Κεφ. 5.7. - Τράπεζα Θεμάτων 2022 - Γεωμετρία Α’ Λυκείου

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ & ΛΥΣΕΙΣ

Η Τράπεζα Θεμάτων για τη Γεωμετρία Α’ Λυκείου είναι μία μεγάλη «θάλασσα». Εμείς όμως έχουμε φροντίσει για εσένα, συγκεντρώνοντας εκείνα τα θέματα που αποτελούν τη «βάση» της γνώσης και για τα υπόλοιπα. Μελετώντας και κατανοώντας το μοτίβο σκέψης για τα συγκεκριμένα, μπορείς να λύσεις με επιτυχία και τα υπόλοιπα θέματα. Στην ιστοσελίδα μας www.arnos.gr για το Course της Γεωμετρίας, μελετάς και προετοιμάζεσαι με την αναλυτική διδασκαλία σε ασκήσεις και θέματα, στο ύφος της Τράπεζας.

Θέμα 4 - Κωδικοί:

1706, 1760, 1820, 1827, 1878

1. Θέμα 1706

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και μ_β, μ_γ οι διάμεσοι του τριγώνου που αντιστοιχούν στις πλευρές β και γ αντίστοιχα. Δίνεται η ακόλουθη πρόταση:

Π: Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $\beta = \gamma$, τότε οι διάμεσοι μ_β, μ_γ είναι ίσες.

α) Να εξετάσετε αν ισχύει η πρόταση ***Π***, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

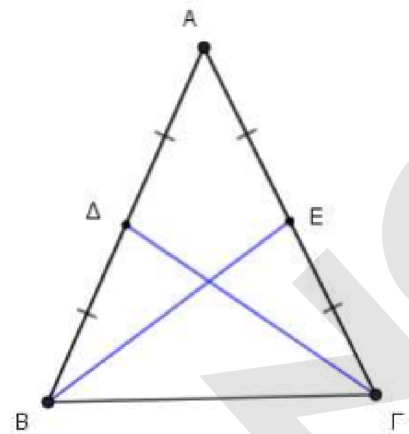
β) Να διατυπώσετε την αντίστροφη πρόταση της ***Π*** και να εξετάσετε αν ισχύει αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

γ) Στην περίπτωση που οι δυο προτάσεις, η ***Π*** και η ***αντίστροφή της*** ισχύουν, να τις διατυπώσετε ως ενιαία πρόταση. (Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Έστω ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ και ΒΕ, ΓΔ οι διάμεσοι μ_β , μ_γ αντίστοιχα. Θα εξετάσουμε αν είναι $\mu_\beta = \mu_\gamma$.



Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΒΕΓ έχουν:

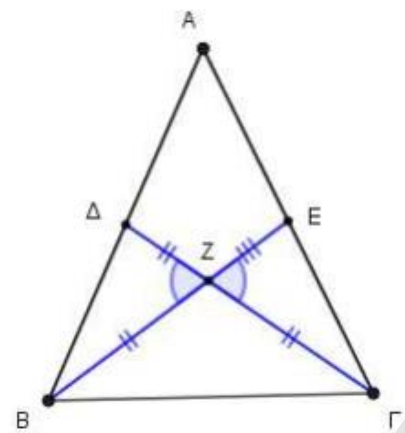
- ΒΔ = ΕΓ, ως μισά των ίσων πλευρών ΑΒ και ΑΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ
- ΒΓ κοινή πλευρά
- $\widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\Gamma}$, ως γωνίες προσκείμενες στη βάση ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

Σύμφωνα με το κριτήριο Π – Γ – Π τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΒΕΓ είναι ίσα οπότε θα έχουν και τα υπόλοιπα κύρια στοιχεία τους ίσα, άρα και ΒΕ = ΔΓ, δηλαδή $\mu_\beta = \mu_\gamma$.

β) Η αντίστροφη πρόταση της Π διατυπώνεται ως εξής:

«Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ οι διάμεσοι του μ_β, μ_γ είναι ίσες, τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με β = γ».

