Κεφ. 5.8. - Τράπεζα Θεμάτων 2022 - Γεωμετρία Α' Λυκείου

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ & ΛΥΣΕΙΣ

Η Τράπεζα Θεμάτων για τη Γεωμετρία Α' Λυκείου είναι μία μεγάλη «θάλασσα». Εμείς όμως έχουμε φροντίσει για εσένα, συγκεντρώνοντας εκείνα τα θέματα που αποτελούν τη «βάση» της γνώσης και για τα υπόλοιπα. Μελετώντας και κατανοώντας το μοτίβο σκέψης για τα συγκεκριμένα, μπορείς να λύσεις με επιτυχία και τα υπόλοιπα θέματα. Στην ιστοσελίδα μας www.arnos.gr για το Course της Γεωμετρίας, μελετάς και προετοιμάζεσαι με την αναλυτική διδασκαλία σε ασκήσεις και θέματα, στο ύφος της Τράπεζας.

Θέμα 4 - Κωδικοί:

1719, 1748, 1754, 1764, 1777, 1780, 1865, 1887

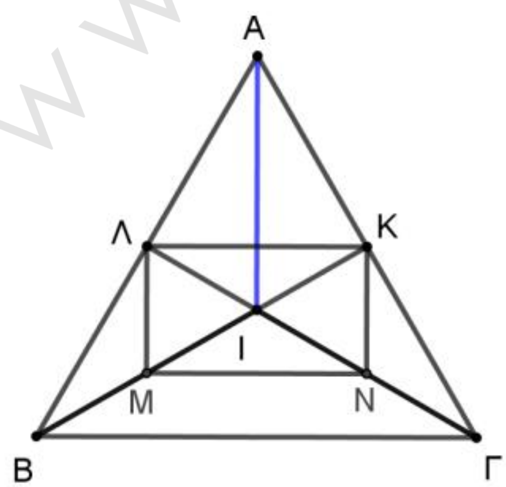
1. Θέμα 1719

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΒΚ και ΓΛ, τα οποία τέμνονται στο Ι.

Αν Μ και Ν είναι τα μέσα των ΙΒ και ΙΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε:

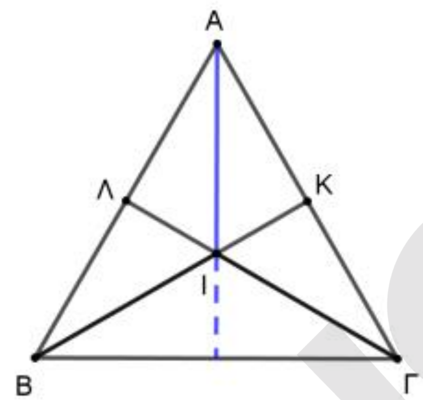
α) Το ΑΙ προεκτεινόμενο διέρχεται από το μέσο της πλευράς ΒΓ. (Μονάδες 10)

β) Το τετράπλευρο ΜΛΚΝ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (Μονάδες 15)



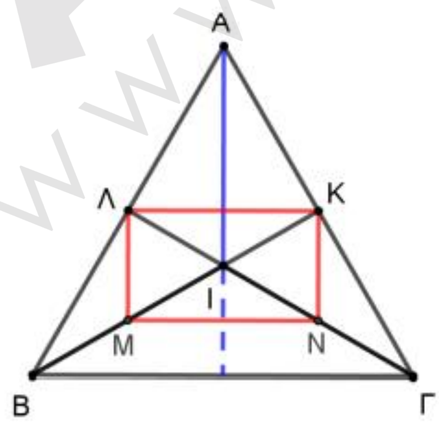
ΛΥΣΗ

α)



Επειδή στο σημείο Ι τέμνονται τα ύψη ΒΚ και ΛΓ του τριγώνου ΑΒΓ, το Ι είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου οπότε το ΑΙ θα βρίσκεται στο φορέα του 3^{ου} ύψους και επειδή το τρίγωνο είναι ισόπλευρο, κάθε ύψος είναι και διάμεσος, άρα η προέκταση του ΑΙ θα διχοτομεί την πλευρά ΒΓ.

β)



Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα Λ, Κ είναι τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ οπότε ΛΚ // = $\frac{ΒΓ}{2}$ (1). Στο τρίγωνο ΙΒΓ τα Μ, Ν είναι τα μέσα των ΙΒ και ΙΓ οπότε ΜΝ // = $\frac{ΒΓ}{2}$ (2). Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι ΛΚ=//ΜΝ, άρα το ΜΛΚΝ είναι παραλληλόγραμμο.

