Κεφ. 6.2. - Τράπεζα Θεμάτων 2022 - Γεωμετρία Α' Λυκείου

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ & ΛΥΣΕΙΣ

Η Τράπεζα Θεμάτων για τη Γεωμετρία Α' Λυκείου είναι μία μεγάλη «θάλασσα». Εμείς όμως έχουμε φροντίσει για εσένα, συγκεντρώνοντας εκείνα τα θέματα που αποτελούν τη «βάση» της γνώσης και για τα υπόλοιπα. Μελετώντας και κατανοώντας το μοτίβο σκέψης για τα συγκεκριμένα, μπορείς να λύσεις με επιτυχία και τα υπόλοιπα θέματα. Στην ιστοσελίδα μας www.arnos.gr για το Course της Γεωμετρίας, μελετάς και προετοιμάζεσαι με την αναλυτική διδασκαλία σε ασκήσεις και θέματα, στο ύφος της Τράπεζας.

Θέμα 1 - Κωδικοί:

11892, 11895, 11898, 11964, 12070, 12416

1. Θέμα 11892

α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμία από αυτές το γράμμα Σ, αν η πρόταση είναι σωστή, ή το γράμμα Λ, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και κάποια γωνία ίση, τότε είναι ίσα.

ii. Δύο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία, σε διαφορετικά σημεία της, είναι μεταξύ τους παράλληλες.

iii. Κάθε τετράγωνο είναι και ρόμβος.

iv. Κάθε επίκεντρη γωνία είναι διπλάσια της εγγεγραμμένης που βαίνει στο ίδιο τόξο.

v. Οι διάμεσοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, του οποίου η απόσταση από το μέσο κάθε πλευράς είναι τα $\frac{2}{3}$ της αντίστοιχης διαμέσου.

(Μονάδες 10)

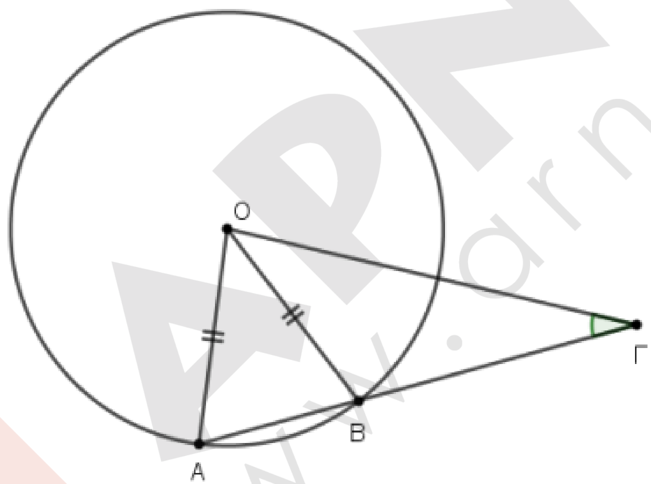
β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α)

i. Λάθος.



Τα τρίγωνα ΟΒΓ και ΟΑΓ έχουν ΟΑ = ΟΒ, γιατί είναι ακτίνες του κύκλου, ΟΓ κοινή, και $\hat{\Gamma}$ κοινή. Όμως δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι είναι ίσα, γιατί η $\hat{\Gamma}$ δεν είναι περιεχόμενη γωνία στις ίσες πλευρές. Μάλιστα τα τρίγωνα ΟΒΓ και ΟΑΓ δεν είναι ίσα αφού ΑΓ>ΒΓ.

ii. Σωστό.

iii. Σωστό.

iv. Σωστό.

v. Λάθος. Η απόσταση του βαρύκεντρου από το μέσο της πλευράς είναι το $\frac{1}{3}$ της αντίστοιχης διαμέσου.

β) Σελίδα 88 σχολικού βιβλίου, παρ. 4.6.

2. Θέμα 11895

α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών.

ii. Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης γωνίας που βαίνει στο ίδιο τόξο.

iii. Οι διαγώνιοι ενός παραλληλογράμμου διχοτομούνται.

iv. Η διάμεσος ενός τραπεζίου ισούται με το άθροισμα των δύο βάσεων του τραπεζίου.

v. Αν γνωρίζουμε ότι δύο κύκλοι που έχουν ακτίνες R και ρ με $R > \rho$, εφάπτονται, τότε συμπεραίνουμε ότι η απόσταση των κέντρων τους είναι $R + \rho$.

(Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της και αντίστροφα, ότι κάθε εσωτερικό σημείο της γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές είναι σημείο της διχοτόμου.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α)

i. Σ, Παράγραφος 4.6.

ii. Σ, Παράγραφος 6.2.

iii. Σ, Παράγραφος 5.2.

iv. Λ, Παράγραφος 5.10. Η διάμεσος ενός τραπεζίου ισούται με το ημιάθροισμα των δύο βάσεων του τραπεζίου.

iv. Λ, Παράγραφος 3.16. Αν εφάπτονται εσωτερικά η απόσταση των κέντρων είναι $\mathrm{R}-\rho$

β) Παράγραφος 3.6. ΘΕΩΡΗΜΑ IV (σελ 51).

3. Θέμα 11898

α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

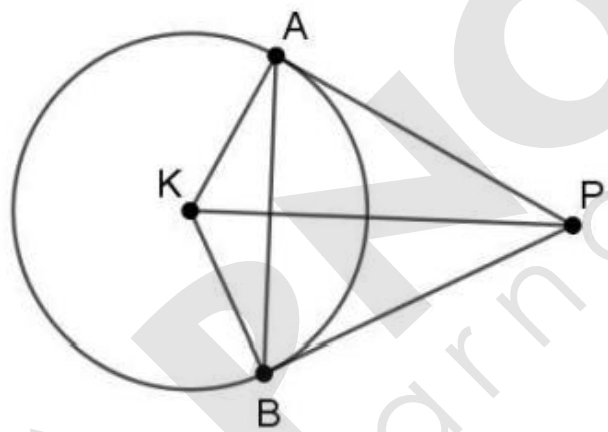
i. Οι μεσοκάθετες των πλευρών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, που είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

ii. Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.

iii. Σε κάθε τρίγωνο βαρύκεντρο ονομάζεται το σημείο τομής των διχοτόμων του.

iv. Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο το ύψος που άγεται από οποιαδήποτε κορυφή είναι διχοτόμος της αντίστοιχης γωνίας και διάμεσος της απέναντι πλευράς.

v. Αν στο παρακάτω σχήμα η ΡΚ είναι η διακεντρική ευθεία του σημείου Ρ, τότε η ίδια ευθεία είναι μεσοκάθετος της χορδής ΑΒ.



(Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία ισούται με 30^o, τότε η απέναντι πλευρά της είναι το μισό της υποτείνουσας.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α)

i. Σ, Παράγραφος 4.5.

ii. Σ, Παράγραφος 6.2.

iii. Λ, Παράγραφος 5.7. Βαρύκεντρο (ή κέντρο βάρους) λέγεται το σημείο τομής των διαμέσων κάθε τριγώνου.

iv. Λ, Παράγραφος 3.6. Το ύψος ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχεί στη βάση είναι διάμεσος και διχοτόμος της γωνίας της κορυφής.

iv. Σ, Παράγραφος 3.15.

β) Παράγραφος 5.9. Πόρισμα (μόνο το ευθύ).

4. Θέμα 11964

α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Οι οξείες γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι παραπληρωματικές.

ii. Υπάρχουν σημεία της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος που δεν ισαπέχουν από τα άκρα του.

iii. Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.

iv. Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από καθεμία από τις απέναντι γωνίες του τριγώνου.

v. Κάθε τετράγωνο είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι αν ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές, τότε οι γωνίες που πρόσκεινται σε μία βάση είναι ίσες. (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) i→ Λάθος , παράγραφος 4.6

ii→ Λάθος , παράγραφος 3.2

iii→ Σωστό , παράγραφος 6.2

iv→ Σωστό , παράγραφος 3.10

v→ Σωστό , παράγραφος 5.5

β) Σχολικό σελίδα 118, παράγραφος 5.11

5. Θέμα 12070

α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Από κάθε σημείο Ρ που είναι εξωτερικό ενός κύκλου διέρχεται μόνο μία εφαπτόμενη ευθεία προς τον κύκλο.

ii. Σε όλα τα κυρτά πολύγωνα το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών τους είναι 4 ορθές.

iii. Κάθε τετράγωνο είναι ρόμβος.

iv. Σε κάθε τραπέζιο οι διαγώνιές του είναι ίσες.

v. Δύο εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ίσα τόξα του ίδιου κύκλου, είναι ίσες.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι οι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου ανά δύο είναι ίσες.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α)

i. Λ

(Από το σημείο Ρ που είναι εξωτερικό ενός κύκλου υπάρχουν δυο εφαπτόμενες προς τον κύκλο).

ii. Σ (θεωρία § 4.8)

iii. Σ (θεωρία § 5.5)

iv. Λ (η ιδιότητα αυτή ισχύει μόνο στα ισοσκελή τραπέζια και όχι σε κάθε τραπέζιο).

v. Σ (θεωρία § 6.2)

β) Απόδειξη κριτηρίου i) σχολικό βιβλίο σελίδα 103, § 5.2

6. Θέμα 12416

α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Κάθε χορδή κύκλου είναι μικρότερη της διαμέτρου.

ii. Παράλληλα τμήματα που έχουν τα άκρα τους σε δύο παράλληλες ευθείες είναι ίσα.

iii. Αν οι διαγώνιοι ενός τετραπλεύρου είναι ίσες και κάθετες, τότε το τετράπλευρο είναι τετράγωνο.

iv. Δύο ορθογώνια τρίγωνα που έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία είναι ίσα.

v. Το μέτρο μιας εγγεγραμμένης γωνίας ισούται με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου της.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου που μπορούμε να φέρουμε από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α)

i. Λάθος

Η πρόταση δεν ισχύει όταν η χορδή είναι διάμετρος του κύκλου.

ii. Σωστό

Πόρισμα ΙΙ, σελίδα 103 σχολικό βιβλίο.

iii. Λάθος

Θα πρέπει το τετράπλευρο να είναι παραλληλόγραμμο.

iv. Σωστό

§3.6, 1η συνέπεια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων, σελίδα 49 σχολικό βιβλίο (Σχήμα 24).

v. Σωστό

Πόρισμα i, σελίδα 129 σχολικό βιβλίο.

β) §3.15, Θεώρημα II (απόδειξη), σελίδα 68 σχολικό βιβλίο (Σχήμα 60).

