Κεφ. 5.6. - Τράπεζα Θεμάτων 2022 - Γεωμετρία Α' Λυκείου

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ & ΛΥΣΕΙΣ

Η Τράπεζα Θεμάτων για τη Γεωμετρία Α' Λυκείου είναι μία μεγάλη «θάλασσα». Εμείς όμως έχουμε φροντίσει για εσένα, συγκεντρώνοντας εκείνα τα θέματα που αποτελούν τη «βάση» της γνώσης και για τα υπόλοιπα. Μελετώντας και κατανοώντας το μοτίβο σκέψης για τα συγκεκριμένα, μπορείς να λύσεις με επιτυχία και τα υπόλοιπα θέματα. Στην ιστοσελίδα μας www.arnos.gr για το Course της Γεωμετρίας, μελετάς και προετοιμάζεσαι με την αναλυτική διδασκαλία σε ασκήσεις και θέματα, στο ύφος της Τράπεζας.

Θέμα 2 - Κωδικοί:

1536, 1537, 1542, 1560, 1566, 1583, 1589, 1608, 1611, 1612, 1616, 1655

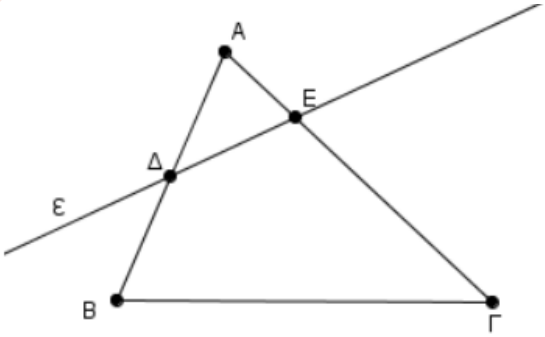
1666, 1671, 1675, 12639, 13532, 14877

1. Θέμα 1536

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Δ το μέσο της πλευράς ΑΒ. Από το Δ διέρχεται μια τυχαία ευθεία (ε) που τέμνει την πλευρά ΑΓ σε εσωτερικό της σημείο Ε. Η ευθεία (ε) χωρίζει το τρίγωνο ΑΒΓ σε ένα τρίγωνο ΑΔΕ και σε ένα τετράπλευρο ΒΔΕΓ .

α) Ποια πρέπει να είναι η θέση του σημείου Ε, ώστε το τετράπλευρο ΒΔΕΓ να είναι τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

β) Ποιο πρέπει να είναι το είδος του ΑΒΓ τριγώνου, ώστε το τραπέζιο του ερωτήματος (α) να είναι ισοσκελές τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)



Έξυπνα & εύκολα!

ΛΥΣΗ

α) Αν το ΒΔΕΓ είναι τραπέζιο, θα έχει δύο μόνο απέναντι πλευρές παράλληλες. Επειδή οι πλευρές ΒΔ και ΓΕ τέμνονται στην κορυφή Α του τριγώνου, παράλληλες θα πρέπει να είναι οι ΔΕ και ΒΓ. Δηλαδή, η ευθεία ε από το μέσο Δ της πλευράς ΑΒ θα πρέπει είναι παράλληλη στην πλευρά ΒΓ. Επομένως το σημείο Ε θα είναι μέσο της ΑΓ.

β) Για να είναι το ΒΔΕΓ ισοσκελές τραπέζιο πρέπει $\hat{B} = \hat{\Gamma}$. Άρα πρέπει το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ισοσκελές.

2. Θέμα 1537

Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, προεκτείνουμε την πλευρά ΔΑ (προς το Α) κατά τμήμα ΑΗ=ΔΑ. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{\Delta}$, η οποία τέμνει την ΑΒ στο σημείο Ζ.

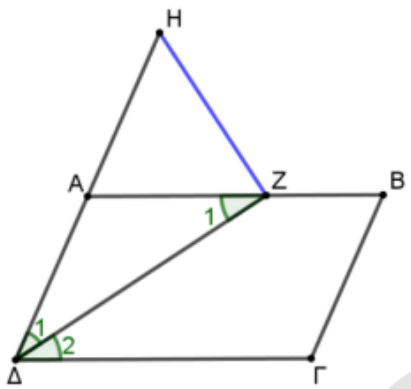
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΔΖ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)

β) Το τρίγωνο ΔΖΗ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία $\hat{Z}$. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

Έστω ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο, τμήμα ΑΗ στην προέκταση της ΔΑ τέτοιο ώστε ΑΗ=ΔΑ και ΔΖ διχοτόμος της $\hat{\Delta}$.



α) Είναι $\widehat{\Delta}_2 = \widehat{Z}_1$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΔΖ. Επίσης $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta}_2$ αφού ΔΖ διχοτόμος της γωνίας Δ. Άρα $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{Z}_1$, οπότε το τρίγωνο ΑΔΖ είναι ισοσκελές με ΑΔ=ΑΖ.

β) Από το α) ερώτημα είναι ΔΑ = ΑΖ. Όμως ΑΗ = ΔΑ, από υπόθεση, άρα ΖΑ = ΑΔ = ΑΗ = $\frac{\Delta H}{2}$. Δηλαδή, στο τρίγωνο ΔΖΗ η διάμεσος του ΖΑ είναι ίση με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, οπότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την ΔΗ, επομένως $\widehat{Z} = 90^o$.

3. Θέμα 1542

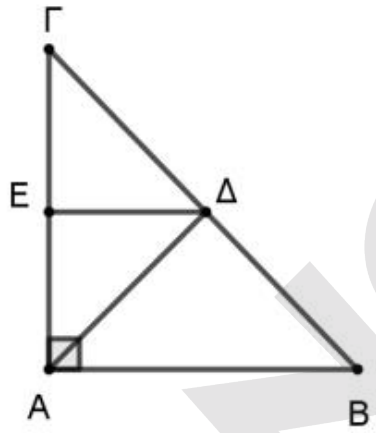
Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ($\hat{A} = 90°$) και ΑΔ η διάμεσός του. Από το σημείο Δ φέρουμε παράλληλη προς την ΑΒ που τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 13)

β) ΔΕ= $\frac{\text{ΑΓ}}{2}$ (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

Έστω ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A}$ ορθή, ΑΔ η διάμεσός του και τμήμα ΔΕ παράλληλο στην ΑΒ.



α) Είναι ΑΒ//ΔΕ και ΑΓ⊥ΑΒ. Άρα η ΑΓ θα είναι κάθετη και στην παράλληλη της ΑΒ που είναι η ΔΕ, δηλαδή ΑΓ⊥ΔΕ. Οπότε το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ορθογώνιο με $\widehat{\Gamma E \Delta} = 90°$.

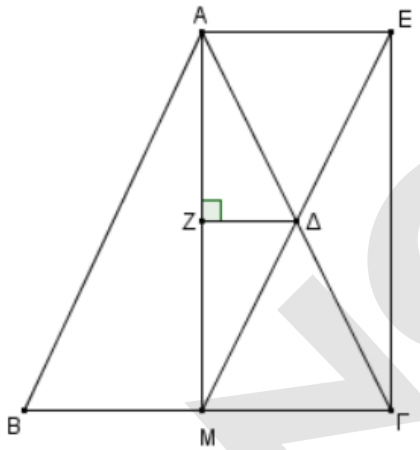
β) Στο τρίγωνο ΑΒΓ, το Δ είναι μέσο της ΒΓ και ΔΕ // ΑΒ, άρα και το Ε είναι μέσο της ΑΓ. Επειδή το τμήμα ΔΕ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΑΓ του ΑΒΓ ισχύει ότι: $ΔΕ = \frac{ΑΒ}{2}$ ή $ΔΕ = \frac{ΑΓ}{2}$ αφού ΑΒ=ΑΓ στο ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ.

4. Θέμα 1560

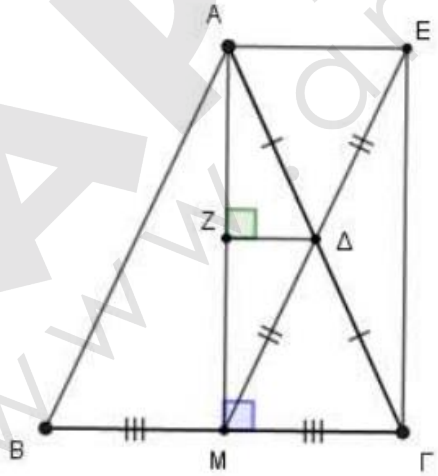
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και η διάμεσός του ΑΜ. Στο τρίγωνο ΑΜΓ θεωρούμε τη διάμεσο ΜΔ την οποία προεκτείνουμε προς το Δ κατά τμήμα ΔΕ=ΔΜ. Φέρουμε από το σημείο Δ τμήμα ΔΖ ⊥ΑΜ. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΜΓΕ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 12)

β) $\Delta Z = \frac{B\Gamma}{4}$ (Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ



α) Στο τετράπλευρο ΑΜΓΕ τα ΑΓ, ΜΕ είναι διαγώνιοί του.

Επειδή είναι ΜΔ = ΔΕ (υπόθεση) και ΑΔ = ΔΓ αφού ΜΔ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΜΓ, έχουμε ότι οι διαγώνιοι ΜΕ και ΑΓ του τετραπλεύρου ΑΜΓΕ διχοτομούνται στο Δ. Οπότε, το τετράπλευρο ΑΜΓΕ είναι παραλληλόγραμμο με κέντρο το Δ.