Στο τρίγωνο ΑΒΙ το ευθύγραμμο τμήμα ΛΜ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΒΙ οπότε ΛΜ//ΑΙ.

Το ΑΙ βρίσκεται στο φορέα του 3^{ου} ύψους (α) ερώτημα) άρα ΑΙ⊥ΒΓ και επειδή ΒΓ//ΛΚ από τη σχέση (1), θα είναι ΑΙ⊥ΛΚ.

Άρα το τμήμα ΛΜ θα είναι κάθετο στο τμήμα ΛΚ. Επομένως $Μ\hat{Λ}Κ=90°$ οπότε το παραλληλόγραμμο ΜΛΚΝ είναι ορθογώνιο γιατί έχει 1 γωνία ορθή.

2. Θέμα 1748

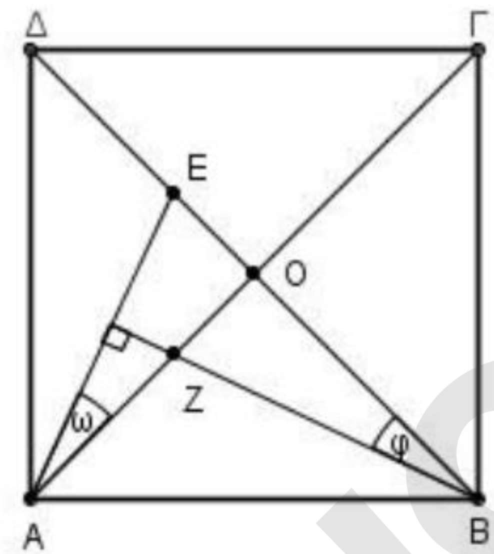
Στο τετράγωνο ΑΒΓΔ ονομάζουμε Ο το κέντρο του και θεωρούμε τυχαίο σημείο Ε του τμήματος ΟΔ. Φέρνουμε την κάθετη από το Β στην ΑΕ, που τέμνει το τμήμα ΑΟ στο Ζ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Οι γωνίες ω και φ του παρακάτω σχήματος είναι ίσες. (Μονάδες 6)

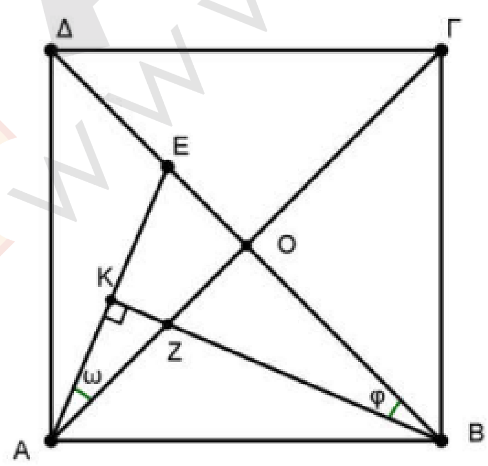
β) ΒΖ=ΑΕ και ΓΖ=ΒΕ (Μονάδες 12)

γ) Το τμήμα ΕΖ είναι κάθετο στο ΑΒ. (Μονάδες 7)



ΛΥΣΗ

α) Οι διαγώνιοι του τετραγώνου είναι κάθετες, οπότε το τρίγωνο ΟΑΕ είναι ορθογώνιο. Στο τρίγωνο αυτό, είναι $\widehat{\omega}$ = 180° – 90° – $O\hat{E}A$ = 90° - $O\hat{E}A$. Ομοίως, στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΚΕ είναι $\widehat{\varphi}$ = 90° - $O\hat{E}A$. Οπότε είναι $\widehat{\omega} = \widehat{\varphi}$.



β) Τα τρίγωνα ΑΟΕ και ΒΟΖ έχουν:

- ΟΑ = ΟΒ, ως μισά των ίσων διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ του τετραγώνου
- $A\hat{O}E = B\hat{O}Z = 90°$
- $\hat{\omega} = \hat{\varphi}$, από το ερώτημα α

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα (κριτήριο ΓΠΓ), οπότε έχουν τις υποτείνουσες ίσες, δηλαδή ΒΖ = ΑΕ και τις τρίτες πλευρές ίσες, δηλαδή ΟΖ = ΟΕ (1).

Επιπλέον, εφόσον ΟΓ=ΟΒ και ΟΖ=ΟΕ, θα είναι και ΟΓ+ΟΖ=ΟΒ+ΟΕ δηλαδή τελικά ΓΖ=ΒΕ.

