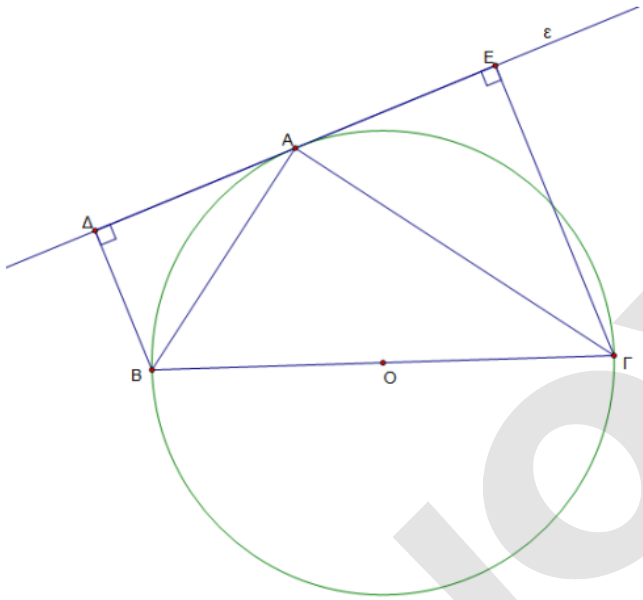
Θεωρούμε κύκλο κέντρου Ο, με διάμετρο ΒΓ. Από σημείο Α του κύκλου φέρουμε την εφαπτομένη (ε) του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$.

Από τα σημεία Β και Γ φέρουμε τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ κάθετα στην ευθεία (ε).

α) Να αποδείξετε ότι ΒΑ και ΓΑ είναι διχοτόμοι των γωνιών $\Delta\hat{B}\Gamma$ και $E\hat{\Gamma}B$ αντίστοιχα. (Μονάδες 8)

β) Αν ΑΖ είναι ύψος του τριγώνου $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$, να αποδείξετε ότι $A\Delta = AE = AZ$. (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι $B\Delta + \Gamma E = B\Gamma$. (Μονάδες 9)



ΛΥΣΗ

α) Είναι $B\hat{A}\Gamma = 90^o$ ως εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο.

Η γωνία $\Delta\hat{A}B$ σχηματίζεται από την εφαπτομένη ευθεία (ε) και τη χορδή ΑΒ, άρα ισχύει $\Delta\hat{A}B = A\hat{\Gamma}B$. Όμοια $E\hat{A}\Gamma = A\hat{B}\Gamma$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ βρίσκουμε

$A\hat{B}\Gamma + A\hat{\Gamma}B = 90^o \Leftrightarrow A\hat{B}\Gamma = 90^o - A\hat{\Gamma}B$

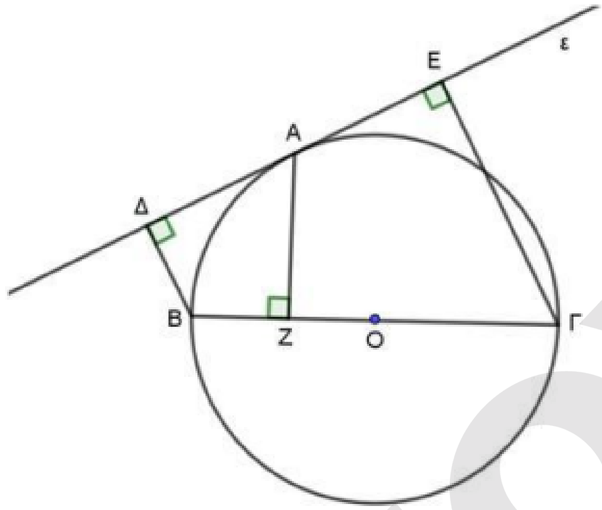
Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ βρίσκουμε

$A\hat{B}\Delta + \Delta\hat{A}B = 90^o \Leftrightarrow A\hat{B}\Delta = 90^o - A\hat{\Gamma}B$

Οπότε προκύπτει ότι $A\hat{B}\Gamma = A\hat{B}\Delta$. Άρα η ΒΑ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{B}\Gamma$.

Όμοια βρίσκουμε $A\hat{\Gamma}B = 90^o - A\hat{B}\Gamma$ και $A\hat{\Gamma}E = 90^o - E\hat{A}\Gamma = 90 - A\hat{B}\Gamma$. Άρα

$A\hat{\Gamma}B = A\hat{\Gamma}E$, δηλαδή η ΓΑ είναι διχοτόμος της $E\hat{\Gamma}B$.



β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΖΓ και ΑΕΓ είναι ίσα διότι:

- ΑΓ κοινή πλευρά,
- $Z\hat{Γ}A = A\hat{Γ}E$, διότι ΑΓ διχοτόμος της $E\hat{Γ}B$

Άρα ΑΖ = ΑΕ διότι βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $Z\hat{Γ}A$, $A\hat{Γ}E$ αντίστοιχα.

Επίσης, τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΒΖ είναι ίσα διότι

- ΑΒ, κοινή πλευρά,
- $A\hat{B}Δ = A\hat{B}Z$, διότι ΑΒ διχοτόμος της $Δ\hat{B}Γ$

Άρα ΑΔ = ΑΖ διότι βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $A\hat{B}Δ$, $A\hat{B}Z$ αντίστοιχα.

Οπότε προκύπτει ότι ΑΔ = ΑΕ = ΑΖ.

γ) Από τα ίσα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΒΖ έχουμε ΒΖ = ΒΔ .

Όμοια, από τα ίσα τρίγωνα ΑΖΓ και ΑΕΓ έχουμε ΓΖ = ΓΕ.

Έχουμε ΒΓ = ΒΖ + ΓΖ = ΒΔ + ΓΕ ⇔ ΒΓ = ΒΔ + ΓΕ