Έστω ότι στο τρίγωνο ΑΒΓ οι διάμεσοί του μ_β, μ_γ , δηλαδή οι ΒΕ , ΓΔ αντίστοιχα, είναι ίσες. Θα εξετάσουμε αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με β = γ, δηλαδή ΑΒ = ΑΓ.



Έστω Ζ το σημείο τομής των διαμέσων ΒΕ και ΓΔ. Άρα το Ζ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ και συνεπώς θα ισχύουν:

$ΔΖ = \frac{1}{3}ΓΔ$ (1) και $ΖΕ = \frac{1}{3}ΒΕ$ (2) αλλά και $ΓΖ = \frac{2}{3}ΓΔ$ (3) και $ΒΖ=\frac{2}{3}ΒΕ$ (4).

Αφού είναι ΓΔ = ΒΕ (από την υπόθεση), από τις (1) και (2) θα είναι ΔΖ = ΖΕ (5) και από τις σχέσεις (3) και (4) θα είναι ΓΖ=ΒΖ (6).

Τα τρίγωνα ΔΖΒ και ΕΖΓ έχουν:

- ΔΖ = ΖΕ , λόγω της σχέσης (5)
- ΒΖ = ΓΖ , λόγω της σχέσης (6)
- $Δ\hat{Z}B = E\hat{Z}Γ$, ως γωνίες κατακορυφήν

Επομένως, σύμφωνα με το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα ΔΖΒ και ΕΖΓ θα είναι ίσα οπότε θα έχουν και τα υπόλοιπα κύρια στοιχεία τους ίσα. Άρα θα είναι ΔΒ = ΕΓ οπότε και 2ΔΒ = 2ΕΓ δηλαδή ΑΒ = ΑΓ.

Επομένως, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Συνεπώς, η πρόταση «Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ οι διάμεσοι του $μ_β$, $μ_γ$ είναι ίσες, τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με β = γ» είναι αληθής.

γ) Εφόσον, από τα ερωτήματα α) και β) η πρόταση Π και η αντίστροφή της είναι αληθής μπορούμε να τις διατυπώσουμε ως την ενιαία πρόταση: «Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με β = γ αν και μόνο αν οι διάμεσοί του μ_β, μ_γ είναι ίσες».

2. Θέμα 1760

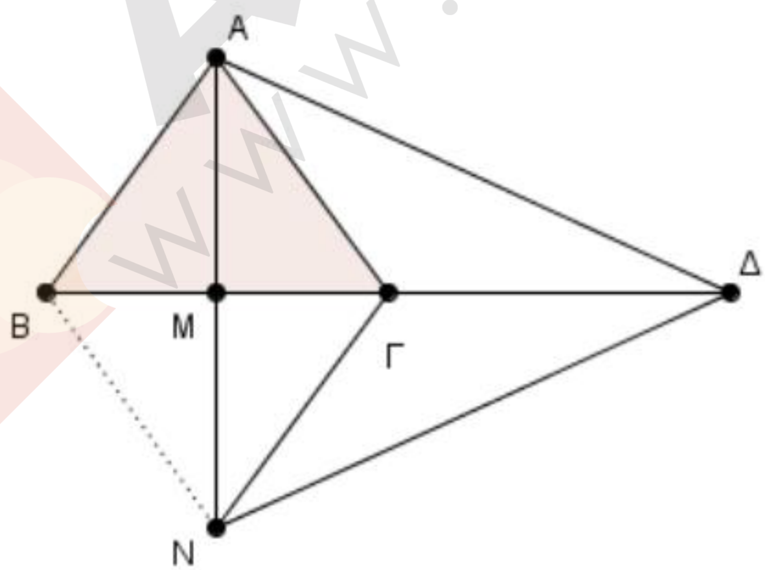
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και ΑΜ το ύψος του στην πλευρά ΒΓ. Στην προέκταση του ΑΜ θεωρούμε τμήμα ΜΝ=ΑΜ . Στην προέκταση του ΒΓ προς το μέρος του Γ θεωρούμε τμήμα ΓΔ =ΒΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΒΝΓ ρόμβος. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΑΔΝ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

γ) Το σημείο Γ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΔΝ. (Μονάδες 9)



ΛΥΣΗ

α) Το ΑΜ είναι ύψος στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, άρα είναι και διάμεσος. Οι ΑΝ, ΒΓ είναι διαγώνιες του τετραπλεύρου ΑΒΝΓ και διχοτομούνται κάθετα, άρα είναι ρόμβος.