Επειδή ΑΜ είναι διάμεσος στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, θα είναι και ύψος του τριγώνου οπότε ΑΜ ⊥ΒΓ (1) και $A\hat{M}Γ = 90^o$.

Οπότε το παραλληλόγραμμο ΑΜΓΕ έχει μια γωνία του ορθή, άρα είναι ορθογώνιο.

β) Αφού ΔΖ ⊥ ΑΜ και ΑΜ ⊥ΒΓ (από σχέση (1)) άρα ΔΖ // ΜΓ ως κάθετες στην ίδια ευθεία ΑΜ.

Στο τρίγωνο ΑΜΓ το Δ είναι μέσο της ΑΓ και ΔΖ // ΜΓ, άρα το Ζ είναι μέσο της ΑΜ. Οπότε, το τμήμα ΔΖ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΓ και ΑΜ του τριγώνου ΑΜΓ άρα θα είναι ίσο με το μισό της πλευράς του ΜΓ, δηλαδή $ΔΖ = \frac{ΜΓ}{2}$.

Επειδή $ΜΓ=\frac{ΒΓ}{2}$, αφού Μ μέσο ΒΓ, τότε θα είναι $ΔΖ = \frac{\frac{ΒΓ}{2}}{2}$, οπότε $ΔΖ = \frac{ΒΓ}{4}$.

5. Θέμα 1566

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα μέσα Δ, Ε και Ζ των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

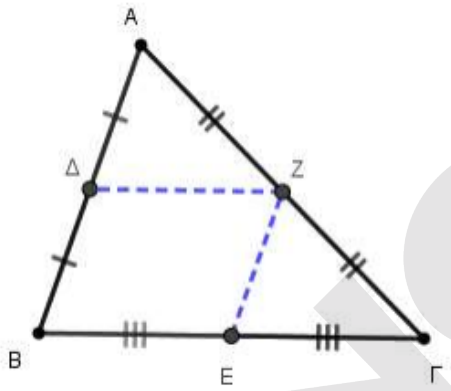
α) Το τετράπλευρο ΔΒΕΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

β) Η ευθεία ΔΖ διχοτομεί το τμήμα ΑΕ. (Μονάδες12)

ΛΥΣΗ

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και Δ, Ε και Ζ τα μέσα των πλευρών του ΑΒ,ΒΓ και ΓΑ αντίστοιχα.

α)



Στο τρίγωνο ΑΒΓ, το τμήμα ΔΖ ενώνει τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ.

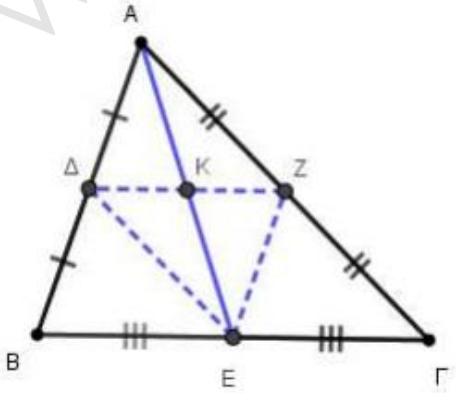
Οπότε, το ΔΖ θα είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά ΒΓ και ίσο με το μισό της,

δηλαδή ΔΖ // ΒΓ και ΔΖ = $\frac{ΒΓ}{2}$ = ΒΕ, αφού Ε είναι το μέσο του ΒΓ.

Αφού ΔΖ // ΒΓ τότε και ΔΖ // ΒΕ

Οπότε, το τετράπλευρο ΔΒΕΖ έχει τις δύο απέναντι πλευρές του ΔΖ και ΒΕ ίσες και παράλληλες, άρα είναι παραλληλόγραμμο.

β)



Στο τρίγωνο ΑΒΓ το τμήμα ΔΕ ενώνει τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΒΓ.

Οπότε το ΔΕ θα είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά ΑΓ, δηλαδή ΔΕ // ΑΓ άρα και ΔΕ // ΑΖ. Επίσης το ΔΕ θάναι ίσο με το μισό της ΑΓ, δηλαδή ΔΕ = $\frac{ΑΓ}{2}$ = ΑΖ αφού το Ζ είναι το μέσο του ΑΓ.

Οπότε, το τετράπλευρο ΑΔΕΖ έχει τις απέναντι πλευρές του ΔΕ και ΑΖ ίσες και παράλληλες, άρα είναι παραλληλόγραμμο.

Οι ΑΕ και ΔΖ είναι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου ΑΔΕΖ οπότε διχοτομούνται έστω Κ το κέντρο του. Άρα η ευθεία ΔΖ διχοτομεί το τμήμα ΑΕ.

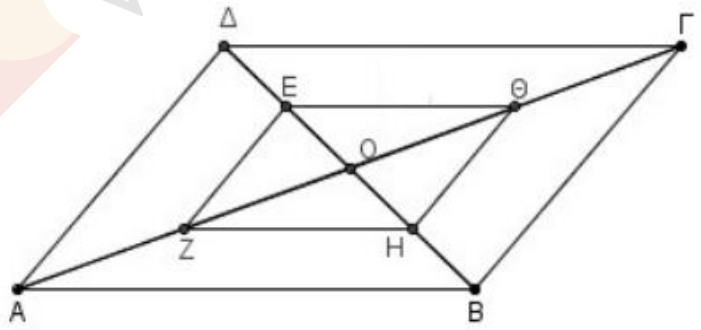
6. Θέμα 1583

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ο είναι το κέντρο του. Έστω Ε, Ζ, Η, Θ τα μέσα των ΟΔ, ΟΑ, ΟΒ και ΟΓ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι :

α) Το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)

β) Αν η περίμετρος του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι 40, να βρείτε την περίμετρο του ΕΖΗΘ. (Μονάδες 15)



ΛΥΣΗ

α) Τα Ε, Ζ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΟΑΔ, άρα ΕΖ = $\frac{ΑΔ}{2}$ (1).

Τα Ζ, Η είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΟΑΒ, άρα ΖΗ = $\frac{ΑΒ}{2}$ (2).

Τα Η, Θ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΟΒΓ, άρα ΘΗ = $\frac{ΒΓ}{2}$ (3).

Τα Ε, Θ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΟΓΔ, άρα ΕΘ = $\frac{ΓΔ}{2}$ (4).

Επειδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο ισχύει ότι ΑΒ = ΓΔ και ΑΔ = ΒΓ. Τότε από τις (1), (3) βρίσκουμε ΖΗ = ΕΘ και από τις (2), (4) ΕΖ = ΘΗ, δηλαδή στο τετράπλευρο ΕΖΗΘ οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

β) Επειδή η περίμετρος του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι 40, ισχύει ότι:

ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΑ = 40. Τότε:

$$ΕΖ + ΖΗ + ΗΘ + ΘΕ = \frac{ΑΔ}{2} + \frac{ΑΒ}{2} + \frac{ΒΓ}{2} + \frac{ΓΔ}{2} = \frac{ΑΔ+ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ}{2} = \frac{40}{2} = 20$$

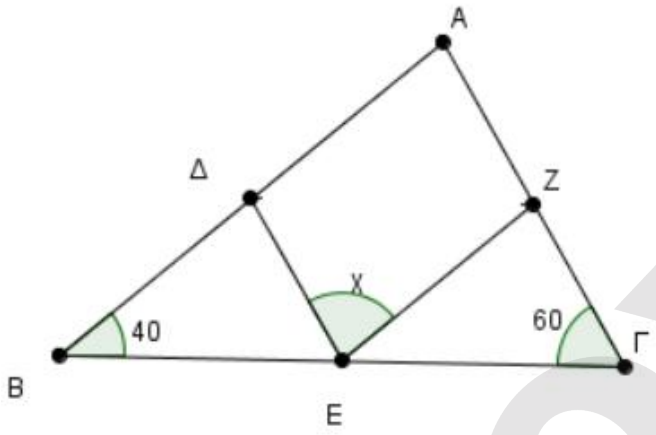
7. Θέμα 1589

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = 40^0$ και $\hat{\Gamma} = 60^0$. Επιπλέον, τα σημεία Δ, Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι ΔΕ//ΑΓ και ΖΕ//ΑΒ. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΔΕ. (Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ

α) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ, έχουμε:

$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^o$ ή $\widehat{A} + 40^o + 60^o = 180^o$, άρα $\widehat{A} = 80^o$

β) Το ΔΕ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, οπότε ισχύει ότι ΔΕ // ΑΓ.

Επίσης το ΕΖ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, οπότε: ΕΖ // ΑΒ.

γ) Είναι $B\widehat{\Delta}E = \widehat{A} = 80^o$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔΕ, ΑΓ που τέμνονται από την ΑΒ. Ομοίως, είναι $B\widehat{E}\Delta = \widehat{\Gamma} = 60^o$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔΕ, ΑΓ που τέμνονται από την ΒΓ.