Θέμα 2 - Κωδικοί:

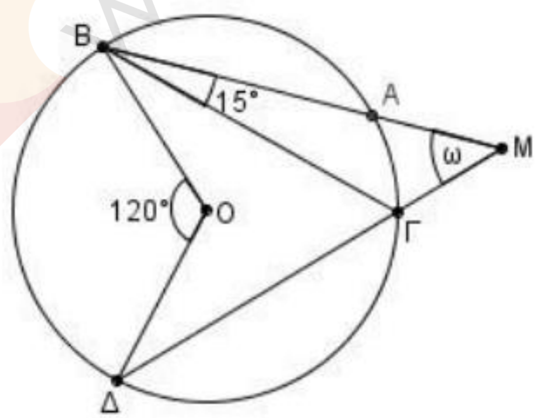
1580, 1581, 1663, 1665, 1673, 1696, 1703, 12638, 12642, 13441, 13740 13747, 13753, 13756

7. Θέμα 1580

Στο ακόλουθο σχήμα η επίκεντρη γωνία $\mathrm{B\hat{O}\Delta}$ είναι 120° και η γωνία $\Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A}$ είναι 15°.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία ΒΓΔ. (Μονάδες 12)

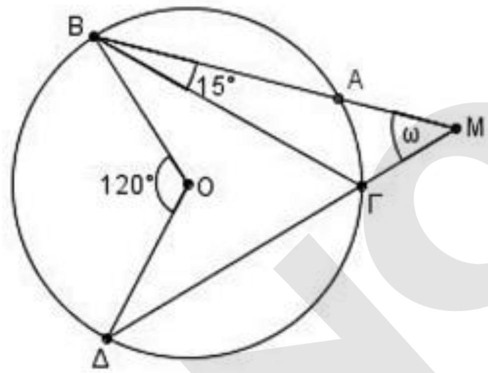
β) Να αποδείξετε ότι η γωνία ω είναι 45°. (Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ

α) Η εγγεγραμμένη γωνία $B\hat{\Gamma}\Delta$ και η επίκεντρη $B\hat{O}\Delta$ βαίνουν στο ίδιο τόξο, άρα

$B\hat{\Gamma}\Delta = \frac{B\hat{O}\Delta}{2} = 60^o$.



β) Η γωνία $B\hat{\Gamma}\Delta$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΒΓΜ, οπότε:

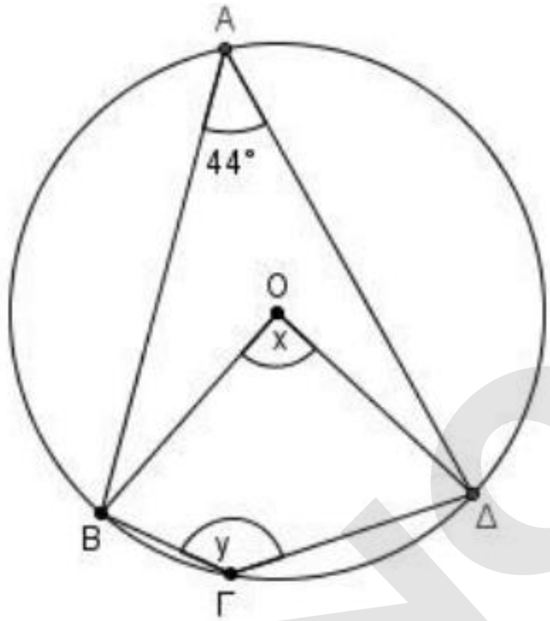
$B\hat{\Gamma}\Delta = \Gamma\hat{B}M + \hat{M} = 60^o$, οπότε $60^o = 15^o + \hat{\omega}$. Άρα $\hat{\omega} = 45^o$

8. Θέμα 1581

Σε κύκλο κέντρου Ο δίνονται οι χορδές ΑΒ και ΑΔ τέτοιες ώστε η γωνία $B\hat{A}\Delta$ να είναι 44°. Θεωρούμε τυχαίο σημείο Γ του κύκλου και σχηματίζουμε το τετράπλευρο ΒΓΔΟ.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία x. (12 Μονάδες)

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία y είναι 136°. (13 Μονάδες)



α) Η επίκεντρη γωνία $\hat{x}$ και η εγγεγραμμένη $B\hat{A}\Delta$ βαίνουν στο ίδιο τόξο, άρα

$B\hat{A}\Delta = \frac{B\hat{O}\Delta}{2}$, οπότε θα είναι $\hat{x} = 2 \cdot 44 = 88^o$.

β) Επειδή $\hat{x} = 88^o$ και το τόξο $\overset{\frown}{B\Gamma\Delta}$ έχει μέτρο 88^o. Τότε για το τόξο $\overset{\frown}{BA\Delta}$ έχουμε:

$\overset{\frown}{BA\Delta} = 360^\circ - 88^\circ = 272^\circ$. Η εγγεγραμμένη γωνία $\hat{y}$ βαίνει στο τόξο ΒΑΔ, άρα

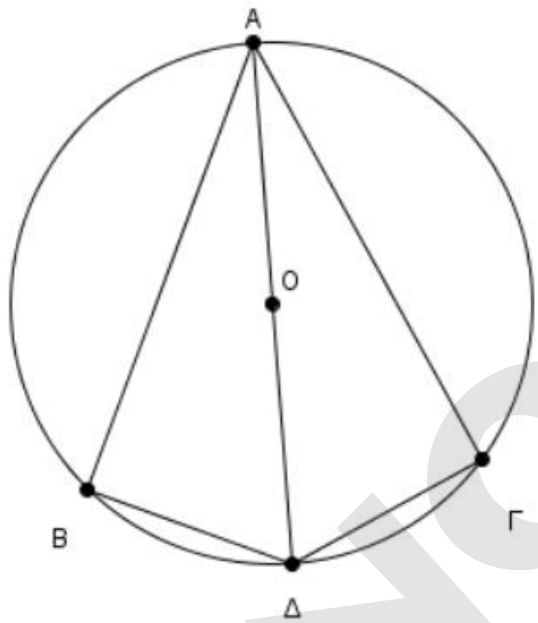
$\hat{y} = \frac{272^o}{2} = 136^o$.

9. Θέμα 1663

Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Αν η διάμετρος ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΑΓ, να αποδείξετε ότι:

α) Τα τόξα ΒΔ και ΔΓ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ίσα. (Μονάδες 15)



ΛΥΣΗ

α) Επειδή η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $Β\hat{Α}Γ$ είναι $Β\hat{Α}Δ = Δ\hat{Α}Γ$. Οι ίσες γωνίες $Β\hat{Α}Δ$ και $Δ\hat{Α}Γ$ είναι εγγεγραμμένες και βαίνουν στα τόξα $\overset{\frown}{ΒΔ}$ και $\overset{\frown}{ΔΓ}$, οπότε και τα τόξα αυτά είναι ίσα.

β) Οι εγγεγραμμένες γωνίες $Α\hat{Β}Δ$ και $Α\hat{Γ}Δ$ είναι ορθές διότι βαίνουν σε ημικύκλιο.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ έχουν:

- ΑΔ κοινή πλευρά
- $Β\hat{Α}Δ = Δ\hat{Α}Γ$, διότι ΑΔ διχοτόμος της $Β\hat{Α}Γ$.

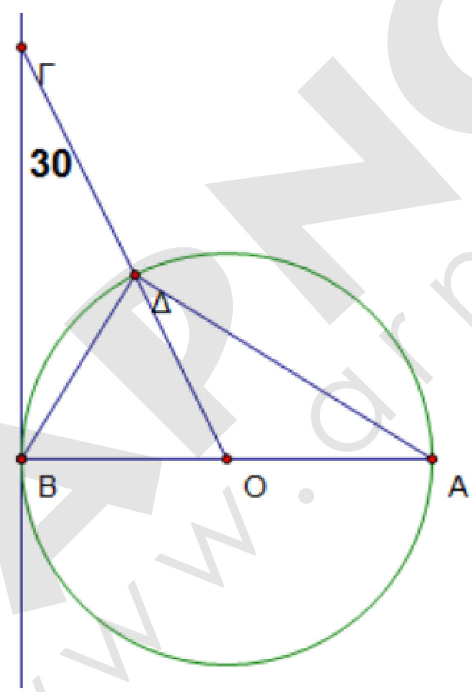
Άρα τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ίσα

10. Θέμα 1665

Θεωρούμε κύκλο (Ο, ρ) και διάμετρό του ΑΒ. Στην εφαπτομένη του κύκλου στο Β θεωρούμε σημείο Γ τέτοιο ώστε, η γωνία ΒΓΟ να είναι ίση με 30^o. Αν η ΟΓ τέμνει τον κύκλο στο Δ να αποδείξετε ότι:

α) $O\Gamma = 2OA$. (Μονάδες 12)

β) $B\Gamma = A\Delta$. (Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ

α) Η εφαπτομένη ΒΓ είναι κάθετη στην ακτίνα ΟΒ στο σημείο επαφής, άρα $\Gamma\hat{B}O = 90^o$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΒΓ είναι $\hat{\Gamma} = 30^o$, άρα $OB = \frac{O\Gamma}{2} \Leftrightarrow O\Gamma = 2OB$ επειδή $OB = OA = \rho$ έχουμε $O\Gamma = 2OA$

β) Είναι $B\hat{\Delta}A = 90^o$ διότι είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΒΓ και ΑΒΔ έχουν:

- ΟΓ = ΑΒ, διότι ΟΓ = 2ΟΑ = 2ρ και ΑΒ = 2ρ
- $B\hat{\Gamma}O = B\hat{A}\Delta = 30^o$

$\Delta\hat{O}B = 60^\circ$ η οποία είναι εξωτερική στο ισοσκελές τρίγωνο ΔΟΑ (ΟΑ=ΟΔ) οπότε

$$B\hat{A}\Delta = \frac{\Delta\hat{O}B}{2} = 30^\circ$$

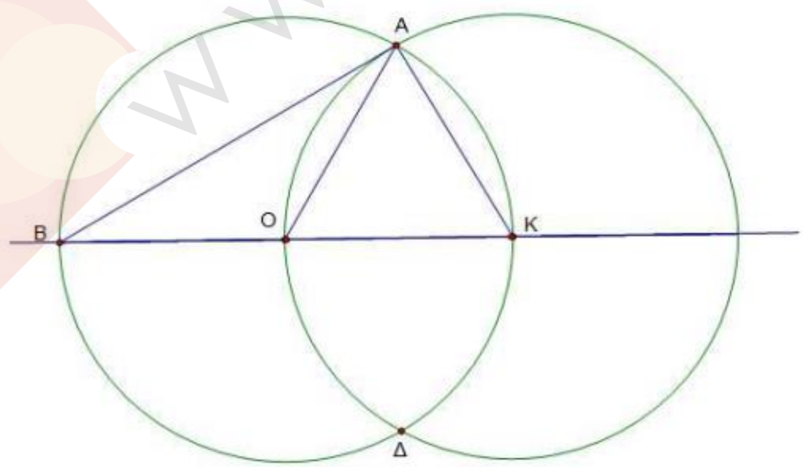
- Άρα τα τρίγωνα ΟΒΓ και ΑΒΔ είναι ίσα οπότε ισχύει ΒΓ = ΑΔ επειδή έχουν τις προσκείμενες γωνίες τους ίσες μία προς μία.