β) Στο τρίγωνο ΑΔΝ το ΔΜ είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο ΑΔΝ είναι ισοσκελές.

γ) Ισχύει ότι ΒΓ = 2ΓΜ διότι ΑΒΝΓ ρόμβος. Τότε

ΔΜ = ΔΓ + ΓΜ = ΒΓ + ΓΜ = 3ΓΜ,

δηλαδή ΓΜ = $\frac{1}{3}$ΔΜ, άρα ΔΓ = $\frac{2}{3}$ΔΜ,

οπότε Γ βαρύκεντρο του τριγώνου.

3. Θέμα 1820

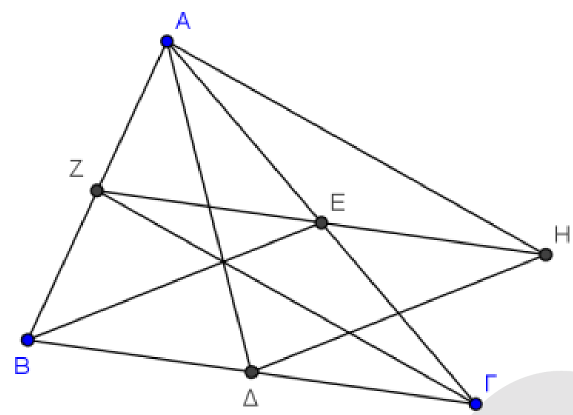
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και οι διάμεσοί του ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ. Προεκτείνουμε το τμήμα ΖΕ (προς το Ε) κατά τμήμα ΕΗ = ΖΕ.

Να αποδείξετε ότι:

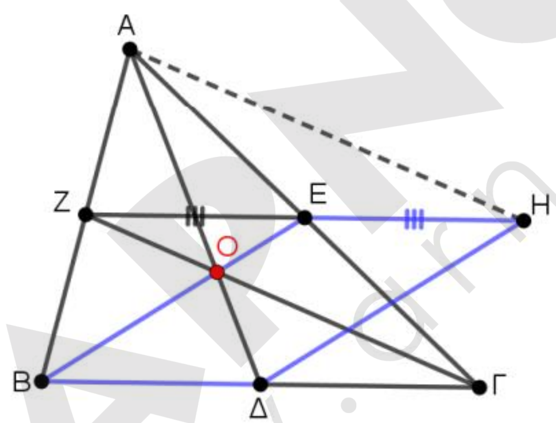
α) Το τετράπλευρο ΕΗΔΒ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

β) Η περίμετρος του τριγώνου ΑΔΗ είναι ίση με το άθροισμα των διαμέσων του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 9)

γ) Οι ευθείες ΒΕ και ΔΗ τριχοτομούν το τμήμα ΖΓ. (Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ



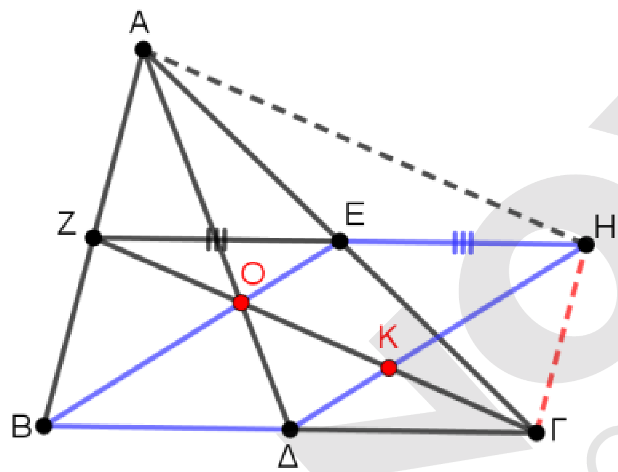
α) Το σημείο Δ είναι μέσο της ΒΓ, άρα ΒΔ = $\frac{ΒΓ}{2}$.