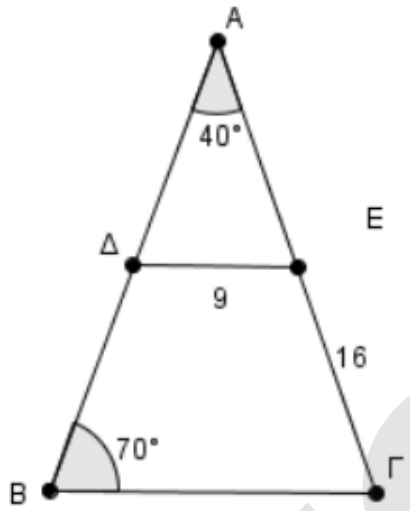
8. Θέμα 1608

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 40^0$ και $\hat{B} = 70^0$. Τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ με $\Delta E = 9$ και $E\Gamma = 16$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές και να βρείτε ποιες είναι οι ίσες πλευρές του. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι ΒΓ=18. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 9)



ΛΥΣΗ

α) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ βρίσκουμε:

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow 40^o + 70^o + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow 110^o + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 70^o$

Άρα $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΓ, οπότε έχει ίσες πλευρές τις ΑΒ και ΑΓ.

β) Επειδή τα Δ, Ε είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, ισχύει ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ είναι ίσο με το μισό της ΒΓ, δηλαδή

$ΔΕ = \frac{ΒΓ}{2} \Leftrightarrow 9 = \frac{ΒΓ}{2} \Leftrightarrow ΒΓ = 18$

γ) Είναι

$ΕΓ = 16 \Leftrightarrow \frac{ΑΓ}{2} = 16 \Leftrightarrow ΑΓ = 32$ οπότε και ΑΒ = 32.

Τότε η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι:

Π = ΑΒ + ΒΓ + ΑΓ = 32 + 18 + 32 = 82

9. Θέμα 1611

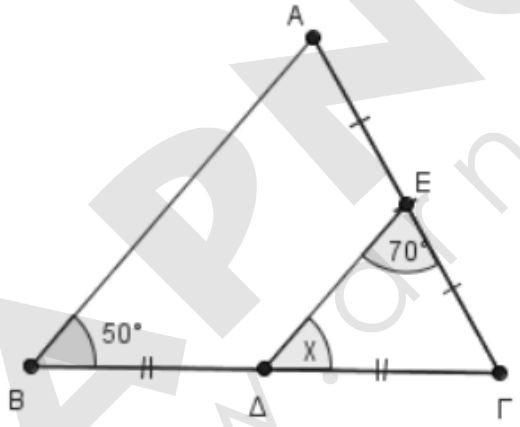
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = 50^0$. Έστω ότι τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $\widehat{\Delta E \Gamma} = 70^0$.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί $\Delta E // AB$. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε

I. τη γωνία $\hat{\chi}$. (Μονάδες 8)

II. τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 9)



ΛΥΣΗ

α) Το ΔΕ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε ΔΕ // ΑΒ.

β) i. Είναι $\hat{\chi} = \hat{B} = 50^o$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ, ΔΕ που τέμνονται από την ΒΓ.

ii. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΔΕΓ έχουμε ότι $70^o + \hat{\chi} + \hat{\Gamma} = 180^o$ και χρησιμοποιώντας όσα έχουμε βρει στο βi), γράφουμε:

$70^o + 50^o + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 60^o$.

Επίσης $\hat{A} = \hat{E} = 70^o$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ, ΔΕ που τέμνονται από την ΑΓ.

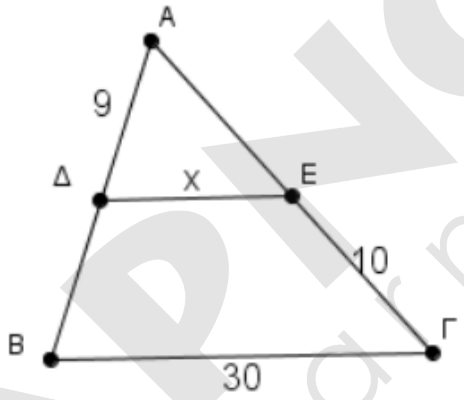
10. Θέμα 1612

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με Δ και Ε τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ΑΔ=9 , ΕΓ=10 και ΒΓ=30 .

α) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΓΒ είναι τραπέζιο. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το μήκος x του τμήματος ΔΕ. (Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ

α) Το Δ είναι μέσο του ΑΒ, άρα ΑΒ = 2ΑΔ.

Ομοίως, ΑΓ = 2ΑΕ. Η περίμετρος του τριγώνου είναι:

$$Π = AB + BΓ + AΓ = 2AΔ + 30 + 2EΓ = 18 + 30 + 20 = 68.$$

β) Το ΔΕ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε:

$$ΔE \,//\, BΓ$$

Επίσης οι ΒΔ και ΓΕ δεν είναι παράλληλες, καθώς είναι μέρη πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ. Άρα το τετράπλευρο ΔΕΓΒ είναι τραπέζιο.

Σολωμού 29 Αθήνα τηλ: 210 38 22 157 info@arnos.gr www.arnos.gr

γ) Εφόσον, το ΔΕ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ, ισχύει επιπλέον ότι:

$$ΔΕ = \frac{ΒΓ}{2} \Leftrightarrow x = \frac{30}{2} \Leftrightarrow x = 15.$$

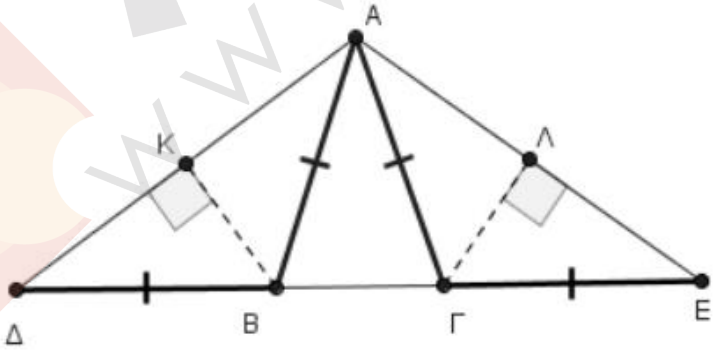
11. Θέμα 1616

Θεωρούμε τρίγωνα ΑΒΔ με ΑΒ = ΒΔ = 5 και ΑΓΕ με ΑΓ = ΓΕ = 5 έτσι ώστε τα σημεία Δ, Β, Γ και Ε να είναι συνευθειακά. Θεωρούμε τα ύψη τους ΒΚ και ΓΛ αντίστοιχα.

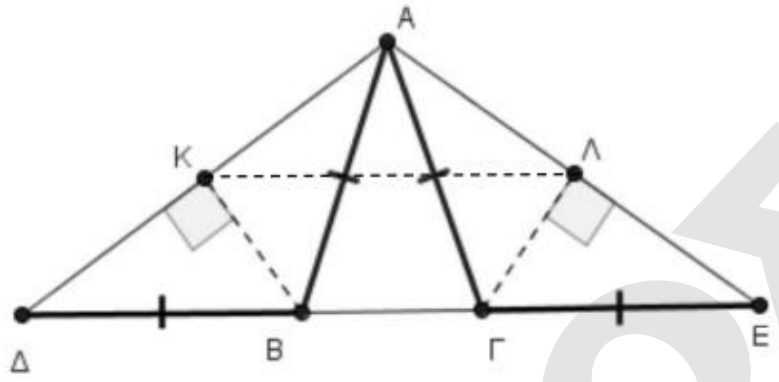
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ισοσκελή. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ και Λ είναι τα μέσα των τμημάτων ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα. (Μονάδες 8)

γ) Αν η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι 12, να υπολογίσετε το τμήμα ΚΛ. (Μονάδες 9)



ΛΥΣΗ



α) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ισοσκελή, γιατί είναι ΑΒ = ΒΔ και ΑΓ = ΓΕ, αντίστοιχα.

β) Το ΒΚ είναι ύψος του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΔ που αντιστοιχεί στη βάση του, άρα είναι και διάμεσος του τριγώνου, οπότε το Κ είναι μέσο του ΑΔ.

Όμοια, το ΓΛ είναι ύψος του ισοσκελούς τριγώνου ΑΓΕ που αντιστοιχεί στη βάση του, άρα είναι και διάμεσός του, συνεπώς το Λ είναι μέσο του ΑΕ.

γ) Είναι ΑΒ + ΑΓ + ΒΓ = 12. Όμως ισχύει ΑΒ = ΒΔ = ΑΓ = ΓΕ, άρα ΒΔ + ΓΕ + ΒΓ = 12.

Το τμήμα ΚΛ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΔΕ, άρα

$$ΚΛ = \frac{ΔΕ}{2} = \frac{ΒΔ+ΓΕ+ΒΓ}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

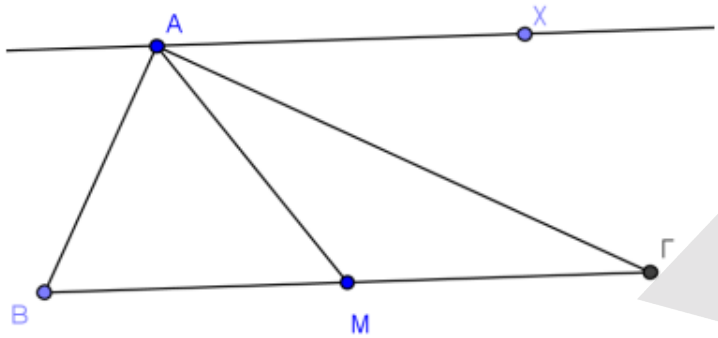
12. Θέμα 1655

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή και Μ το μέσο της ΒΓ. Φέρουμε ημιευθεία Αx παράλληλη στη ΒΓ (στο ημιεπίπεδο που ορίζει η ΑΜ με το σημείο Γ).