γ) Στο τρίγωνο ΕΑΒ τα ΒΖ και ΑΟ είναι τα ύψη του, οπότε το Ζ είναι ορθόκεντρο του τριγώνου. Άρα το ΕΖ είναι η ευθεία του τρίτου ύψους του τριγώνου, δηλαδή ΕΖ ⊥ ΑΒ.

3. Θέμα 1754

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος του ΑΔ . Στο ΑΔ θεωρούμε σημείο Η τέτοιο ώστε ΗΑ=ΗΒ. Έστω ότι Ε είναι το σημείο τομής της ΒΗ με την ΑΓ. Φέρνουμε την ΑΖ κάθετη στην ΒΕ, η οποία τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Θ.

α) Να αποδείξετε ότι:

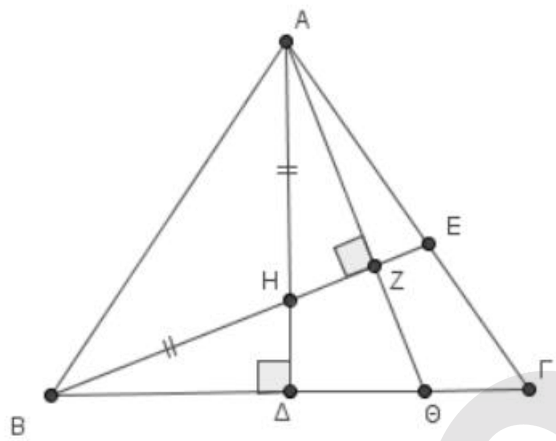
i. Τα τρίγωνα ΗΔΒ και ΗΖΑ είναι ίσα. (Μονάδες 6)

ii. ΔΘ=ΘΖ. (Μονάδες 6)

iii. Η ευθεία ΘΗ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΒ. (Μονάδες 6)

β) Ποιο από τα σημεία του σχήματος είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΗΒ ;

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

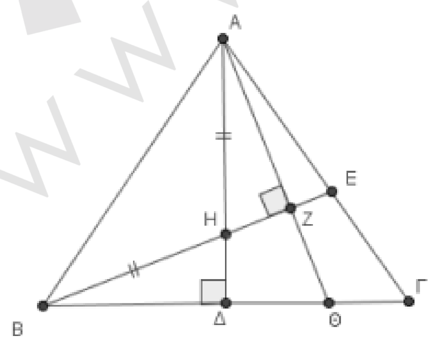


ΛΥΣΗ

α) i. Τα τρίγωνα ΗΒΔ και ΗΑΖ είναι ορθογώνια και έχουν:

- ΗΑ = ΗΒ, από υπόθεση
- $B\widehat{H}\Delta = A\widehat{H}Z$, ως κατακορυφήν

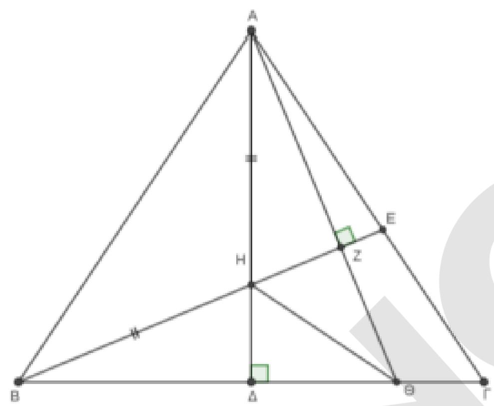
Άρα τα τρίγωνα ΗΒΔ και ΗΑΖ έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία οπότε είναι ίσα. Τότε και οι αντίστοιχες πλευρές τους ΔΗ και ΗΖ είναι ίσες, δηλαδή ΔΗ = ΗΖ (1).



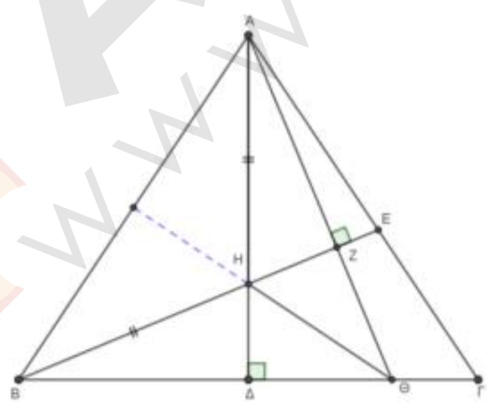
ii. Τα τρίγωνα ΖΗΘ και ΔΗΘ είναι ορθογώνια και έχουν:

- ΘΗ, κοινή πλευρά
- ΔΗ = ΗΖ, λόγω της (1)

Άρα τα τρίγωνα ΖΗΘ και ΔΗΘ έχουν την υποτείνουσα και μία κάθετη πλευρά αντίστοιχα ίσες μία προς μία οπότε είναι ίσα. Τότε έχουν και τις αντίστοιχες πλευρές τους ΔΘ και ΘΖ ίσες, δηλαδή ΔΘ = ΘΖ.



iii. Ισχύει ότι ΗΔ = ΗΖ από το ερώτημα (α.i) και ΘΔ = ΘΖ από το ερώτημα (α.ii). Άρα τα Η και Θ ισαπέχουν από τα Δ και Ζ που είναι άκρα του ΖΔ οπότε η ευθεία ΘΗ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΒ.



β) Τα τμήματα ΑΖ και ΒΔ είναι ύψη του τριγώνου ΑΗΒ που τέμνονται στο Θ. Άρα το Θ είναι το ορθόκεντρο του ΑΗΒ.

4. Θέμα 1764

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με κέντρο Ο και ΑΓ = 2ΒΓ. Στην προέκταση της πλευράς ΔΑ, προς το Α, παίρνουμε σημείο Ε ώστε ΔΑ = ΑΕ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΕΒΓ είναι παραλληλόγραμμο.

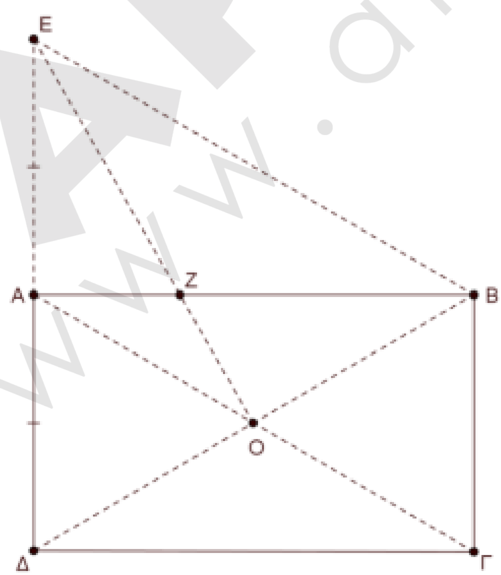
(Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΕΒΔ είναι ισόπλευρο.

(Μονάδες 9)

γ) Αν η ΕΟ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ζ, να αποδείξετε ότι ΔΖ⊥ΕΒ.

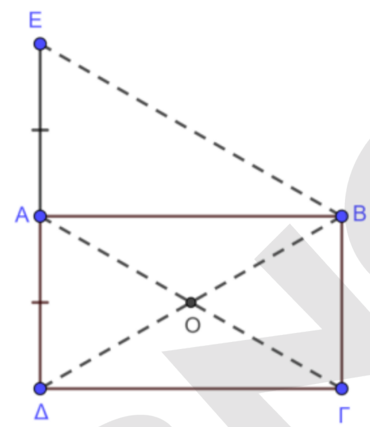
(Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ

α) Επειδή ΑΕ = ΑΔ = ΒΓ και ΑΔ // ΒΓ, προκύπτει ότι ΑΕ = // ΒΓ.

Άρα το τετράπλευρο ΑΕΒΓ είναι παραλληλόγραμμο.

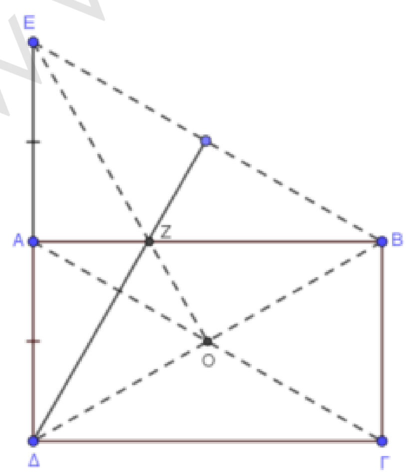


β) Είναι: ΑΓ = 2ΒΓ $\Leftrightarrow$ ΒΔ = 2ΑΔ $\Leftrightarrow$ ΒΔ = ΔΕ

Άρα το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές και αφού $E\widehat{\Delta}B = 60^o$, είναι ισόπλευρο.