11. Θέμα 1673

Δίνονται δυο ίσοι κύκλοι (Ο,ρ) και (Κ,ρ) με ΟΚ=ρ, οι οποίοι τέμνονται στα σημεία Α και Δ.

α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΟΑΚ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 10)

β. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΑΚ. (Μονάδες 15)



ΛΥΣΗ

α) Είναι ΟΑ = ΟΚ = ρ, ως ακτίνες του κύκλου (Ο, ρ). Ισχύει επίσης ότι ΚΑ = ρ ως ακτίνα του κύκλου (Κ, ρ). Άρα ΟΑ = ΟΚ = ΚΑ = ρ. Άρα το τρίγωνο ΟΑΚ είναι ισόπλευρο.

β) Επειδή ΟΑΚ ισόπλευρο τρίγωνο είναι $B\hat{K}A = 60^o$. Επίσης $B\hat{A}K = 90^o$, διότι είναι εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο ημικύκλιο $\overset{\frown}{B\Delta K}$. Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΒΑΚ βρίσκουμε:

$B\hat{A}K + B\hat{K}A + A\hat{B}K = 180^o \Leftrightarrow 90^o + 60^o + A\hat{B}K = 180^o \Leftrightarrow A\hat{B}K = 30^o$

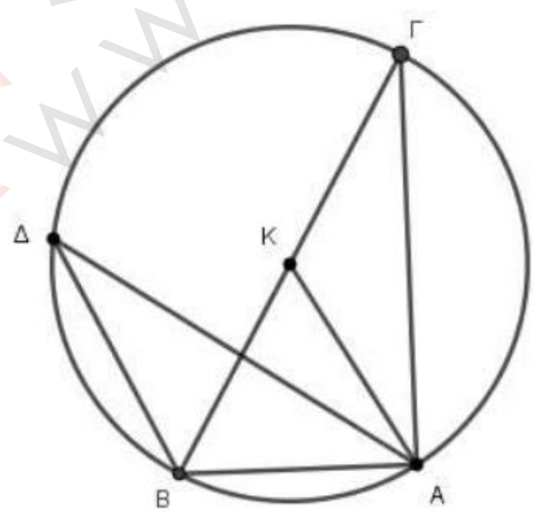
12. Θέμα 1696

Έστω κύκλος (Κ,ρ), μια διάμετρός του ΒΓ και χορδή του ΒΑ=ρ. Αν Δ τυχαίο σημείο του κύκλου διαφορετικό των Β και Γ, όπως στο σχήμα που ακολουθεί,

α) να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΚΑ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 7)

β) να υπολογίσετε την γωνία $B\hat{\Delta}A$. (Μονάδες 9)

γ) να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 9)



ΛΥΣΗ

α) Είναι ΚΑ = ΚΒ = ΚΓ ως ακτίνες κύκλου και ΚΓ = ΒΑ από τα δεδομένα.

Άρα ΚΑ = ΚΒ = ΑΒ, οπότε το τρίγωνο ΒΚΑ είναι ισόπλευρο γιατί έχει τις τρεις πλευρές του ίσες.

β) Η εγγεγραμμένη γωνία $B\hat{\Delta}A$ και η επίκεντρη $B\hat{K}A$ βαίνουν στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{AB}$ του κύκλου. Η γωνία $B\hat{K}A$, ως γωνία ισοπλεύρου τριγώνου, θα είναι ίση με 60^0.

Γνωρίζοντας ότι κάθε εγγεγραμμένη ισούται με το μισό της επίκεντρης που βαίνει στο ίδιο τόξο με αυτήν, θα είναι $B\hat{\Delta}A = \frac{B\hat{K}A}{2}$. Οπότε, $B\hat{\Delta}A = \frac{60^o}{2}$, άρα $B\hat{\Delta}A = 30^o$.

γ) Οι γωνίες $B\hat{\Delta}A$ και $B\hat{\Gamma}A$ είναι εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{AB}$ του κύκλου, οπότε θα είναι ίσες και αφού $B\hat{\Delta}A = 30^o$ άρα και $B\hat{\Gamma}A= 30^0$.

Η ΒΓ είναι διάμετρος του κύκλου, επομένως το τόξο $\overset{\frown}{B\Delta\Gamma}$ είναι ημικύκλιο. Άρα, η γωνία $B\hat{A}\Gamma$ που βαίνει στο ημικύκλιο είναι ορθή, δηλαδή $B\hat{A}\Gamma = 90^o$.

Η $\Gamma\hat{B}A = 60^0$ γιατί είναι και γωνία του ισοπλεύρου τριγώνου ΒΚΑ.

Επομένως, οι γωνίες του τριγώνου ΒΑΓ είναι $B\hat{\Gamma}A = 30^o$, $B\hat{A}\Gamma = 90^o$ και $\Gamma\hat{B}A = 60^0$.

13. Θέμα 1703

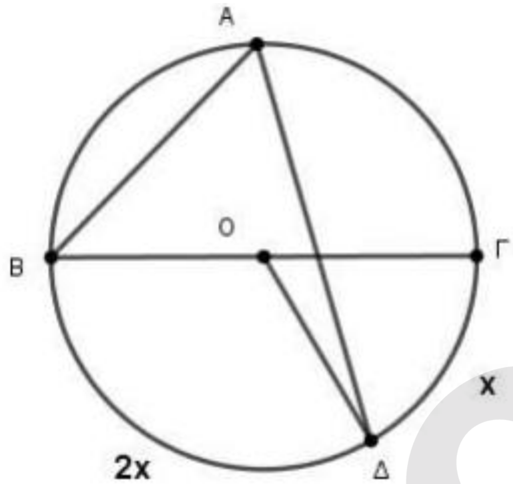
Έστω κύκλος κέντρου Ο και διάμετρός του ΒΓ. Θεωρούμε σημεία Α και Δ του κύκλου εκατέρωθεν της ΒΓ, τέτοια ώστε το τόξο ΒΔ να είναι διπλάσιο του τόξου ΔΓ.

Να υπολογίσετε:

α) το μέτρο x του τόξου ΓΔ (Μονάδες 8)

β) τη γωνία ΒΟΔ (Μονάδες 9)

γ) τη γωνία ΒΑΔ (Μονάδες 8)

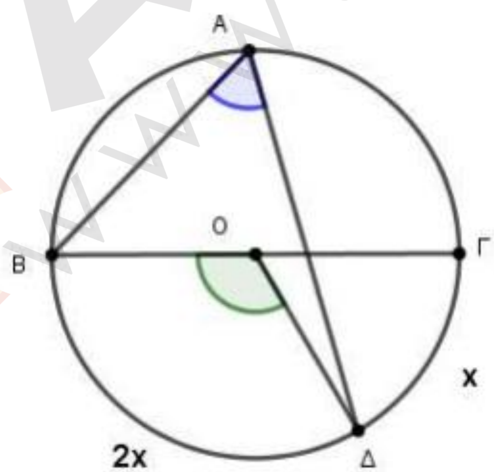


ΛΥΣΗ

α) Το τόξο $\overset{\frown}{\text{ΒΔΓ}}$ είναι ημικύκλιο, οπότε: $2x + x = 180^o \Leftrightarrow 3x = 180^o \Leftrightarrow x = 60^o$.

β) Η γωνία $\text{Β}\hat{\text{Ο}}\text{Δ}$ είναι επίκεντρη και βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{\text{ΒΔ}}$, άρα $\text{Β}\hat{\text{Ο}}\text{Δ} = 2x = 120^o$.

γ) Η γωνία $\text{Β}\hat{\text{Α}}\text{Δ}$ είναι εγγεγραμμένη και βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{\text{ΒΔ}}$, άρα $\text{Β}\hat{\text{Α}}\text{Δ} = \frac{120^o}{2} = 60^o$.

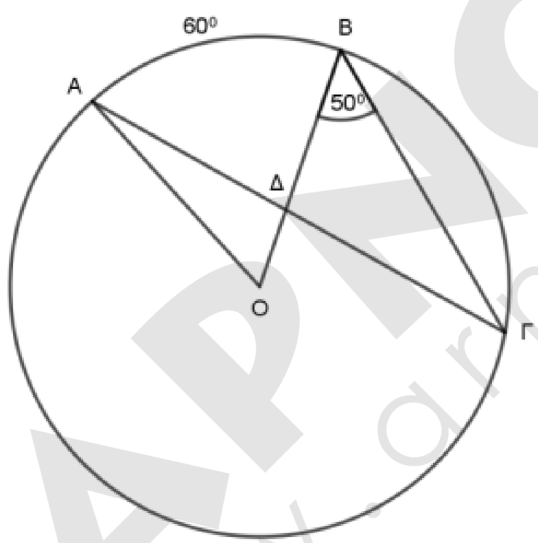


14. Θέμα 12638

Στον κύκλο του σχήματος, το Ο είναι το κέντρο του, το τόξο ΑΒ ισούται με 60^0 και η γωνία Β ισούται με 50^0. Αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας, να υπολογίσετε:

α) πόσες μοίρες είναι η γωνία Γ. (Μονάδες 10)

β) πόσες μοίρες είναι η γωνία ΑΔΟ (Μονάδες 15)



ΛΥΣΗ

α) Η γωνία Γ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο, που βαίνει στο τόξο ΑΒ άρα

$\hat{\Gamma} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2} = \dfrac{60^0}{2} = 30^0$.