Να αποδείξετε ότι:

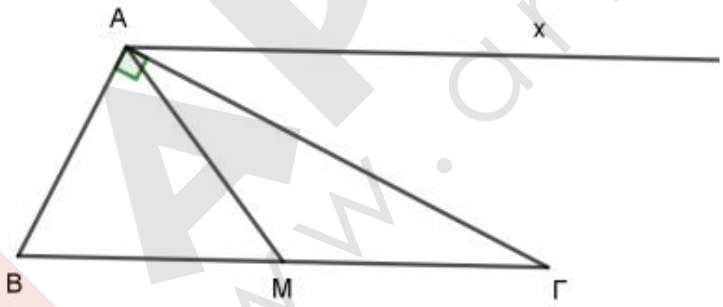
α) $M\hat{A}\Gamma = M\hat{\Gamma}A$ (Μονάδες 12)

β) η ΑΓ είναι διχοτόμος της γωνίας ΜΑx. (Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα ισχύει ότι $AM = \frac{B\Gamma}{2} = M\Gamma$.



Επομένως το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισοσκελές, οπότε άρα $M\hat{A}\Gamma = M\hat{\Gamma}A$ (1).

β) Είναι $M\hat{\Gamma}A = \Gamma\hat{A}x$ (2) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων Ax, ΒΓ που τέμνονται από την ΑΓ. Από τις (1), (2) βρίσκουμε: $M\hat{A}\Gamma = \Gamma\hat{A}x$, άρα η ΑΓ είναι διχοτόμος της γωνίας $M\hat{A}x$.

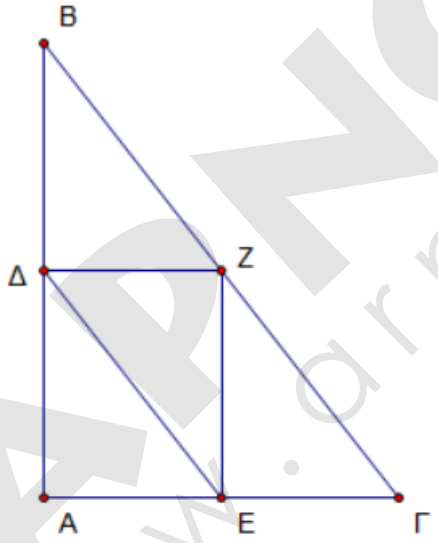
13. Θέμα 1666

Σε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) θεωρούμε τα μέσα Δ, Ε και Ζ των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΕΖΔ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 12)

β) Το τετράπλευρο ΕΔΒΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ

α) Επειδή το ΔΖ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, ισχύει ότι

ΔΖ//ΑΓ ⇔ ΔΖ//ΑΕ και ΔΖ = $\frac{ΑΓ}{2}$ =ΑΕ

Άρα στο τετράπλευρο ΑΕΖΔ είναι ΔΖ // = ΑΕ, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επειδή όμως $\hat{A}$ = 90°, το ΑΕΖΔ είναι ορθογώνιο.

β)Το ΔΕ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ άρα ΔΕ // ΒΓ. Οι πλευρές ΒΔ και ΓΕ τέμνονται στο σημείο Α, άρα δεν είναι παράλληλες. Οπότε το ΕΔΒΓ είναι τραπέζιο.

Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, έχει ΑΒ = ΑΓ, άρα και ΔΒ = ΕΓ γιατί είναι μισά των ΑΒ, ΑΓ. Άρα το τετράπλευρο ΕΔΒΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

14. Θέμα 1671

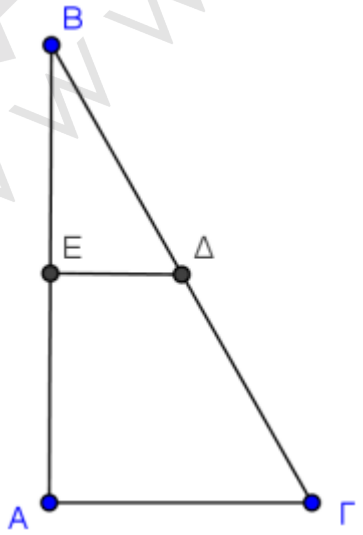
Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^o$ και $\hat{B} = 30^o$. Αν τα σημεία Ε και Δ είναι τα μέσα των ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα με ΕΔ=1, να υπολογίσετε τα τμήματα:

α) ΑΓ…… (Μονάδες 8)

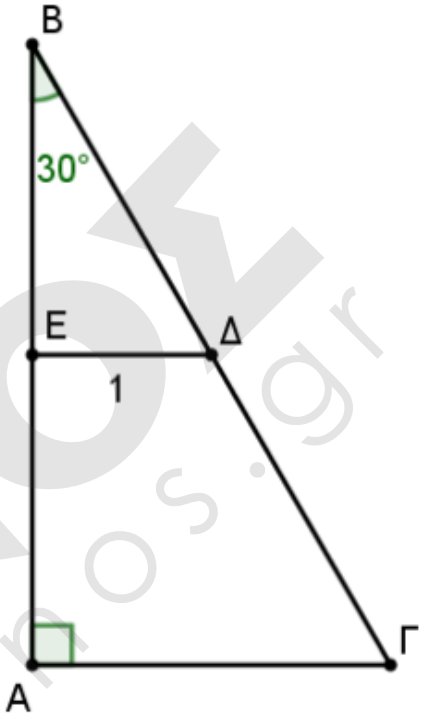
β) ΒΓ….. (Μονάδες 9)

γ) ΑΔ….. (Μονάδες 8)

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



ΛΥΣΗ



α) Το ΔΕ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε ισχύει:

$ΔΕ = \frac{ΑΓ}{2} \Leftrightarrow 1 = \frac{ΑΓ}{2} \Leftrightarrow ΑΓ = 2$

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{B} = 30^{o}$, άρα ισχύει ότι:

$ΑΓ = \frac{ΒΓ}{2} \Leftrightarrow 2 = \frac{ΒΓ}{2} \Leftrightarrow ΒΓ = 4$

γ) Η ΑΔ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, επομένως ισχύει ότι: $ΑΔ = \frac{ΒΓ}{2} = \frac{4}{2} = 2$

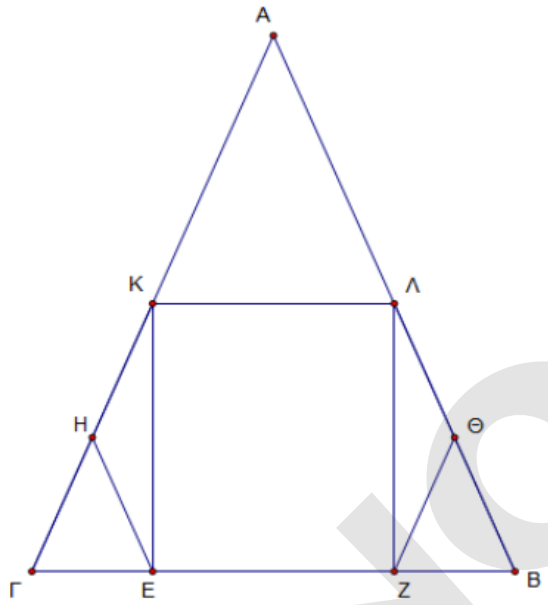
15. Θέμα 1675

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ. Από τα μέσα Κ και Λ των πλευρών ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα, φέρουμε τα κάθετα τμήματα ΚΕ και ΛΖ στην πλευρά ΒΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{ΚΕΓ}$ και $\overset{\Delta}{ΛΖΒ}$ είναι ίσα. (Μονάδες 15)

β) ΕΗ=ΖΘ, όπου Η , Θ τα μέσα των τμημάτων ΚΓ, ΛΒ αντίστοιχα. (Μονάδες 10)

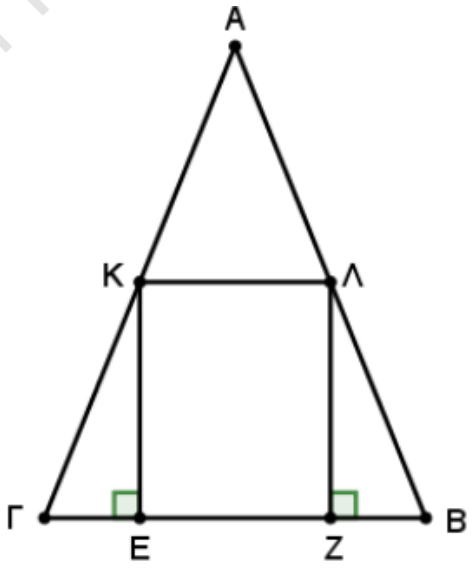


ΛΥΣΗ

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΚΕΓ και ΛΖΒ έχουν:

- ΚΓ = ΚΒ, ως μισά των ίσων πλευρών ΑΒ και ΑΓ
- $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, ως γωνίες βάσης του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

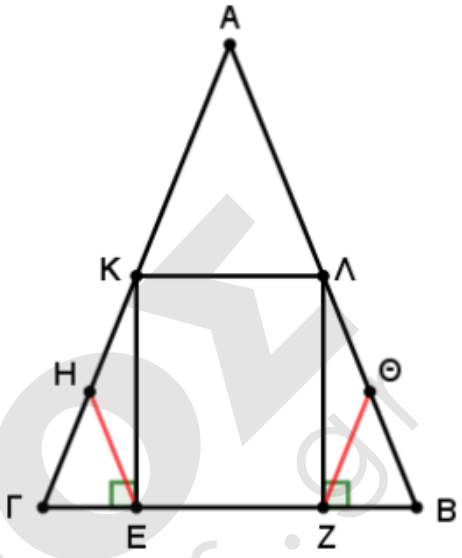
Άρα τα τρίγωνα ΚΕΓ και ΛΖΒ είναι ίσα.