γ) Τα ΕΟ και ΒΑ είναι ύψη στο ισόπλευρο τρίγωνο ΕΔΒ, οπότε το σημείο τομής τους Ζ είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου και η ΔΖ είναι το τρίτο ύψος του.

Δηλαδή, ΔΖ $\perp$ ΕΒ.



5. Θέμα 1777

Δίνονται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, ΒΕ ,ΓΖ, τα ύψη από τις κορυφές Β, Γ αντίστοιχα και Η το ορθόκεντρο του τριγώνου. Επίσης δίνονται ταΜ, Ν, Κ, Λ μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΒ, ΑΓ, ΓΗ, ΒΗ αντίστοιχα.

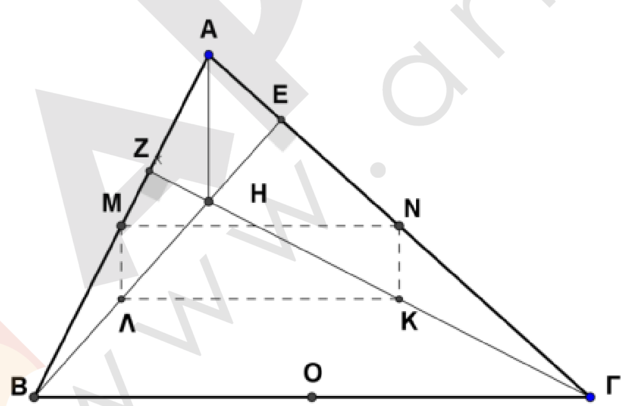
α) Να αποδείξετε ότι:

i. ΜΝ=ΛΚ (Μονάδες 6)

ii. $NK=M\Lambda=\dfrac{AH}{2}$ (Μονάδες 6)

iii. Το τετράπλευρο ΜΝΚΛ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 6)

β) Αν το Ο είναι το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι το $M\hat{O}K=90^0$. (Μονάδες 7)



ΛΥΣΗ

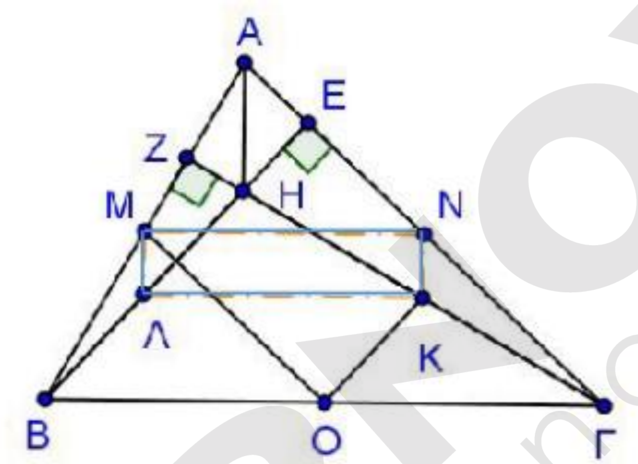
α) i. Το ΜΝ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ στο τρίγωνο ΑΒΓ, άρα ΜΝ // ΒΓ

(1) και $MN=\dfrac{B\Gamma}{2}$ (2)

Το ΚΛ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΗΒ και ΗΓ στο τρίγωνο ΗΒΓ, άρα ΚΛ // ΒΓ (3) και

ΚΛ = $\frac{\mathrm{ΒΓ}}{2}$ (4)

Από (2), (4) προκύπτει: ΜΝ = ΚΛ.



ii. Το ΝΚ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΓ και ΗΓ στο τρίγωνο ΑΗΓ, άρα ΝΚ // ΑΗ (5)

και ΝΚ = $\frac{\mathrm{ΑΗ}}{2}$ (6).

Το ΜΛ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΒΗ στο τρίγωνο ΑΗΒ, άρα ΜΛ // ΑΗ και

ΜΛ = $\frac{\mathrm{ΑΗ}}{2}$ (7).

Από (6), (7) προκύπτει ότι: ΝΚ = ΜΛ = $\frac{\mathrm{ΑΗ}}{2}$

iii. Από τις (1), (3) έχουμε ΜΝ // ΚΛ. Επίσης ΜΝ = ΚΛ άρα το τετράπλευρο ΜΝΚΛ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

Επειδή το Η είναι ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ, είναι ΑΗ ⊥ ΒΓ (8).

Επειδή ΜΝ // ΒΓ (9) και ΜΛ // ΑΗ (10), από (8), (9) και (10) είναι ΜΝ ⊥ ΜΛ.