β) Στο τρίγωνο ΒΓΔ είναι: $\hat{B} + \hat{\Gamma} + B\hat{\Delta}\Gamma = 180^0$ ή $50^0 + 30^0 + B\hat{\Delta}\Gamma = 180^0$

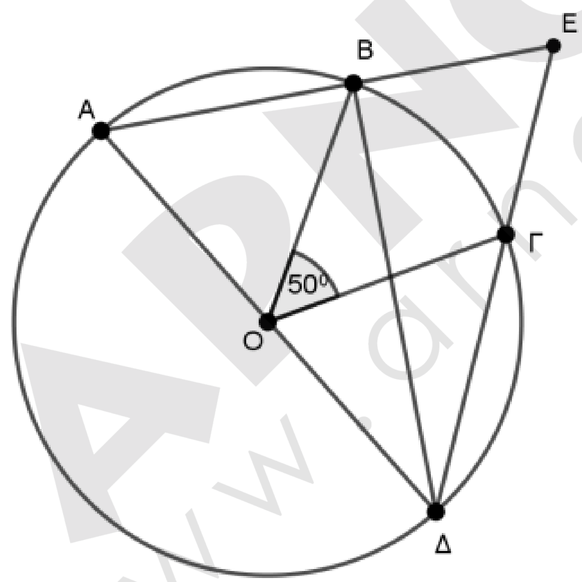
οπότε η $B\hat{\Delta}\Gamma = 100^0$, επομένως η $A\hat{\Delta}O = 100^0$ ως κατά κορυφήν της.

15.Θέμα 12642

Σε κύκλο με κέντρο το Ο, παίρνουμε διαδοχικά τα σημεία Α, Β, Γ και Δ, ώστε η ΑΔ να είναι διάμετρος και η γωνία ΒΟΓ να ισούται με 50^0. Αν η προέκταση της ΑΒ προς το Β, τέμνει την προέκταση της ΔΓ προς το Γ στο Ε, αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας, να υπολογίσετε:

α) το μέτρο της γωνίας ΒΔΓ. (Μονάδες 10)

β) το μέτρο της γωνία ΑΕΔ. (Μονάδες 15)



ΛΥΣΗ

α) Η γωνία ΒΔΓ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο και βαίνει στο τόξο ΒΓ, οπότε θα ισούται με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης. Άρα $B\hat{\Delta}\Gamma = \frac{B\hat{O}\Gamma}{2} = \frac{50^0}{2} = 25^0$.

β) Επειδή η ΑΔ είναι διάμετρος, η γωνία ΑΒΔ ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο, θα είναι ορθή. Άρα $A\hat{B}\Delta = 90^0 = \Delta\hat{B}E$, οπότε το τρίγωνο ΔΒΕ είναι ορθογώνιο και η γωνία του ΒΔΕ λόγω του (α) ισούται με 25^0.

Επίσης οι γωνίες ΒΔΕ και ΒΕΔ είναι συμπληρωματικές.

Άρα η $B\hat{E}\Delta = 90^0 - 25^0 = 65^0$. Δηλαδή η $A\hat{E}\Delta = 65^0$.

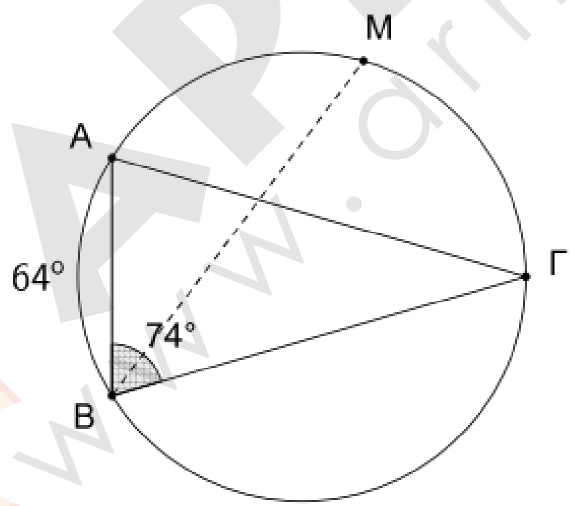
16. Θέμα 13441

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο με $\hat{B} = 74^o$. Το μέτρο του τόξου ΑΒ που δεν περιέχει το σημείο Γ ισούται με 64^o και Μ είναι το μέσο του τόξου ΑΓ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\Gamma}$ και $\hat{A}$ του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 12)

β) Ποιο είναι το είδος του τριγώνου ΑΒΓ ως προς τις πλευρές του; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι η ΒΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$. (Μονάδες 5)



ΛΥΣΗ

α) Η $\hat{\Gamma}$ είναι εγγεγραμμένη γωνία του κύκλου που βαίνει στο τόξο ΑΒ, συνεπώς το μέτρο της ισούται με το μισό του μέτρου του τόξου αυτού. Άρα $\hat{\Gamma} = \frac{64^o}{2} = 32^o$.

Το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ είναι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o$.

Όμως $\hat{B} = 74^o$ από τα δεδομένα και $\hat{\Gamma} = 32^o$, οπότε έχουμε

$\hat{A} + 74^o + 32^o = 180^o$ ή $\hat{A} = 74^o$.

β) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, γιατί έχει δύο ίσες γωνίες, τις $\hat{A} = \hat{B} = 74^o$.

γ) Το σημείο Μ είναι το μέσο του τόξου ΑΓ, άρα τα τόξα ΑΜ και ΜΓ είναι ίσα. Οι γωνίες $A\hat{B}M$ και $\Gamma\hat{B}M$ είναι ίσες, γιατί είναι εγγεγραμμένες που βαίνουν στα ίσα τόξα ΑΜ και ΜΓ αντίστοιχα. Από την ισότητα $A\hat{B}M = \Gamma\hat{B}M$ συμπεραίνουμε ότι η ΒΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$.

17. Θέμα 13740

Σε κύκλο κέντρου Ο φέρουμε μια τυχαία χορδή του ΑΒ, την οποία προεκτείνουμε προς το μέρος του Β κατά ίσο τμήμα ΒΓ. Φέρουμε κάθετη στην ΑΓ στο σημείο της Β που τέμνει τον κύκλο στο σημείο Δ. Να αποδείξετε ότι:

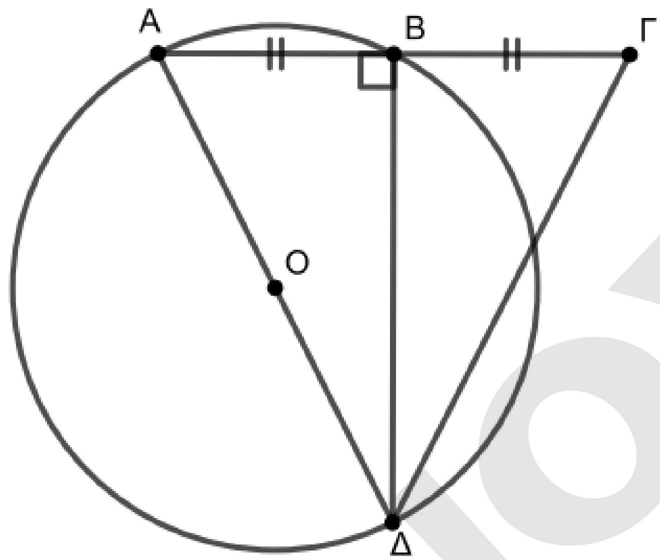
α) ΔΑ = ΔΓ. (Μονάδες 12)

β) Η ΑΔ είναι διάμετρος του κύκλου. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Στο τρίγωνο ΔΑΓ, το τμήμα ΔΒ είναι διάμεσος της πλευράς ΑΓ, αφού ΑΒ = ΒΓ από την υπόθεση. Επίσης το τμήμα ΔΒ είναι και ύψος, αφού $\Delta B \perp A\Gamma$ από την υπόθεση. Στο τρίγωνο ΔΑΓ το τμήμα ΔΒ είναι διάμεσος και ύψος, άρα το ΔΑΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΓ, επομένως ΔΑ = ΔΓ.

β) Τα σημεία Α, Β και Δ είναι σημεία του κύκλου, άρα η γωνία $A\hat{B}\Delta$ είναι εγγεγραμμένη και επειδή είναι ορθή, θα βαίνει σε ημικύκλιο. Δηλαδή η ΑΔ είναι διάμετρος του κύκλου.

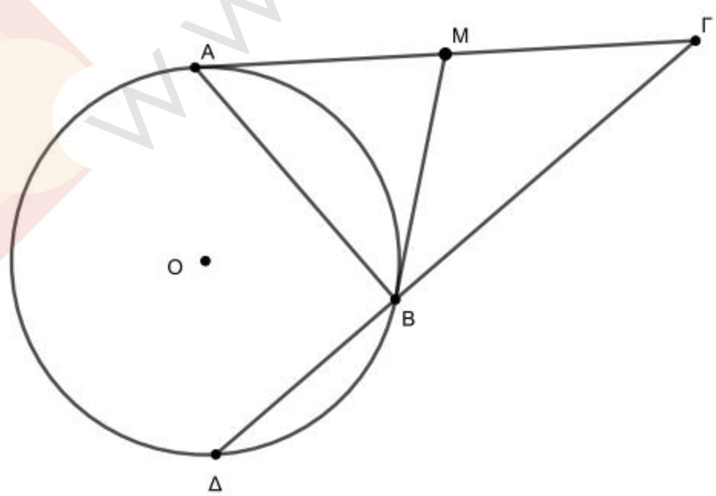


18. Θέμα 13747

Από σημείο Μ εξωτερικό ενός κύκλου κέντρου Ο φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΜΑ και ΜΒ. Προεκτείνουμε το τμήμα ΑΜ προς το μέρος του Μ και παίρνουμε τμήμα ΜΓ = ΑΜ. Από το σημείο Γ φέρουμε την τέμνουσα ΓΒΔ του κύκλου. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 13)

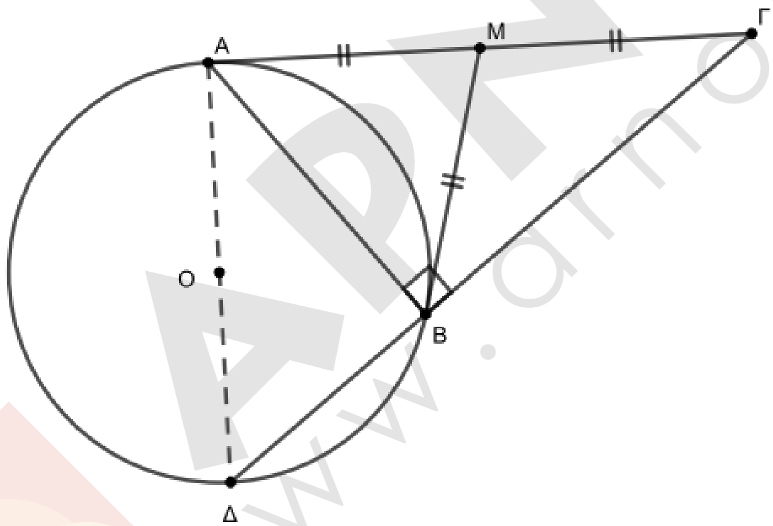
β) Τα σημεία Α και Δ είναι αντιδιαμετρικά. (Μονάδες 12)



ΛΥΣΗ

α) Τα τμήματα ΜΑ και ΜΒ είναι ίσα γιατί είναι εφαπτόμενα τμήματα από σημείο εκτός του κύκλου. Από την υπόθεση έχουμε ότι ΜΓ=ΑΜ, άρα ΜΑ = ΜΒ = ΜΓ. Δηλαδή η ΒΜ, που είναι διάμεσος προς την πλευρά ΑΓ στο τρίγωνο ΒΑΓ, ισούται με το μισό της ΑΓ. Οπότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά ΑΓ και $Α\widehat{Β}Γ = 90^o$.