Το ΖΕ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, οπότε ισχύει ότι ΖΕ = $\frac{ΒΓ}{2}$ και το ΖΕ είναι παράλληλο του ΒΓ.

Επομένως ΖΕ και ΒΔ είναι ίσα και παράλληλα. Όμως ΖΕ = ΕΗ και βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Άρα τα ΕΗ και ΒΔ είναι ίσα και παράλληλα.

Άρα στο τετράπλευρο ΕΗΔΒ δύο απέναντι πλευρές του (οι ΕΗ και ΒΔ), είναι ίσες και παράλληλες οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

β) Από την υπόθεση ισχύει ακόμη ότι ΕΗ = ΖΕ και ΑΕ = ΕΓ, άρα οι διαγώνιες ΑΓ και ΖΗ του τετραπλεύρου ΑΖΓΗ διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.



Άρα ισχύει ότι ΓΖ = ΑΗ (1), ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου.

Από το α), το ΕΗΔΒ είναι παραλληλόγραμμο, άρα ισχύει ότι ΒΕ = ΔΗ (2).

Οι διάμεσοι του τριγώνου ΑΒΓ είναι οι ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ.

Για τη περίμετρο του τριγώνου ΑΔΗ, με τη βοήθεια των (1) και (2) έχουμε:

$$Π = ΑΔ + ΔΗ + ΑΗ = ΑΔ + ΒΕ + ΓΖ$$

γ) Το σημείο τομής Ο των διαμέσων ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ. Άρα, ισχύει ότι ΟΖ = $\frac{ΟΓ}{2}$ (3).

Στο τρίγωνο ΒΓΟ, το Δ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ και η ΔΗ είναι παράλληλη στην ΒΟ. Άρα το Κ είναι μέσο της πλευράς ΟΓ, οπότε ΟΚ = ΚΓ = $\frac{ΟΓ}{2}$ (4).

Από τις (3), (4) προκύπτει ότι ΟΖ = ΟΚ = ΚΓ, δηλαδή οι ΒΕ και ΔΗ τριχοτομούν τη ΓΖ.

4. Θέμα 1827

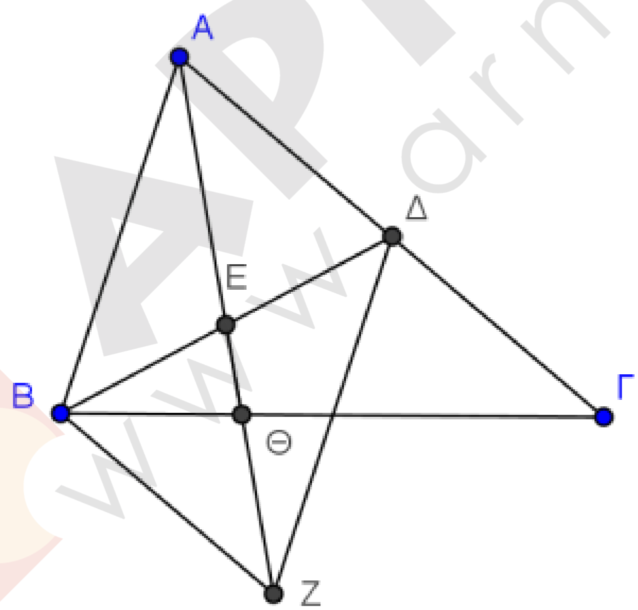
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Ε το μέσο της διαμέσου ΒΔ. Στην προέκταση της ΑΕ θεωρούμε σημείο Ζ τέτοιο ώστε ΕΖ=ΑΕ και έστω Θ το σημείο τομής της ΑΖ με την πλευρά ΒΓ.