Άρα το παραλληλόγραμμο ΜΝΚΛ έχει μία ορθή γωνία και συνεπώς είναι ορθογώνιο.

β) Το ΚΟ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΗΓ και ΒΓ στο τρίγωνο ΗΒΓ, άρα ΚΟ // ΒΗ.

Το ΜΟ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΒΓ στο τρίγωνο ΑΒΓ, άρα ΜΟ // ΑΓ.

Όμως ΒΗ ⊥ ΑΓ άρα και ΚΟ⊥ΜΟ, δηλαδή $M\widehat{O}K = 90^o$.

6. Θέμα 1780

Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε τη διαγώνιο ΒΔ (προς το Δ) κατά τμήμα ΔΕ=ΔΒ. Έστω Μ το μέσο της ΑΔ και Ν το σημείο τομής των ευθειών ΑΕ και ΓΔ.

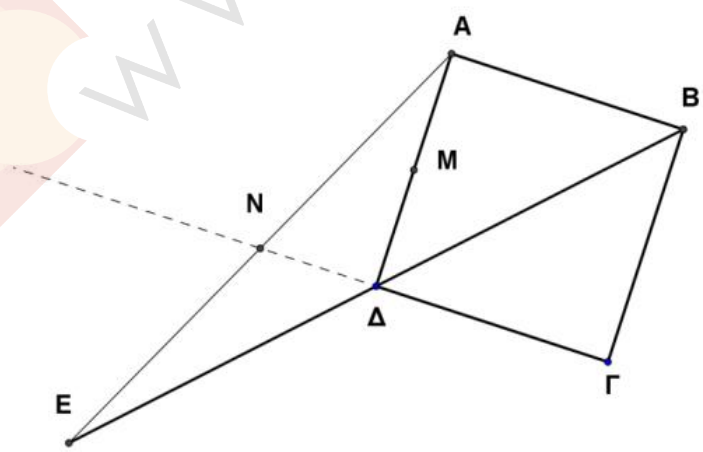
α) Να αποδείξετε ότι ΔΝ=ΔΜ. (Μονάδες 6)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΝΜΔ. (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι:

i. ΜΝ ⊥ ΑΓ (Μονάδες 7)

ii. ΓΜ ⊥ ΑΝ (Μονάδες 7)

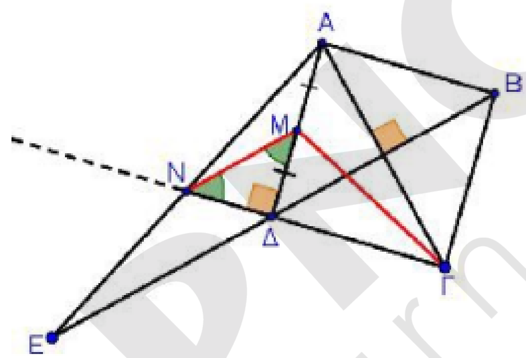


ΛΥΣΗ

α) Στο τρίγωνο ΕΑΒ το Δ είναι μέσο της ΕΒ και η ΔΝ // ΑΒ ως απέναντι πλευρές τετραγώνου. Άρα το Ν είναι μέσο του ΑΕ και ισχύει: ΔΝ = $\frac{AB}{2}$ (1).

Ισχύει ακόμη ότι ΔΜ = $\frac{A\Delta}{2} = \frac{AB}{2}$ (2).

Από (1), (2) βρίσκουμε ΔΝ = ΔΜ.



β) Το τρίγωνο ΝΜΔ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές αφού ΔΝ = ΔΜ, οπότε και $\Delta\widehat{N}M = \Delta\widehat{M}N$. Τότε: $\Delta\widehat{N}M + \Delta\widehat{M}N = 90^o \Leftrightarrow 2\Delta\widehat{M}N = 90^o \Leftrightarrow \Delta\widehat{M}N = 45^o = \Delta\widehat{N}M$.

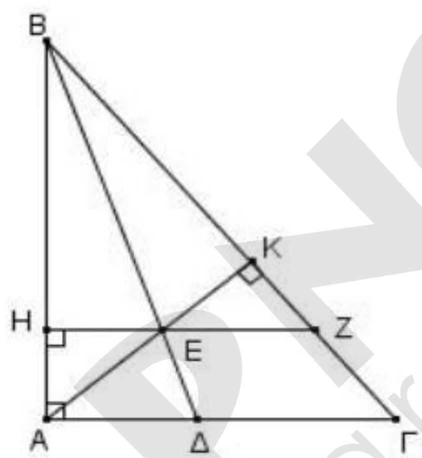
γ) i. Στο τρίγωνο ΑΔΕ το ΜΝ ενώνει τα μέσα των πλευρών, ΑΔ και ΑΕ οπότε ΜΝ // ΔΕ.