β) $Α\widehat{Β}Γ = 90^o$, οπότε και $Α\widehat{Β}Δ = 90^o$. Τα σημεία Α, Β, Δ είναι σημεία του κύκλου, άρα η $Α\widehat{Β}Δ$ είναι εγγεγραμμένη γωνία και επειδή είναι ορθή θα βαίνει σε ημικύκλιο. Δηλαδή η ΑΔ είναι διάμετρος επομένως τα σημεία Α, Δ είναι αντιδιαμετρικά.



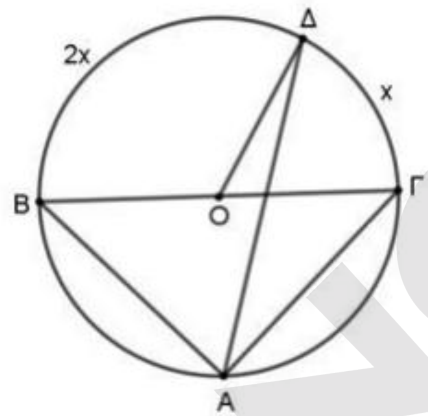
19. Θέμα 13753

Δίνεται κύκλος (Ο, ρ) με διάμετρο ΒΓ. Έστω Α και Δ σημεία του κύκλου τα οποία βρίσκονται σε διαφορετικά ημικύκλια ως προς τη διάμετρο ΒΓ. Τα μέτρα των τόξων ΒΔ και ΔΓ είναι 2x και x αντίστοιχα. Να υπολογίσετε το μέτρο:

α) της γωνίας ΒΑΓ. (Μονάδες 7)

β) x του τόξου ΓΔ. (Μονάδες 8)

γ) της γωνίας ΒΟΔ. (Μονάδες 10)



ΛΥΣΗ

α) Η γωνία ΒΑΓ είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο οπότε είναι ορθή, δηλαδή $B\hat{A}\Gamma = 90^\circ$.

β) Η ΒΓ είναι διάμετρος του κύκλου, επομένως $\overset{\frown}{B\Delta} + \overset{\frown}{\Gamma\Delta} = 180^\circ$ ή $2x + x = 180^\circ$ ή $3x = 180^\circ$ ή $x = 60^\circ$.

γ) Η γωνία ΒΟΔ είναι επίκεντρη η οποία βαίνει στο τόξο ΒΔ.

Άρα το μέτρο της γωνίας ΒΟΔ είναι ίσο με το μέτρο του τόξου ΒΔ, δηλαδή $2x = 120^\circ$.

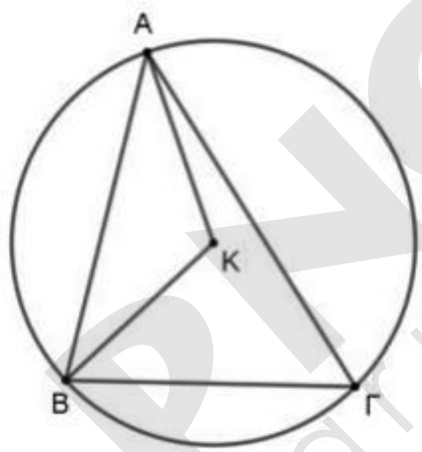
20. Θέμα 13756

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Κ, ρ). Να αποδείξετε ότι:

α) $A\hat{K}B = 2\,A\hat{\Gamma}B$. (Μονάδες 7)

β) το τρίγωνο ΑΚΒ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 5)

γ) $K\hat{A}B + A\hat{\Gamma}B = 90°$. (Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ

α) Η γωνία ΑΚΒ είναι επίκεντρη και βαίνει στο τόξο ΑΒ.

Η γωνία ΑΓΒ είναι εγγεγραμμένη και βαίνει στο τόξο ΑΒ.

Άρα η επίκεντρη γωνία ΑΚΒ είναι διπλάσια της εγγεγραμμένης γωνίας ΑΓΒ, δηλαδή $A\hat{K}B = 2\,A\hat{\Gamma}B$.

β) Είναι ΚΑ = ΚΒ διότι είναι ακτίνες του κύκλου (Κ, ρ), άρα το τρίγωνο ΑΚΒ είναι ισοσκελές.

γ) Στο τρίγωνο ΚΑΒ για το άθροισμα των γωνιών του έχουμε :

$K\hat{A}B + A\hat{B}K + A\hat{K}B = 180°$ (1).

Από το ερώτημα (α) έχουμε $A\hat{K}B = 2\,A\hat{\Gamma}B$ (2).

Από το ερώτημα (β), έχουμε $K\hat{A}B = A\hat{B}K$ (3), γωνίες στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΚΒ.

Λόγω των σχέσεων (2), (3) η (1) γράφεται $2K\hat{A}B + 2A\hat{\Gamma}B = 180^\circ$ ή $K\hat{A}B + A\hat{\Gamma}B = 90^\circ$.

Θέμα 4 - Κωδικοί:

1717, 1739, 1768, 1848, 1883, 1892, 12419

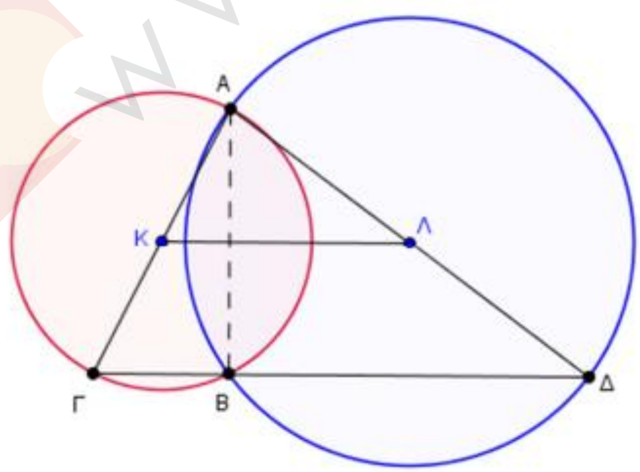
21. Θέμα 1717

Δύο κύκλοι (Κ,ρ), (Λ,R) τέμνονται σε δύο σημεία Α, Β. Αν Γ και Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία του Α στους δύο κύκλους, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $A\hat{B}\Gamma = 90^\circ$ (Μονάδες 5)

β) τα σημεία Γ, Β, Δ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 10)

γ) το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία Κ,Λ,Γ,Δ είναι τραπέζιο. (Μονάδες 10)



ΛΥΣΗ

α) Η γωνία $A\widehat{B}\Gamma$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο (Κ, ρ) που βαίνει σε ημικύκλιο άρα $A\widehat{B}\Gamma = 90^\circ$.

β) Η γωνία $A\widehat{B}\Delta$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο (Λ, R) που βαίνει σε ημικύκλιο, άρα $A\widehat{B}\Delta = 90^\circ$. Τότε $\Gamma\widehat{B}\Delta = \Gamma\widehat{B}A + A\widehat{B}\Delta = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.

Άρα τα σημεία Γ, Β, Δ είναι συνευθειακά.

γ) Τα Κ, Λ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΓΔ, άρα ΚΛ // ΓΔ. Επίσης οι πλευρές ΓΚ και ΔΛ του τετραπλεύρου ΚΛΓΔ τέμνονται στο Α. Άρα το τετράπλευρο ΚΛΓΔ έχει δύο μόνο απέναντι πλευρές παράλληλες, οπότε είναι τραπέζιο.

22. Θέμα 1739

Σε κύκλο κέντρου Ο θεωρούμε τα ίσα τόξα ΑΒ και ΑΓ, το καθένα ίσο με 120°. Έστω Δ και Ε τα μέσα των τόξων ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

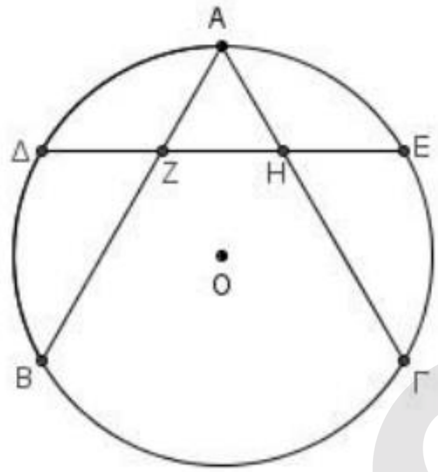
α) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 8)

β) Τα τρίγωνα ΑΖΔ και ΑΗΕ είναι ίσα και να υπολογίσετε τις γωνίες τους.

(Μονάδες 10)

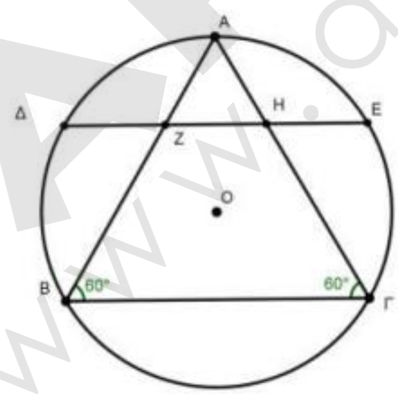
γ) Η χορδή ΔΕ τριχοτομείται από τις χορδές ΑΒ και ΑΓ.

(Μονάδες 7)



ΛΥΣΗ

α) Είναι $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A\Gamma} = 120°$, οπότε οι γωνίες Β και Γ του τριγώνου ΑΒΓ, που είναι εγγεγραμμένες σε αυτά τα τόξα, θα είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 60°$. Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ έχει δύο γωνίες 60°, θα είναι και η τρίτη 60°. Οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.