β) Η ΕΗ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΚΕΓ, οπότε ισχύει: $ΕΗ = \frac{ΚΓ}{2}$

Η ΖΘ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΛΖΒ, άρα $ΖΘ = \frac{ΛΒ}{2}$

Επειδή ΚΓ=ΛΒ, είναι και ΕΗ =ΖΘ.



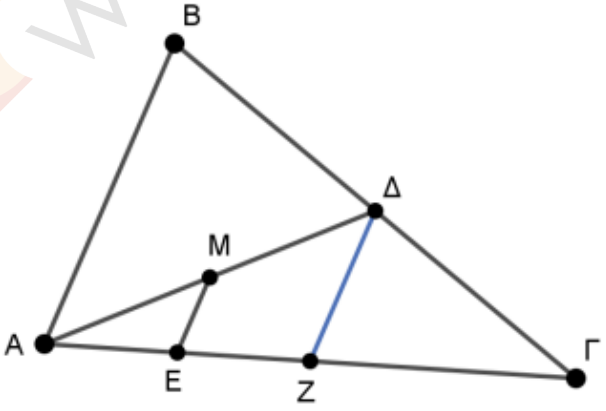
16. Θέμα 12639

Από το μέσο Μ της διαμέσου ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ, φέρουμε παράλληλη στην ΑΒ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε. Αν η παράλληλη από το Δ στην ΑΒ τέμνει την ΑΓ στο Ζ, να αποδείξετε ότι:

α) το Ζ είναι μέσο της ΑΓ. (Μονάδες 10)

β) το ΑΕ ισούται με το $\frac{1}{4}$ του ΑΓ. (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ



α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ, εφόσον από το μέσο Δ της πλευράς ΒΓ φέρουμε παράλληλη στην πλευρά ΑΒ, αυτή θα περάσει από το μέσο της τρίτης πλευράς. Επομένως το Ζ είναι το μέσον της πλευράς ΑΓ.

β) Λόγω του (α) ερωτήματος το ΑΖ = $\frac{\text{ΑΓ}}{2}$ (1).

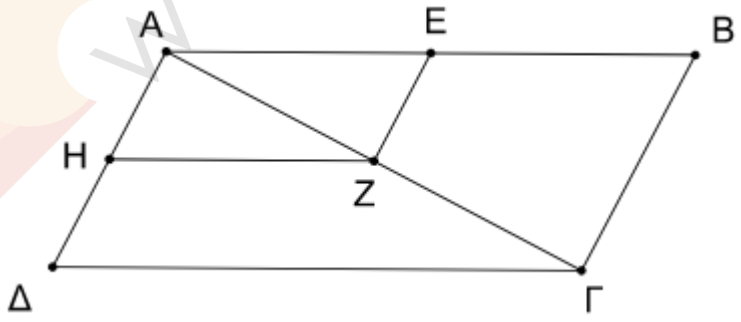
Στο τρίγωνο ΑΔΖ, το Μ είναι μέσο της πλευράς του ΑΔ και η ΜΕ // ΔΖ εφόσον και οι δύο είναι παράλληλες στην ΑΒ. Επομένως το Ε είναι μέσο της ΑΖ, άρα ΑΕ = $\frac{\text{ΑΖ}}{2}$ και λόγω της (1) είναι τελικά ΑΕ = $\frac{\text{ΑΓ}}{4}$.

17. Θέμα 13532

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα μέσα Ε, Ζ και Η των ΑΒ, ΑΓ και ΑΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) ΖΗ $= \frac{\text{ΑΒ}}{2}$. (Μονάδες 15)

β) Το τετράπλευρο ΑΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)



ΛΥΣΗ

α) Στο τρίγωνο ΑΓΔ το τμήμα ΖΗ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΓ και ΑΔ, άρα είναι παράλληλο στη ΓΔ και ίσο με το μισό της, δηλαδή ΖΗ//ΓΔ (1) και $ΖΗ = \frac{ΓΔ}{2}$. Όμως $ΑΒ = ΓΔ$, γιατί είναι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου, άρα $ΖΗ = \frac{ΑΒ}{2}$.

β) Αφού το Ε είναι το μέσο της ΑΒ, θα είναι $ΑΕ = \frac{ΑΒ}{2}$. Όμως από το ερώτημα α) είναι $ΖΗ = \frac{ΑΒ}{2}$, άρα $ΑΕ = ΖΗ$.

Επιπλέον, είναι ΑΕ//ΓΔ (2), γιατί το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι ΑΕ//ΖΗ.

Το τετράπλευρο ΑΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί οι απέναντι πλευρές του ΑΕ, ΖΗ είναι ίσες και παράλληλες.

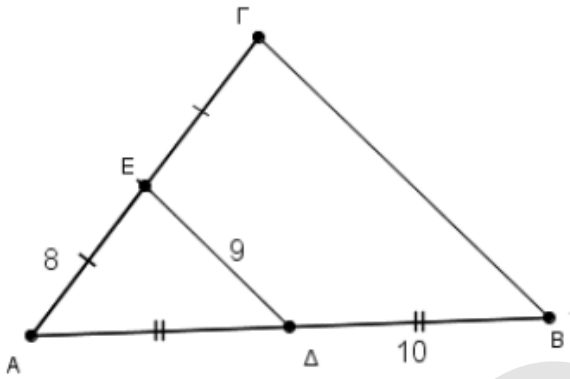
18. Θέμα 14877

Στο τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ΑΕ=8 , ΕΔ=9 και ΔΒ=10 .

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΓΒ είναι τραπέζιο. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΒΓ. (Μονάδες 8)

γ) Να συγκρίνετε τις περιμέτρους του τριγώνου ΑΒΓ και του τετραπλεύρου ΔΕΓΒ. (Μονάδες 9)



ΛΥΣΗ

α) Το ΔΕ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε:

$$ΔΕ // ΒΓ$$

Επίσης οι προεκτάσεις των πλευρών ΔΒ, ΕΓ, του ΔΕΓΒ, τέμνονται στο Α. Άρα οι ΔΒ και ΕΓ δεν είναι παράλληλες. Επομένως, το τετράπλευρο ΔΕΓΒ είναι τραπέζιο.

β) Επίσης, ισχύει $ΔΕ = \frac{ΒΓ}{2}$, γιατί το ΔΕ ενώνει τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ. Άρα:

$$ΔΕ = \frac{ΒΓ}{2} \Leftrightarrow 9 = \frac{ΒΓ}{2} \Leftrightarrow ΒΓ = 18$$

γ) Έστω $Π_1$ η περίμετρος του ΑΒΓ και $Π_2$ η περίμετρός του ΔΕΓΒ.

α΄ τρόπος: Ισχύουν ΑΒ = 2ΔΒ και ΑΓ = 2ΑΕ. Για τη περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ, έχουμε:

$$Π_1 = ΑΒ + ΒΓ + ΑΓ = 2ΔΒ + 18 + 2ΑΕ = 20 + 18 + 16 = 54$$

Για τη περίμετρο του τετραπλεύρου (τραπεζίου) ΔΕΓΒ έχουμε:

$$Π_2 = ΔΕ + ΕΓ + ΓΒ + ΒΔ = 9 + 8 + 18 + 10 = 45$$

Άρα $Π_1 > Π_2$.

β΄ τρόπος: Από την τριγωνική ανισότητα είναι ΑΔ + ΑΕ > ΔΕ.

$Π_1$ = ΑΒ + ΒΓ + ΑΓ = ΑΔ + ΔΒ + ΒΓ + ΑΕ + ΕΓ = ΔΒ + ΒΓ + ΕΓ +(ΑΔ + ΑΕ) > ΔΒ + ΒΓ + ΕΓ + ΔΕ = $Π_2$.

Άρα $Π_1 > Π_2$.

Σολωμού 29 Αθήνα τηλ: 210 38 22 157 info@arnos.gr www.arnos.gr

Θέμα 3 - Κωδικοί:

11896, 12068

19. Θέμα 11896

Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος ισχύει ότι $A\Delta = B\Gamma$ και τα σημεία Ε, Ζ, Η και Θ είναι τα μέσα των ευθύγραμμων τμημάτων ΑΒ, ΑΓ, ΓΔ και ΒΔ αντίστοιχα.