Να αποδείξετε ότι:

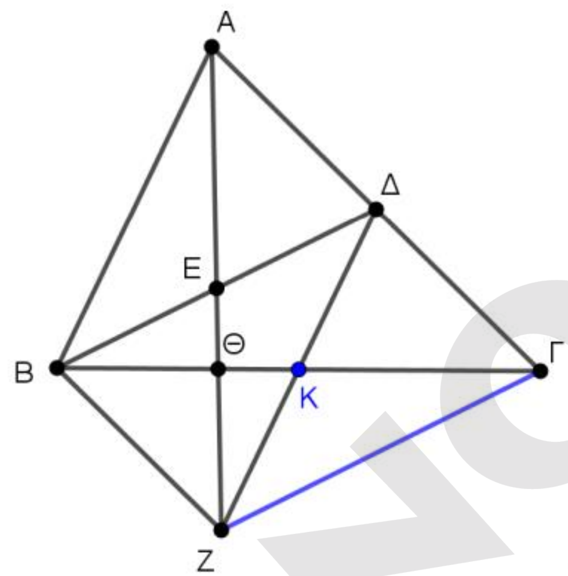
α) Το τετράπλευρο ΑΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

β) Το τετράπλευρο ΒΔΓΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

γ) Το σημείο Θ είναι βαρύκεντρο του τριγώνου ΒΔΖ. (Μονάδες 9)



ΛΥΣΗ



α) Οι διαγώνιες ΑΖ, ΒΔ του τετραπλεύρου ΑΒΖΔ διχοτομούνται γιατί

- ΒΕ = ΕΔ εφόσον το Ε είναι μέσο της ΒΔ, από την υπόθεση και
- ΕΖ = ΑΕ, από την υπόθεση.

Άρα το ΑΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Οι ΒΖ, ΑΔ είναι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου, άρα οι ΒΖ και ΑΔ είναι ίσες και παράλληλες.

Όμως η ΔΓ είναι στην ίδια ευθεία με την ΑΔ, άρα η ΒΖ και η ΔΓ είναι παράλληλες.

Επιπλέον η ΒΔ είναι διάμεσος της ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ (από υπόθεση), άρα ΔΓ = ΑΔ.

Όμως ΒΖ = ΑΔ (ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου, όπως είπαμε), άρα ΒΖ = ΔΓ.

Οπότε το ΒΔΓΖ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει τις δύο απέναντι πλευρές του, ΒΖ και ΔΓ ίσες και παράλληλες.

γ) Έστω Κ το σημείο τομής των ΒΓ και ΔΖ. Επειδή το ΒΔΓΖ είναι παραλληλόγραμμο οι διαγώνιες του διχοτομούνται. Άρα το Κ είναι μέσο του ΔΖ και επομένως η ΒΚ είναι διάμεσος της ΔΖ στο τρίγωνο ΒΔΖ.

Τελικά, στο τρίγωνο ΒΔΖ τα ΕΖ, ΒΚ είναι διάμεσοι, άρα το σημείο τομής τους Θ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου.