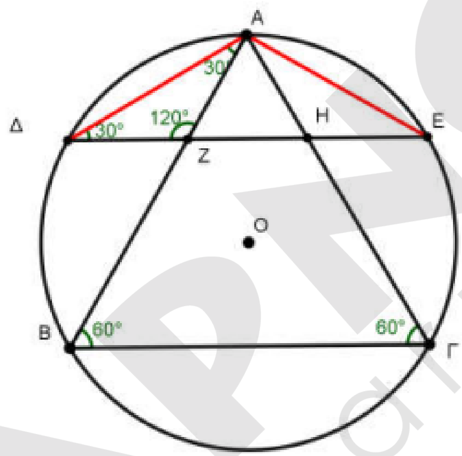
β) Επειδή τα Δ, Ε είναι μέσα των τόξων $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{A\Gamma}$ αντίστοιχα, ισχύει ότι: $\overset{\frown}{A\Delta} = \overset{\frown}{\Delta B} = \overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{EB} = 60°$. Τότε: $\Delta\hat{A}Z$ = $A\hat{\Delta}Z$ = $H\hat{A}E$ = $H\hat{E}A$ = 30° διότι είναι εγγεγραμμένες και βαίνουν σε τόξα των 60°. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΖΔ, έχουμε:

$A\hat{Z}\Delta + Z\hat{\Delta}A + \Delta\hat{A}Z = 180^o \Leftrightarrow A\hat{Z}\Delta + 30^o + 30^o = 180^o \Leftrightarrow A\hat{Z}\Delta = 120^o$

Τα τρίγωνα ΑΖΔ και ΑΗΕ έχουν:

- ΑΔ = ΑΕ, διότι τα αντίστοιχα τόξα τους είναι ίσα
- $\Delta\hat{A}Z = E\hat{A}H = 30^o$
- $A\hat{\Delta}Z = A\hat{E}H = 30^o$

Σύμφωνα με το κριτήριο Γ – Π – Γ τα τρίγωνα είναι ίσα.



γ) Το τρίγωνο ΑΖΗ είναι ισόπλευρο αφού $A\hat{Z}H = A\hat{H}Z = 60^o$ (εφόσον είναι παραπληρωματικές των $A\hat{Z}\Delta = A\hat{H}E = 120^o$) και έχει ΑΖ = ΖΗ = ΑΗ. Επίσης ΑΖ = ΖΔ και ΑΗ = ΗΕ αφού τα τρίγωνα ΑΖΔ και ΑΗΕ είναι ισοσκελή. Τελικά ΔΖ = ΖΗ = ΗΕ, δηλαδή η χορδή ΔΕ τριχοτομείται από τις χορδές ΑΒ και ΑΓ.

23. Θέμα 1768

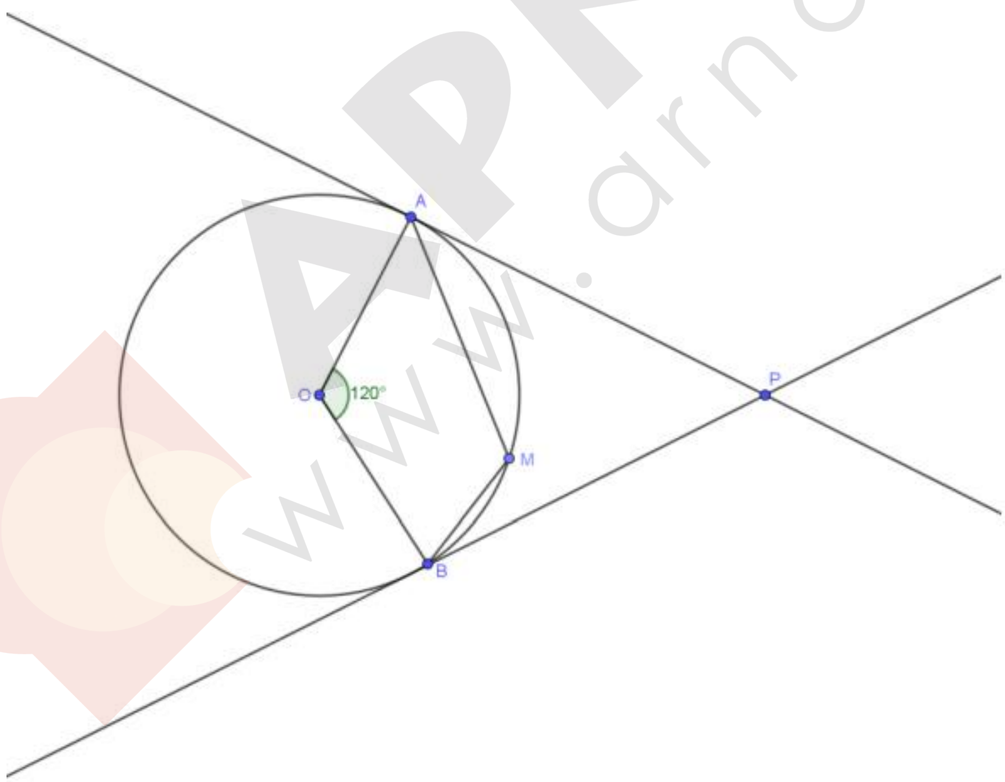
Δίνεται κύκλος (O, R) και μια επίκεντρη γωνία του $A\hat{O}B$ ίση με 120^0. Οι εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία Α και Β τέμνονται στο σημείο Ρ. Θεωρούμε σημείο Μ του τόξου ΑΒ και φέρουμε τις χορδές ΑΜ και ΒΜ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΡΒ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 9)

β) $M\hat{A}B + M\hat{B}A = 60^{\circ}$. (Μονάδες 11)

γ) Για ποια θέση του Μ είναι ΑΜ⊥ΒΡ; (Μονάδες 5)



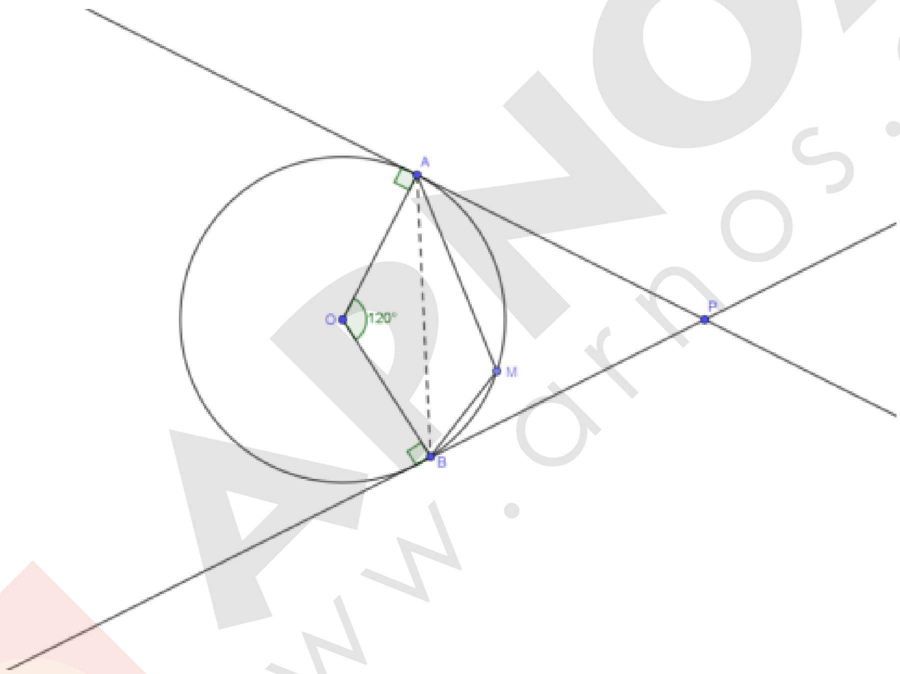
ΛΥΣΗ

α) Είναι ΡΑ = ΡΒ ως εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από σημείο εκτός κύκλου προς αυτόν, άρα το τρίγωνο ΡΑΒ είναι ισοσκελές.

Από το άθροισμα γωνιών του τετραπλεύρου ΑΟΒΡ έχουμε:

$\hat{P} + 120^o + 90^o + 90^o = 360^o \Leftrightarrow \hat{P} = 60^o$

Επειδή το τρίγωνο ΡΑΒ είναι ισοσκελές με μία γωνία του ίση με 60^o, είναι ισόπλευρο.



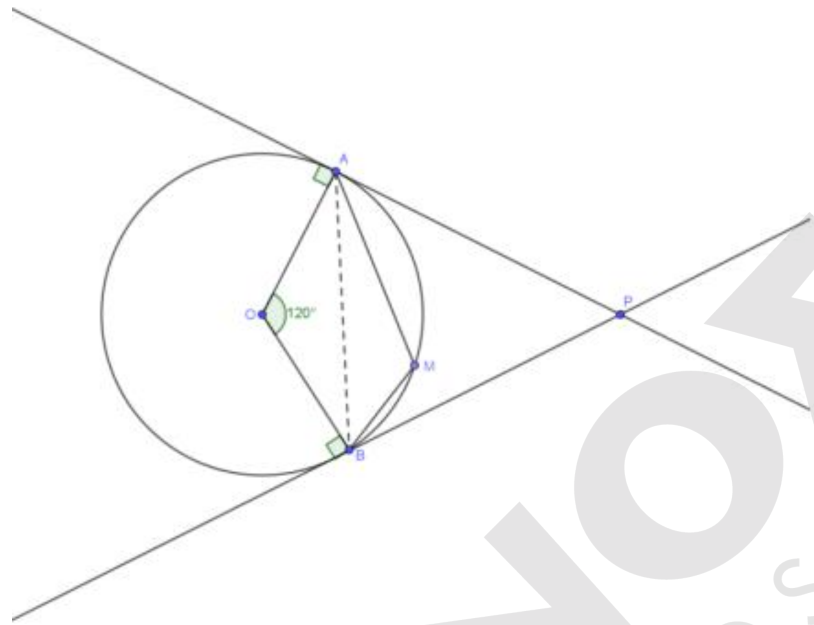
β) Είναι $A\hat{O}B = 120^o$ ή $\overset{\frown}{AMB} = 120^o$. Άρα το μη κυρτογώνιο τόξο $\overset{\frown}{AB}$ είναι ίσο με 240^o.