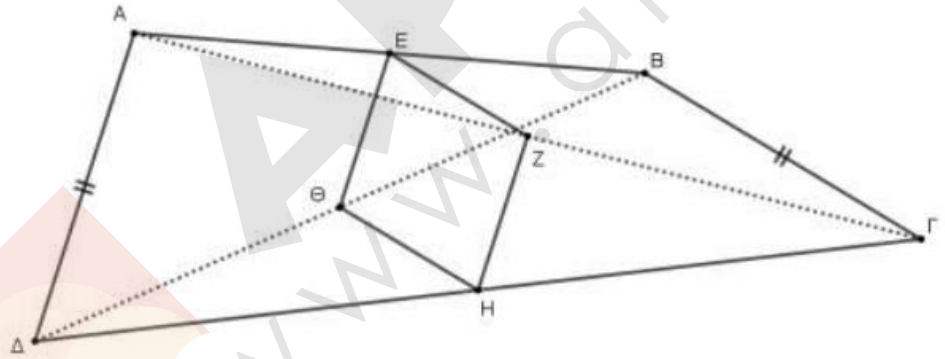
Να δείξετε ότι:

α. $EZ//=H\Theta$

Μονάδες 15

β. Το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι ρόμβος.

Μονάδες 10



ΛΥΣΗ

α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ, τα σημεία Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, άρα $EZ=//\frac{B\Gamma}{2}$ (1). Στο τρίγωνο ΒΓΔ, τα σημεία Θ και Η είναι τα μέσα των πλευρών ΒΔ και ΓΔ αντίστοιχα, άρα $\Theta H=//\frac{B\Gamma}{2}$ (2). Από (1) και (2) $EZ//=H\Theta$.

β) Από το ερώτημα (α) το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο αφού έχει δύο απέναντι πλευρές του (ΕΖ και ΘΗ) παράλληλες και ίσες.

Στο τρίγωνο ΑΓΔ, τα σημεία Ζ και Η είναι τα μέσα των πλευρών ΑΓ και ΓΔ αντίστοιχα, άρα $ZH =// \frac{A\Delta}{2}$ (3), αλλά από υπόθεση έχουμε $B\Gamma = A\Delta$ (4). Από (1) και (3), (4) είναι $EZ = ZH$, άρα το παραλληλόγραμμο ΕΖΗΘ είναι ρόμβος αφού έχει 2 διαδοχικές πλευρές του ίσες.

20. Θέμα 12068

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}$=90°) και Μ το μέσο της υποτείνουσας του ΒΓ. Από το Μ φέρουμε ΜΔ⊥ΑΒ και προεκτείνουμε κατά ίσο τμήμα ΔΖ.

α) Να αποδείξετε ότι:

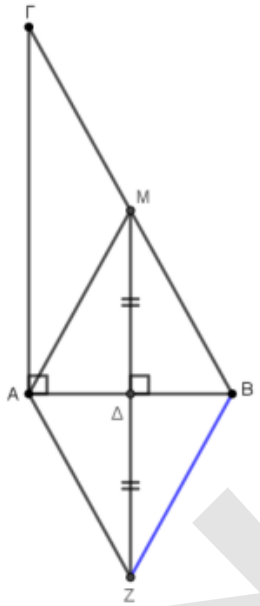
i. Το τρίγωνο ΜΒΖ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

ii. Το τετράπλευρο ΑΜΒΖ είναι ρόμβος. (Μονάδες 9)

β) Αν το αρχικό τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, τι είδους τετράπλευρο είναι το ΑΜΒΖ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

Έστω το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}$=90°) και Μ το μέσο της υποτείνουσάς του ΒΓ. Φέρουμε ΜΔ⊥ΑΒ και έστω ΔΖ=ΜΔ.

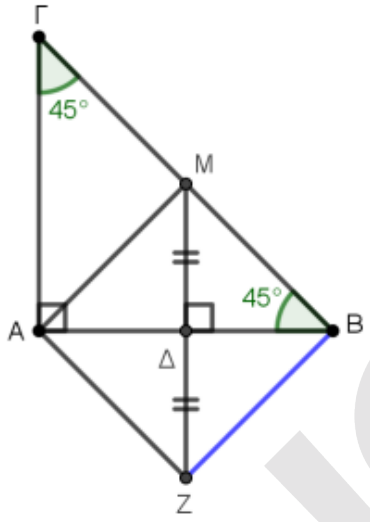


α)

i. Στο τρίγωνο ΜΒΖ επειδή ΜΔ=ΔΖ το τμήμα ΒΔ είναι διάμεσος της πλευράς ΜΖ και επιπλέον ΜΖ⊥ΑΒ από υπόθεση, άρα το τμήμα ΒΔ είναι και ύψος του. Επομένως το τρίγωνο ΜΒΖ είναι ισοσκελές.

ii. ΜΔ⊥ΑΒ (1) από υπόθεση και ΑΓ⊥ΑΒ αφού $\hat{A}$=90°, άρα ΜΔ//ΑΓ ως κάθετες στο ίδιο τμήμα ΑΒ. Στο τρίγωνο ΑΒΓ από το μέσο Μ της ΒΓ έχουμε ΜΔ//ΑΓ, άρα το σημείο Δ είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ. Στο τετράπλευρο ΑΜΒΖ οι διαγώνιές του διχοτομούνται αφού ισχύει επιπλέον ότι το Δ είναι μέσο και του τμήματος ΜΖ από κατασκευή. Άρα το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο και επειδή οι διαγώνιές του ΜΖ και ΑΒ είναι και κάθετες, τελικά το ΑΜΒΖ είναι ρόμβος.

β)



Αν το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι και ισοσκελές, τότε $\hat{B}=\hat{\Gamma}=45°$ (άθροισμα ίσων οξειών γωνιών ορθογωνίου τριγώνου). Στο ρόμβο ΑΜΒΖ γνωρίζουμε ότι οι διαγώνιοί του διχοτομούν τις γωνίες του, άρα οι γωνίες $A\hat{B}M=A\hat{B}Z=45°$. Οπότε $M\hat{B}Z=90°$ και ο ρόμβος ΑΜΒΖ έχει μία ορθή γωνία οπότε είναι και ορθογώνιο, άρα τελικά το ΑΜΒΖ είναι τετράγωνο.

Θέμα 4 - Κωδικοί:

1710, 1711, 1718, 1723, 1726, 1727, 1728, 1741, 1742, 1743, 1745, 1766

1773, 1775, 1781, 1787, 1790, 1791, 1794, 1797, 1798, 1801, 1802, 1803

1804, 1830, 1832, 1837, 1838, 1841, 1867, 1868, 1873, 1889, 1893, 1898

13519, 13743, 13745, 13751, 13838, 13856, 14882, 14885

21. Θέμα 1710

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και στο εσωτερικό του θεωρούμε τα σημεία Γ, Δ ώστε να ισχύει ΑΓ= ΓΔ= ΔΒ. Επίσης θεωρούμε σημείο Ο εκτός του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ έτσι ώστε να ισχύουν ΟΓ=ΑΓ και ΟΔ=ΔΒ.

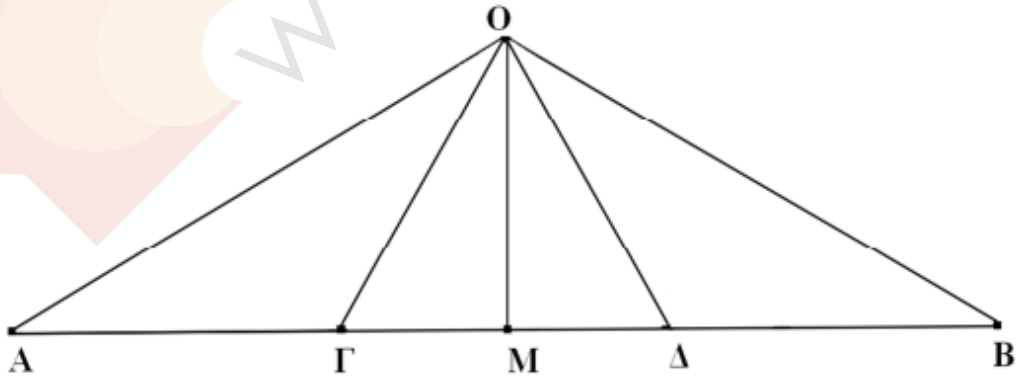
α) Να αποδείξετε ότι:

i. η γωνία $\Gamma\hat{O}\Delta$ είναι 60^0 (Μονάδες 9)

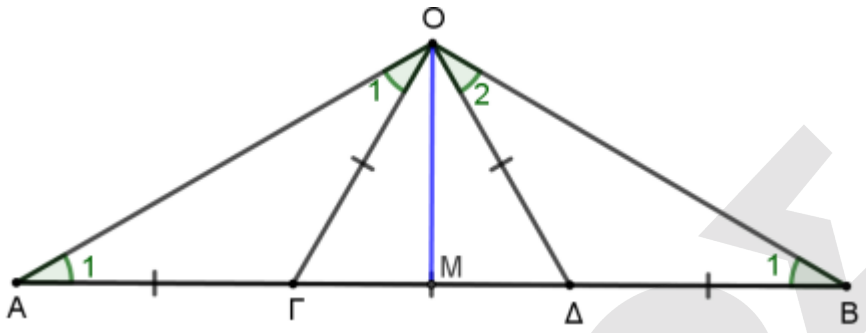
ii. οι γωνίες $O\hat{A}\Gamma$, $O\hat{B}\Delta$ είναι ίσες και κάθε μια ίση με 30^0. (Μονάδες 9)

β) Αν Μ το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ, να αποδείξετε ότι 2ΟΜ=ΟΑ.