Όμως ΔΕ ⊥ ΑΓ αφού οι διαγώνιες ενός τετραγώνου είναι κάθετες, άρα θα είναι και ΜΝ ⊥ ΑΓ.

ii. Στο τρίγωνο ΑΝΓ τα ΝΜ και ΑΔ είναι ύψη του, άρα το σημείο τομής τους Μ είναι ορθόκεντρο του τριγώνου. Οπότε ΓΜ ⊥ ΑΝ.

7. Θέμα 1865

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A}=90^\circ\right)$ με ΒΔ διχοτόμο και ΑΚ ύψος, που τέμνονται στο Ε. Η κάθετη από το Ε στην ΑΒ τέμνει τις ΑΒ και ΒΓ στα Η και Ζ αντίστοιχα.



α) Να αποδείξετε ότι:

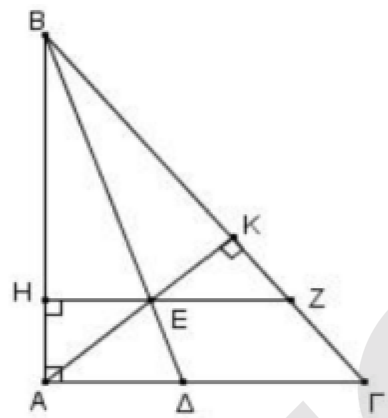
i. Τα τρίγωνα ΕΗΑ και ΕΚΖ είναι ίσα. (Μονάδες 6)

ii. Το τρίγωνο ΒΚΗ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

iii. Η ΒΔ είναι κάθετη στην ΑΖ (Μονάδες 7)

β) Αν επιπλέον το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι και ισοσκελές, να αποδείξετε ότι η ΓΕ είναι διχοτόμος της γωνίας Γ. (Μονάδες 6)

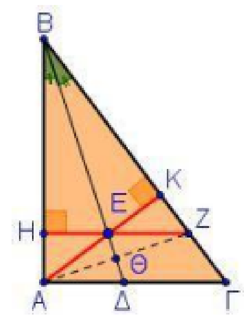
ΛΥΣΗ



α) i) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΕΗΑ και ΕΚΖ έχουν:

- $H\hat{E}A = K\hat{E}Z$, ως κατακορυφήν
- ΗΕ = ΕΚ, διότι το Ε είναι σημείο της διχοτόμου ΑΔ και ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας $\hat{B}$.

Άρα τα τρίγωνα ΕΗΑ και ΕΚΖ είναι ίσα.



ii) Τα τρίγωνα ΒΕΗ και ΒΕΚ . Έχουν:

- $H\hat{B}E = E\hat{B}K$, διότι ΒΔ διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$
- ΒΕ κοινή πλευρά

Άρα τα τρίγωνα ΒΕΗ και ΒΕΚ είναι ίσα, οπότε είναι και ΒΗ = ΒΚ διότι είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες $H\hat{E}B$, $B\hat{E}K$ αντίστοιχα. Επομένως το τρίγωνο ΒΚΗ είναι ισοσκελές

iii) Στο τρίγωνο ΑΒΖ το σημείο Ε είναι το σημείο τομής των υψών ΑΚ, ΖΗ άρα είναι ορθόκεντρο του τριγώνου. Οπότε και το ΑΘ είναι ύψος αφού διέρχεται από το Ε. Άρα η $B\Delta \perp AZ$.

β) Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, το ΑΚ είναι ύψος και διχοτόμος. Στο τρίγωνο ΑΒΓ το Ε είναι σημείο τομής των διχοτόμων ΑΚ και ΒΔ άρα είναι έγκεντρο. Η ΓΕ διέρχεται από το Ε άρα είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{Γ}$.