Η γωνία $A\hat{M}B$ είναι εγγεγραμμένη στο μη κυρτογώνιο τόξο $\overset{\frown}{AB}$. Τότε:

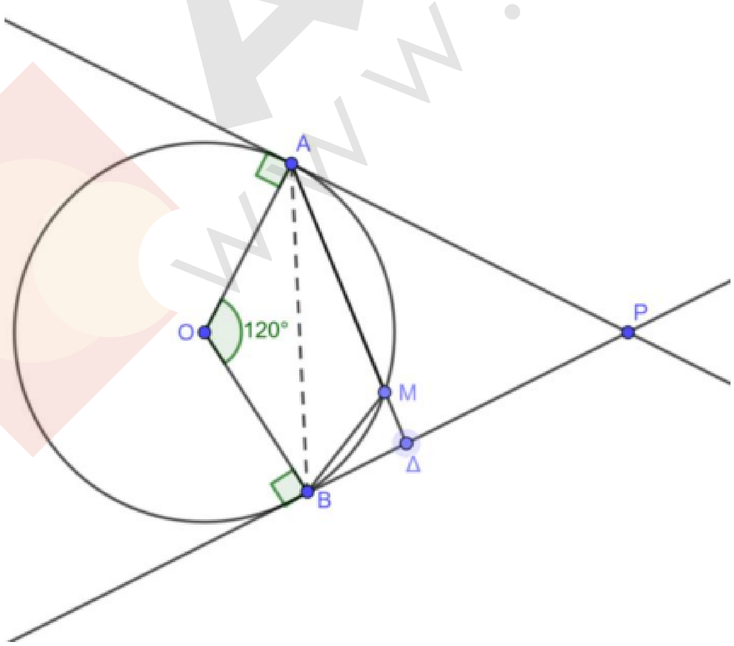
$A\hat{M}B = \frac{240^o}{2} = 120^o$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΜΑΒ βρίσκουμε:

$M\hat{A}B + M\hat{B}A + A\hat{M}B = 180^o \Leftrightarrow M\hat{A}B + M\hat{B}A + 120^o = 180^o \Leftrightarrow M\hat{A}B + M\hat{B}A = 60^o$



γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ είναι $\hat{B} = 60^o$ οπότε $M\hat{A}B = 30^o$. Από το ερώτημα β προκύπτει ότι $M\hat{B}A = 30^o$. Άρα ΜΑ = ΜΒ. Τελικά $AM \perp BP$ στην περίπτωση που το Μ είναι μέσο του τόξου $\overset{\frown}{AB}$.



24. Θέμα 1848

Δίνεται κύκλος (Ο, ρ) και ΑΓ μια διάμετρός του. Θεωρούμε τις χορδές ΑΔ=ΒΓ. Έστω Κ και Λ τα μέσα των χορδών ΔΓ και ΒΓ αντίστοιχα.

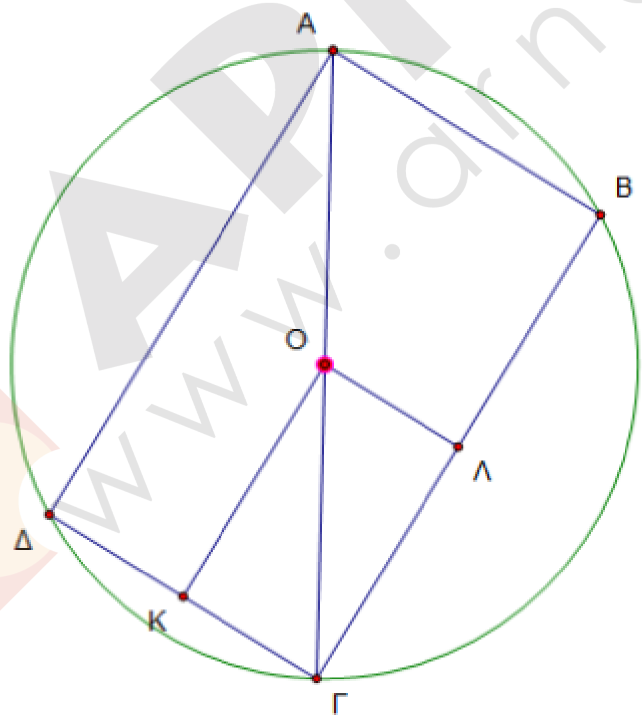
Να αποδείξετε ότι:

α) Οι χορδές ΑΒ και ΔΓ είναι παράλληλες. (Μονάδες 6)

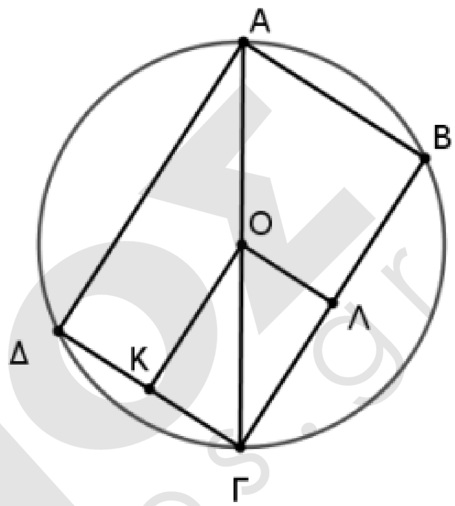
β) Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)

γ) Η ΒΔ είναι διάμετρος του κύκλου. (Μονάδες 7)

δ) Το τετράπλευρο ΟΛΓΚ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)



ΛΥΣΗ



α) Είναι $A\hat{B}\Gamma = A\hat{\Delta}\Gamma = 90^o$ ως εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ημικύκλιο.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΓΔ και ΑΒΓ είναι ίσα γιατί έχουν την πλευρά ΑΓ κοινή και ΑΔ=ΒΓ.

Άρα $A\hat{\Gamma}\Delta = B\hat{A}\Gamma$ ως γωνίες που βρίσκονται απέναντι από ίσες πλευρές ΑΔ και ΒΓ.

Δηλαδή οι ΑΒ και ΔΓ που τέμνονται από την ΑΓ σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες $A\hat{\Gamma}\Delta$ και $B\hat{A}\Gamma$ ίσες, άρα ΑΒ // ΔΓ (1).

β) Είναι $\Gamma\hat{A}\Delta = A\hat{\Gamma}B$ ως περιεχόμενες σε ίσες μία προς μία πλευρές των ίσων τριγώνων ΑΓΔ και ΑΒΓ. Δηλαδή οι ΑΔ και ΒΓ που τέμνονται από την ΑΓ σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες $\Gamma\hat{A}\Delta$ και $A\hat{\Gamma}B$ ίσες, άρα ΑΔ// ΒΓ (2).

Από τις (1) και (2) το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο και αφού $A\hat{B}\Gamma = 90^o$, είναι ορθογώνιο.

γ) Επειδή η γωνία $B\hat{A}\Delta$ είναι εγγεγραμμένη και ορθή, βαίνει σε ημικύκλιο. Άρα η ΒΔ είναι διάμετρος του κύκλου.

δ) Επειδή τα ΟΚ και ΟΛ είναι αποστήματα των χορδών ΓΔ και ΒΓ αντίστοιχα, ισχύει ότι $OK \perp \Gamma\Delta$ και $O\Lambda \perp B\Gamma$ οπότε $O\hat{K}\Gamma = O\hat{\Lambda}\Gamma = 90^o$.

Επίσης από το ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχουμε ότι $\Delta\hat{\Gamma}B = 90^o \Leftrightarrow K\hat{\Gamma}\Lambda = 90^o$.

Το τετράπλευρο ΟΛΚΓ έχει τρεις γωνίες ορθές, οπότε είναι ορθογώνιο.

25. Θέμα 1883

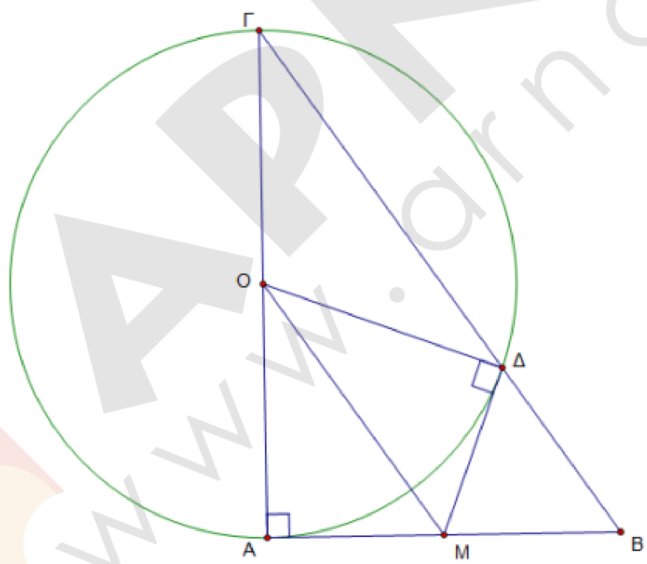
Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΓΑΒ ($\hat{A} = 90^\circ$). Με διάμετρο την πλευρά του ΑΓ φέρουμε κύκλο που τέμνει την υποτείνουσα ΒΓ στο Δ. Από το Δ φέρουμε εφαπτόμενο τμήμα το οποίο τέμνει την ΑΒ στο Μ.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\Gamma\hat{A}\Delta = \hat{B}$ (Μονάδες 9)

β) $M\hat{\Delta}B = 90^\circ - \hat{\Gamma}$ και το τρίγωνο ΔΜΒ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

γ) Το Μ είναι το μέσο του ΑΒ. (Μονάδες 7)

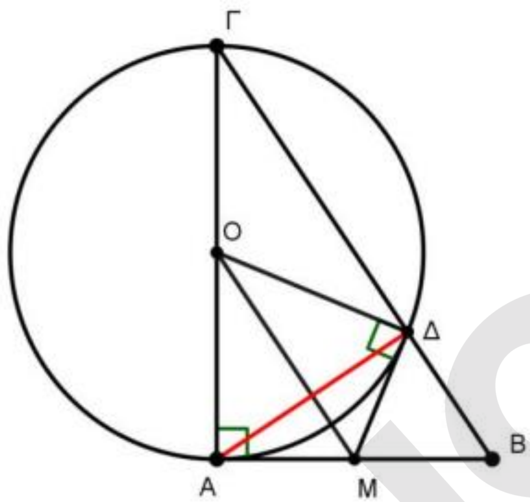


ΛΥΣΗ

α) Η γωνία ΓΔΑ είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο και είναι ορθή. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ βρίσκουμε: $\Gamma\hat{A}\Delta + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \Gamma\hat{A}\Delta = 90^\circ - \hat{\Gamma}$ (1).