(Μονάδες 7)



ΛΥΣΗ



α) i. Είναι ΑΓ = ΟΓ = ΓΔ και ΓΔ = ΔΒ = ΟΔ, οπότε ΟΓ = ΓΔ = ΟΔ. Άρα το τρίγωνο ΟΓΔ είναι ισόπλευρο και οι γωνίες του είναι ίσες με 60°. Άρα $\Gamma\hat{O}\Delta = 60^o$.

ii. Επειδή ΟΓ = ΑΓ, το τρίγωνο ΟΑΓ είναι ισοσκελές οπότε $\hat{A}_1 = \hat{O}_1$.

Η γωνία $O\hat{\Gamma}\Delta$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΟΓΑ, οπότε:

$O\hat{\Gamma}\Delta = \hat{A}_1 + \hat{O}_1 \Leftrightarrow 60^o = 2\,\hat{A}_1 \Leftrightarrow \hat{A}_1 = 30^o$.

Η γωνία ΟΔΒ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΟΓΑ, άρα:

$O\hat{\Delta}B = \hat{O}_2 + \hat{B}_1 \Leftrightarrow 60^o = 2\,\hat{B}_1 \Leftrightarrow \hat{B}_1 = 30^o$.

β) Είναι $\hat{A}_1 = \hat{B}_1 = 30^o$, άρα το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές. Η διάμεσος ΟΜ του ισοσκελούς τριγώνου ΟΑΒ είναι και ύψος του, δηλαδή ΟΜ⊥ΑΒ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΜΑ, είναι $\hat{A}_1 = 30^o$. Άρα για την απέναντι κάθετη πλευρά ΟΜ ισχύει:

$OM = \frac{OA}{2} \Leftrightarrow 2OM = OA$.

Σολωμού 29 Αθήνα τηλ: 210 38 22 157 info@arnos.gr www.arnos.gr

22. Θέμα 1711

Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) είναι ΓΔ= 2ΑΒ. Επίσης τα Ζ, Η, Ε είναι τα μέσα των ΑΔ, ΒΓ και ΔΓ αντίστοιχα. Ακόμη η ΖΗ τέμνει τις ΑΕ, ΒΕ στα σημεία Θ, Ι αντίστοιχα.

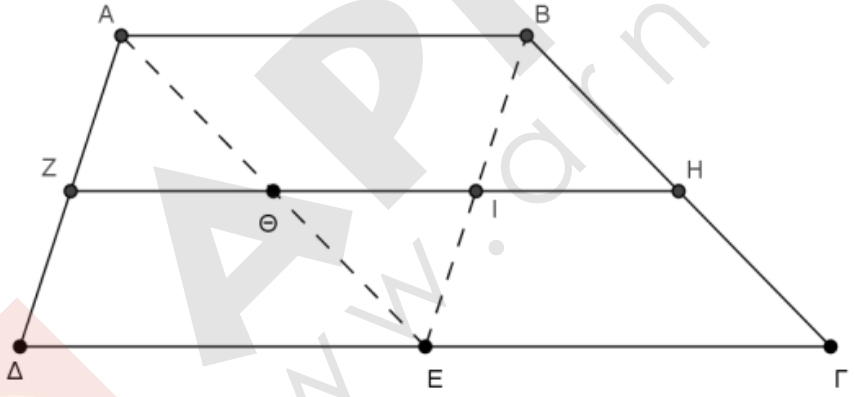
α) Να δείξετε ότι, το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι, τα σημεία Θ, Ι είναι μέσα των ΑΕ, ΒΕ αντίστοιχα.

(Μονάδες 5)

γ) Να δείξετε ότι ΖΗ = $\frac{3}{2}$ ΑΒ. (Μονάδες 10)



ΛΥΣΗ

α) Το σημείο Ε είναι μέσο της πλευράς ΔΓ, άρα ΓΕ = $\frac{ΓΔ}{2}$ ή ΓΔ=2ΓΕ. Από την υπόθεση έχουμε ότι ΓΔ=2ΑΒ, άρα ΓΕ=ΑΒ και επιπλέον είναι ΓΕ // ΑΒ επειδή το ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο. Επομένως το τετράπλευρο ΑΒΓΕ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

β) Η ΖΗ είναι διάμεσος του τραπεζίου ΑΒΓΔ αφού Ζ, Η τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών του ΑΔ και ΒΓ. Άρα ΖΗ // ΓΔ. Στο τρίγωνο ΑΔΕ, το Ζ είναι μέσο της ΑΔ και ΖΘ // ΔΕ, άρα το Θ είναι μέσο της ΑΕ. Στο τρίγωνο ΒΕΓ το Η είναι μέσο της ΒΓ και ΗΙ//ΕΓ, άρα το Ι είναι μέσο της ΒΕ.

γ) Επειδή η ΖΗ είναι διάμεσος του τραπεζίου, θα ισούται με το ημιάθροισμα των βάσεών του. Δηλαδή: ΖΗ = $\frac{AB+\Gamma\Delta}{2} = \frac{AB+2AB}{2} = \frac{3AB}{2} = \frac{3}{2}AB$.

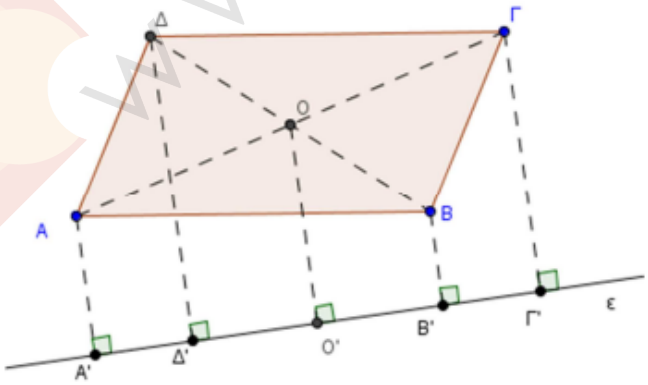
23. Θέμα 1718

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τις προβολές Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄ των κορυφών του Α, Β, Γ, Δ αντίστοιχα, σε μια ευθεία ε.

α) Αν η ευθεία ε αφήνει τις κορυφές του παραλληλογράμμου στο ίδιο ημιεπίπεδο και είναι ΑΑ΄=3, ΒΒ΄=2, ΓΓ΄=5, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι η απόσταση του κέντρου του παραλληλογράμμου από την ε είναι ίση με 4. (Μονάδες 8)

ii. Να βρείτε την απόσταση ΔΔ΄. (Μονάδες 9)



β) Αν η ευθεία ε διέρχεται από το κέντρο του παραλληλογράμμου και είναι παράλληλη προς δύο απέναντι πλευρές του, τι παρατηρείτε για τις αποστάσεις ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄, ΔΔ΄; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Είναι ΑΑ'//ΒΒ'//ΓΓ'//ΔΔ'//ΟΟ' ως κάθετα τμήματα στην ίδια ευθεία ε.

Η ευθεία ε δεν είναι παράλληλη στη διαγώνιο ΑΓ γιατί:

- Έστω ότι ε//ΑΓ

Τότε επειδή επιπλέον έχουμε ότι ΑΑ'//ΓΓ', το ΑΑ'Γ'Γ θα είναι παραλληλόγραμμο και επομένως ΑΑ'=ΓΓ' ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου. Όμως ΑΑ'=3 ≠ 5=ΓΓ' , άτοπο.

i. Από την παραλληλία ΑΑ΄ και ΓΓ΄ το ΑΑ΄Γ΄Γ είναι τραπέζιο με διάμεσο το ΟΟ΄.

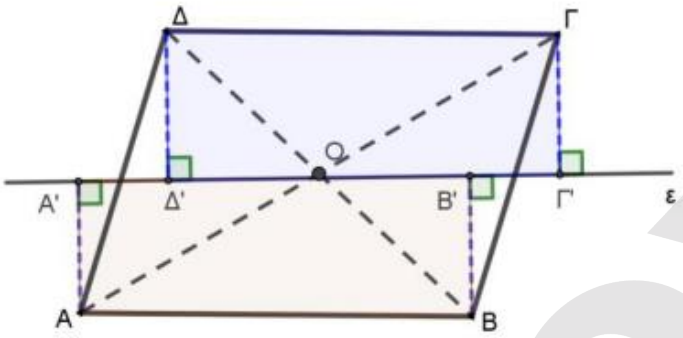
Άρα $OO' = \frac{AA'+\Gamma\Gamma'}{2} = \frac{3+5}{2} = 4$.

ii. Η ευθεία ε δεν είναι παράλληλη ούτε στη διαγώνιο ΒΔ, γιατί αν ήταν, τότε όπως προηγουμένως θα είχαμε ότι το ΒΟΟ'Β' είναι παραλληλόγραμμο, επομένως ΒΒ'=ΟΟ' , άτοπο γιατί ΒΒ'=2 ≠ 4=ΟΟ'.