8. Θέμα 1887

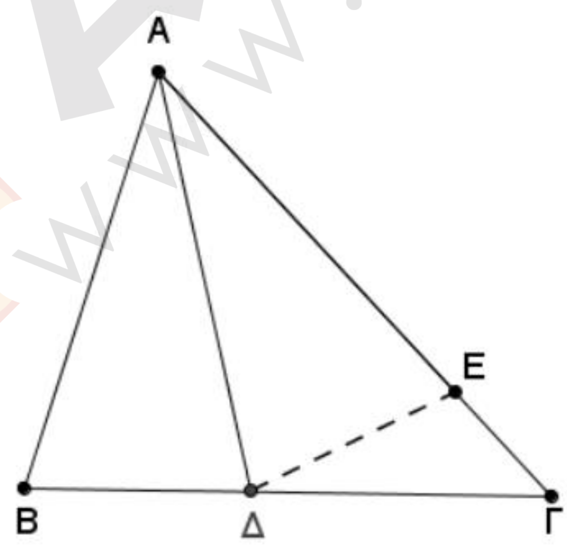
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ και η διχοτόμος του ΑΔ. Στην πλευρά ΑΓ θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο ώστε ΑΕ = ΑΒ.

Να αποδείξετε ότι :

α) τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΕ είναι ίσα. (Μονάδες 7)

β) η ευθεία ΑΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΒΕ. (Μονάδες 9)

γ) αν το ύψος από την κορυφή Β του τριγώνου ΑΒΓ τέμνει την ΑΔ στο Η τότε η ευθεία ΕΗ είναι κάθετη στην ΑΒ. (Μονάδες 9)

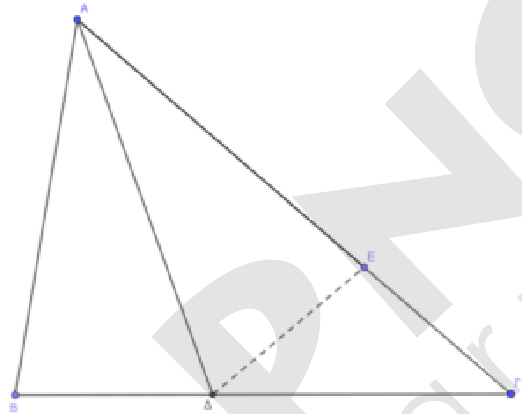


ΛΥΣΗ

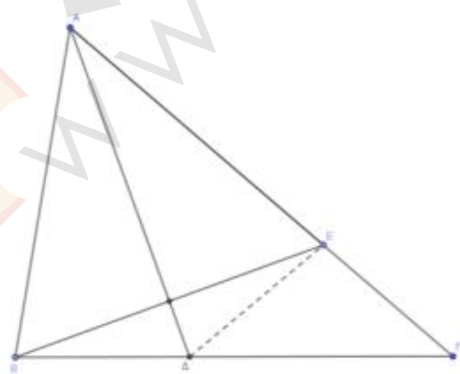
α) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΕ έχουν:

- ΑΔ κοινή πλευρά
- ΑΕ = ΑΒ, από υπόθεση
- $B\widehat{A}\Delta = \Delta\widehat{A}E$, διότι ΑΔ διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$

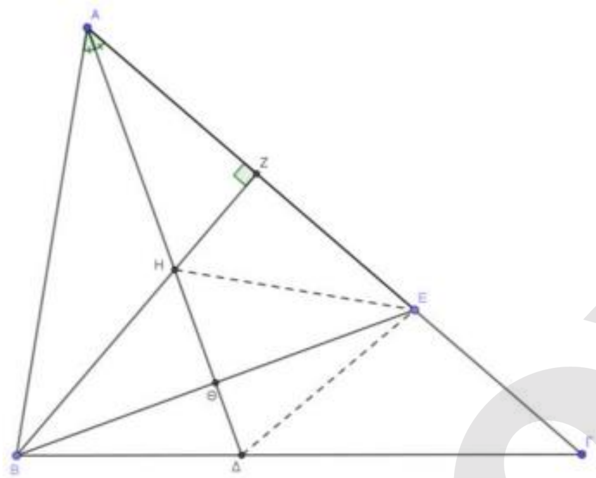
Σύμφωνα με το κριτήριο Π – Γ – Π, τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΕ είναι ίσα.



β) Επειδή ΑΒ = ΑΕ (από υπόθεση) και ΔΒ = ΔΕ (από τα ίσα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΕ) τα Α, Δ βρίσκονται στη μεσοκάθετο του ΒΕ. Άρα η ΑΔ είναι μεσοκάθετος του ΒΕ.



γ) Στο τρίγωνο ΑΒΕ τα ΑΘ, ΒΗ είναι ύψη που τέμνονται στο Η, άρα το σημείο Η είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου. Συνεπώς το ΕΗ είναι το τρίτο ύψος και ισχύει ΕΗ $\perp$ ΑΒ.


A
Z
H
E
Θ
B
Δ
Γ