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 90^\circ - \hat{\Gamma}$ (2).

Από τις (1), (2) προκύπτει: $\Gamma\hat{A}\Delta = \hat{B}$



β) Το τρίγωνο ΟΓΔ είναι ισοσκελές διότι ΟΓ = ΟΔ = ακτίνα και ισχύει ότι: $\hat{\Gamma} = O\hat{\Delta}\Gamma$. Τότε $M\hat{\Delta}B = 180^o - M\hat{\Delta}O - O\hat{\Delta}\Gamma = 180^o - 90^o - \hat{\Gamma}$ δηλαδή τελικά $M\hat{\Delta}B = 90^o - \hat{\Gamma}$. Και λόγω της (2) θα είναι $M\hat{\Delta}B = \hat{B}$. Άρα το τρίγωνο ΔΜΒ είναι ισοσκελές με ΜΔ = ΜΒ (3).

γ) Επειδή $MA \perp OA$ και $M\Delta \perp O\Delta$, τα ΜΑ, ΜΔ είναι εφαπτόμενα τμήματα, οπότε ΜΑ = ΜΔ (4).

Από τις (3), (4) βρίσκουμε ότι ΜΑ = ΜΒ, δηλαδή το Μ είναι μέσο του ΑΒ.

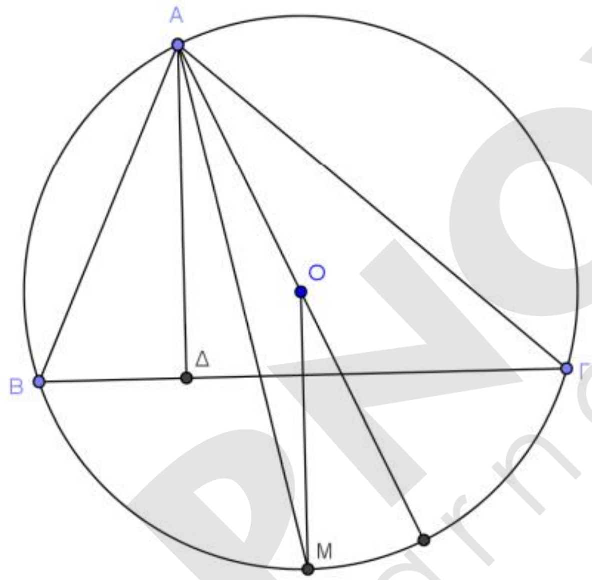
26. Θέμα 1892

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ, εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο Ο. Θεωρούμε το μέσο Μ του τόξου ΒΓ, το οποίο αντιστοιχεί σε κυρτή επίκεντρη γωνία και το ύψος ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ.

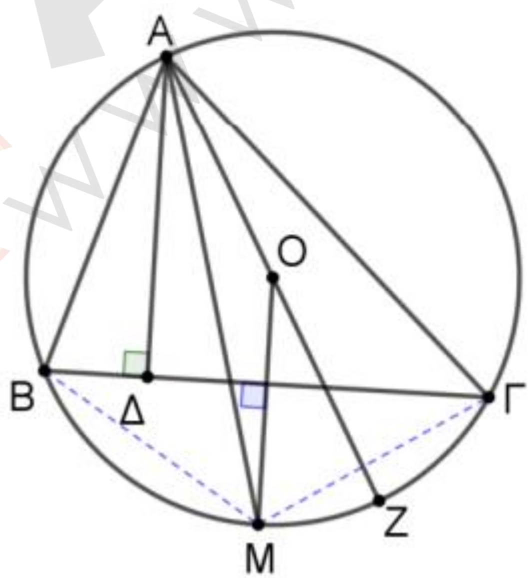
Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{A}O$. (Μονάδες 8) β) $O\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{A}B$ (Μονάδες 9)

γ) $\Delta\hat{A}O = \hat{B} - \hat{\Gamma}$ (Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ



α) Επειδή το Μ είναι το μέσο του τόξου ΒΓ , τα τόξα ΒΜ και ΜΓ είναι ίσα, άρα το ίδιο ισχύει και για τις χορδές ΒΜ και ΜΓ.

Δηλαδή το Μ ισαπέχει από τα Β και Γ, άρα είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ΒΓ. Το ίδιο ισχύει και για το Ο, εφόσον ΟΒ = ΟΓ ως ακτίνες του κύκλου. Οπότε η ΟΜ είναι μεσοκάθετος του ΒΓ, άρα ΟΜ ⊥ ΒΓ. Επίσης ΑΔ ⊥ ΒΓ, άρα οι ΑΔ και ΟΜ είναι παράλληλες ως κάθετες στην ΒΓ.

Είναι $\Delta\hat{A}M = A\hat{M}O$ (1) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΟΜ, ΑΔ, οι οποίες τέμνονται από την ΑΜ.

Επίσης οι ΟΑ και ΟΜ είναι ακτίνες του ίδιου κύκλου, άρα ΟΑ = ΟΜ. Άρα το τρίγωνο ΑΟΜ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΜ. Επομένως $M\hat{A}O = A\hat{M}O$ (2).

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $M\hat{A}O = \Delta\hat{A}M$, άρα η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{A}O$.

β) Επειδή τα τόξα ΒΜ και ΜΓ είναι ίσα οι αντίστοιχες εγγεγραμμένες γωνίες ΒΑΜ και ΜΑΓ είναι ίσες. Από το ερώτημα (α) ισχύει $\Delta\hat{A}M = M\hat{A}O$.

Οπότε $O\hat{A}\Gamma = M\hat{A}\Gamma - M\hat{A}O = B\hat{A}M - \Delta\hat{A}M = \Delta\hat{A}B$.

γ) Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ορθογώνιο με $A\hat{\Delta}B$ ορθή. Άρα, από το άθροισμα γωνιών τριγώνου ΑΒΔ οι $B\hat{A}\Delta$ και $\hat{B}$ είναι συμπληρωματικές. Επομένως, $\Delta\hat{A}B + \hat{B} = 90^o$ (3).

Επίσης, το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ορθογώνιο, άρα οι $\Gamma\hat{A}\Delta + \hat{\Gamma} = 90^o$.

Όμως $\Gamma\hat{A}\Delta = O\hat{A}\Gamma + \Delta\hat{A}O$. Άρα $O\hat{A}\Gamma + \Delta\hat{A}O + \hat{\Gamma} = 90^o$ (4).

Από τις (3) και (4) προκύπτει ότι $O\hat{A}\Gamma + \Delta\hat{A}O + \hat{\Gamma} = \Delta\hat{A}B + \hat{B}$.

Όμως, όπως έχουμε αποδείξει στο β), $O\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{A}B$, άρα $\Delta\hat{A}O + \hat{\Gamma} = \hat{B}$ ή $\Delta\hat{A}O = \hat{B} - \hat{\Gamma}$.

27. Θέμα 12419

Δύο κύκλοι (Κ, R) και (Λ, r), με R>r, τέμνονται στα σημεία Α και Β. Από το σημείο Α φέρουμε ευθεία παράλληλη προς τη διάκεντρο των κύκλων, η οποία τέμνει τους κύκλους (Κ, R) και (Λ, r) στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) ΓΔ=2ΚΛ

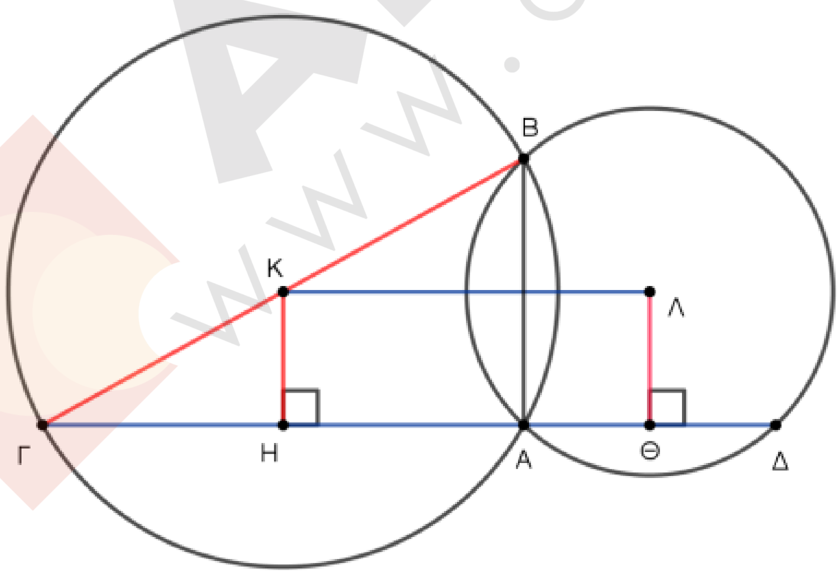
(Μονάδες 15)

β) Τα σημεία Β και Γ είναι αντιδιαμετρικά.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Έστω οι κύκλοι (Κ, R) και (Λ, r), με R>r, οι οποίοι τέμνονται στα σημεία Α, Β και η τέμνουσα ΓΑΔ παράλληλη στη διάκεντρο ΚΛ.



Φέρουμε τα αποστήματα ΚΗ και ΛΘ των χορδών ΑΓ και ΑΔ αντίστοιχα. Το τετράπλευρο ΚΛΘΗ είναι παραλληλόγραμμο, διότι οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες (ΚΛ//ΗΘ από υπόθεση και ΚΗ//ΛΘ αφού ΚΗ, ΛΘ είναι κάθετα στη ΓΔ). Οπότε ΚΛ=ΗΘ.

Επίσης, τα σημεία Η, Θ είναι μέσα των χορδών ΑΓ και ΑΔ αντίστοιχα. Οπότε έχουμε:

ΓΔ=ΓΑ+ΑΔ=2ΗΑ+2ΑΘ=2(ΗΑ+ΑΘ)=2ΗΘ=2ΚΛ

β) Η διάκεντρος ΚΛ των δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους ΑΒ, οπότε ΑΒ⊥ΚΛ. Επίσης, ΚΛ//ΓΔ. Άρα, ΑΒ⊥ΓΔ. Επομένως, η γωνία $B\widehat{A}\Gamma$ είναι ορθή και εγγεγραμμένη στον κύκλο (Κ, R), οπότε η ΒΓ είναι διάμετρος. Συνεπώς, τα σημεία Β και Γ είναι αντιδιαμετρικά.