5. Θέμα 1878

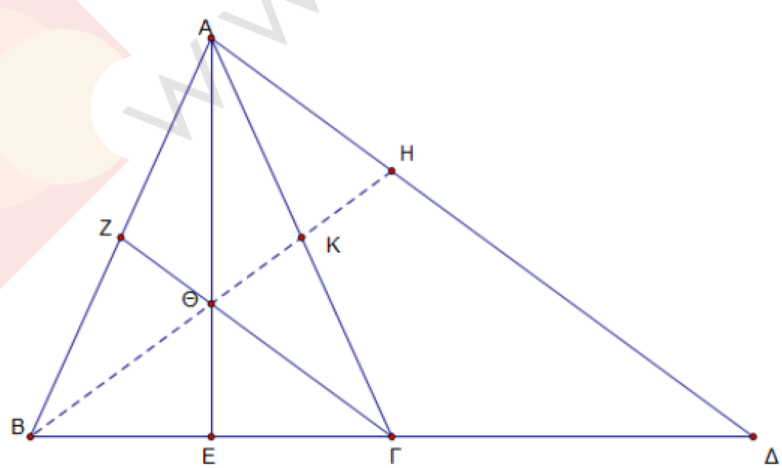
Έστω ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ με $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$. Προεκτείνουμε το ΒΓ (προς το Γ) κατά τμήμα $\Gamma\Delta=\mathrm{B\Gamma}$. Φέρουμε τις διαμέσους ΑΕ και ΓΖ του τριγώνου $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ που τέμνονται στο Θ. Το ΒΘ προεκτεινόμενο, τέμνει το ΑΓ στο Κ και το ΑΔ στο Η.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το ΖΚΓΕ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)

β) $\mathrm{AH}=\Theta\Gamma$. (Μονάδες 9)

γ) ΑΗ=2ΖΘ. (Μονάδες 7)



ΛΥΣΗ

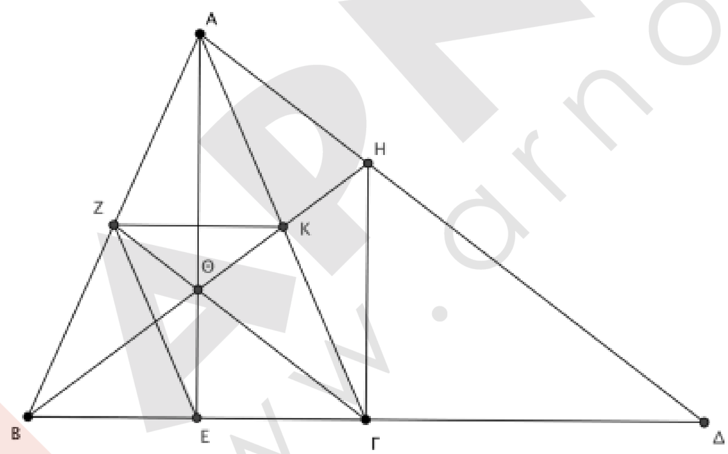
α) Το ΖΕ ενώνει μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, άρα

ΖΕ // ΑΓ άρα ΖΕ // ΚΓ και $ΖΕ = \frac{ΑΓ}{2}$.

Επειδή ΑΕ, ΓΖ διάμεσοι του τριγώνου ΑΒΓ, το Θ είναι το βαρύκεντρό του,

οπότε και η ΒΚ είναι διάμεσος. Άρα $ΚΓ = \frac{ΑΓ}{2}$

Οπότε το τετράπλευρο ΖΚΓΕ έχει τις απέναντι πλευρές του ΖΕ και ΚΓ ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.



β) Στο τρίγωνο ΑΒΔ το ΖΓ ενώνει τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΒΔ, άρα

ΖΓ // ΑΔ άρα και ΘΓ // ΑΗ (1)

Στο τρίγωνο ΒΗΔ το Γ είναι μέσο του ΒΔ και ΘΓ // ΗΔ, άρα το Θ είναι μέσο του ΒΗ.

Οπότε στο τρίγωνο ΒΗΓ το ΘΕ ενώνει τα μέσα των πλευρών του ΒΗ και ΒΓ, άρα ΘΕ // ΗΓ άρα και ΑΘ // ΗΓ (2)

Από τις (1), (2) συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο ΑΘΓΗ είναι παραλληλόγραμμο αφού οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες.

Άρα ΑΗ = ΘΓ ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου.

γ) Στο τρίγωνο ΒΑΗ το ΖΘ ενώνει τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΒΗ, άρα

$ΖΘ = \frac{ΑΗ}{2} \Leftrightarrow ΑΗ = 2\,ΖΘ$.