Από την παραλληλία ΒΒ' και ΔΔ', το ΒΒΔΔ΄Δ είναι τραπέζιο με διάμεσο το ΟΟ'. Άρα

$OO' = \frac{BB'+\Delta\Delta'}{2} \Leftrightarrow 4 = \frac{2+\Delta\Delta'}{2} \Leftrightarrow 8 = 2 + \Delta\Delta' \Leftrightarrow \Delta\Delta' = 6.$

β)



Αν η ε είναι παράλληλη στις ΑΒ και ΓΔ και διέρχεται από το κέντρο Ο, τότε η ε θα είναι μεσοπαράλληλη των ΑΒ, ΓΔ. Οπότε τα τετράπλευρα ΑΑ΄Β΄Β και ΔΔ΄Γ΄Γ επειδή έχουν τις απέναντι πλευρές τους παράλληλες θα είναι παραλληλόγραμμα με μία ορθή γωνία οπότε είναι ορθογώνια.

Τα τρίγωνα ΟΑΑ΄ και ΟΓΓ΄ είναι ορθογώνια και έχουν ΟΑ=ΟΓ γιατί το Ο είναι το κέντρο του ΑΒΓΔ και $A\hat{O}A' = \Gamma\hat{O}\Gamma'$ ως κατακορυφήν γωνίες. Οπότε είναι ίσα γιατί έχουν υποτείνουσες ίσες και μία οξεία γωνία ίση. Άρα ΑΑ΄=ΓΓ΄ και επειδή ΑΑ΄=ΒΒ΄ και ΓΓ΄=ΔΔ΄ ως απέναντι πλευρές των ορθογωνίων ΑΑ΄Β΄Β και ΓΓ΄Δ΄Δ, συμπεραίνουμε ότι ΑΑ΄ = ΒΒ΄= ΓΓ΄= ΔΔ΄.

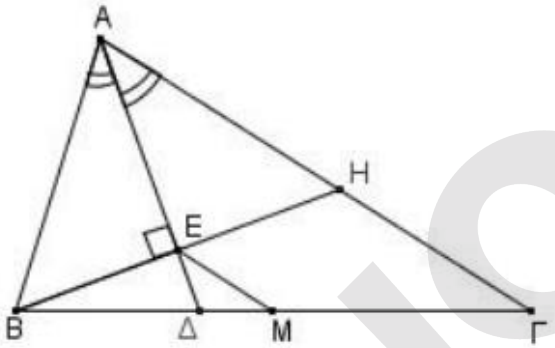
24. Θέμα 1723

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ < ΑΓ) και η διχοτόμος του ΑΔ. Φέρουμε από το Β κάθετη στην ΑΔ που τέμνει την ΑΔ στο Ε και την πλευρά ΑΓ στο Η. Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΒΗ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

β) ΕΜ//ΗΓ (Μονάδες 8)

γ) ΕΜ=(ΑΓ-ΑΒ)/2 (Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ

α) Στο τρίγωνο ΑΒΗ, το ΑΕ είναι ύψος (αφού ΒΕ⊥ΑΔ) και διχοτόμος. Άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές τις ΑΒ, ΑΗ.

β) Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΗ, το τμήμα ΑΕ θα είναι και διάμεσός του. Δηλαδή το Ε είναι μέσο του τμήματος ΒΗ. Στο τρίγωνο ΒΗΓ τα Ε, Μ είναι μέσα των πλευρών ΒΗ και ΒΓ, άρα ΕΜ // ΗΓ.

γ) Για το τμήμα ΕΜ που ενώνει τα μέσα των ΒΗ και ΒΓ ισχύει επίσης ότι: ΕΜ = $\frac{ΗΓ}{2} = \frac{ΑΓ-ΑΗ}{2} = \frac{ΑΓ-ΑΒ}{2}$, αφού ΑΒ=ΑΗ από α) ερώτημα.

25. Θέμα 1726

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τα μέσα πλευρών ισοσκελούς τριγώνου είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

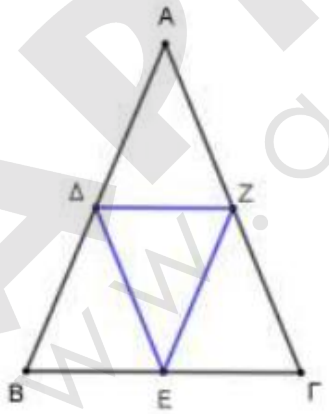
β) Να διατυπώσετε και να αποδείξετε ανάλογη πρόταση για

i. ισόπλευρο τρίγωνο. (Μονάδες 8)

ii. ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α)



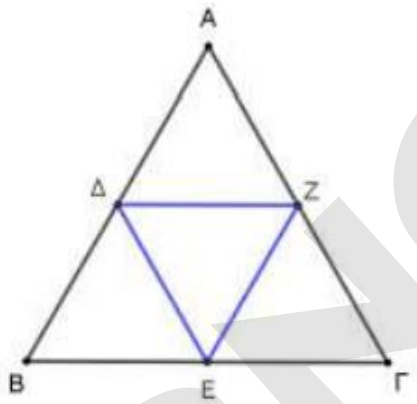
Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και Δ, Ε, Ζ τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα.

Το ΔΕ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, άρα ΔΕ = $\frac{ΑΓ}{2}$ (1)

Το ΕΖ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, άρα ΕΖ = $\frac{ΑΒ}{2}$ (2)

Επειδή ΑΒ=ΑΓ από (1) και (2) προκύπτει ότι ΔΕ=ΕΖ, δηλαδή το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισοσκελές.

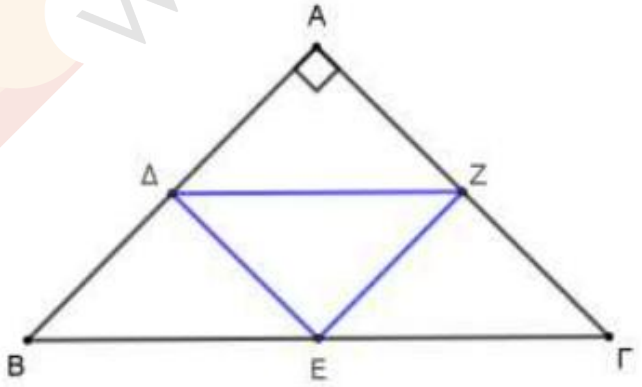
β) i. Πρόταση: «Το τρίγωνο με κορυφές τα μέσα των πλευρών ισόπλευρου τριγώνου είναι ισόπλευρο».



Επειδή το ΔΖ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, ισχύει ότι $ΔΖ = \frac{ΒΓ}{2}$ (3)

Επειδή ΑΒ=ΒΓ=ΑΓ από (1), (2) και (3) προκύπτει ότι ΔΕ=ΕΖ=ΖΔ, οπότε το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισόπλευρο.

ii. Πρόταση: «Το τρίγωνο με κορυφές τα μέσα των πλευρών ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου είναι ορθογώνιο και ισοσκελές».



Έστω ότι $\hat{A}$ = 90°, και Δ, Ε, Ζ τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα. Επειδή ΔΕ//ΑΓ, ΖΕ//ΑΒ (ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν τα μέσα 2 πλευρών ενός τριγώνου) και ΑΒ ⊥ ΑΓ θα είναι και ΔΕ ⊥ ΖΕ, άρα το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ορθογώνιο με $\hat{E}$ = 90°. Επειδή ΖΕ = $\frac{AB}{2}$, ΔΕ = $\frac{BΓ}{2}$ και ΑΒ=ΑΓ θα είναι και ΖΕ=ΔΕ. Άρα το τρίγωνο ΔΕΖ είναι και ισοσκελές.

26. Θέμα 1727

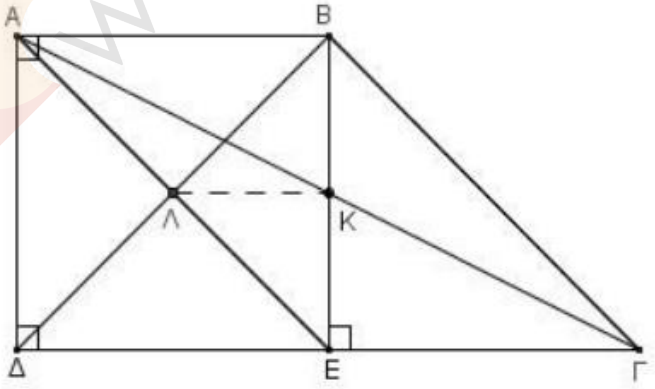
Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{A} = \hat{\Delta}$ =90°, ΔΓ=2ΑΒ και $\hat{B} = 3\hat{\Gamma}$. Από το Β φέρνουμε κάθετη στη ΓΔ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Κ και την ΓΔ στο Ε. Επίσης φέρνουμε την ΑΕ που τέμνει τη ΒΔ στο σημείο Λ.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{\Gamma}$ =45° (Μονάδες 8)

β) ΒΔ=ΑΕ (Μονάδες 9)

γ) ΚΛ= $\frac{1}{4}$ ΔΓ. (Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ

α) Οι γωνίες $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΒΓ, άρα είναι παραπληρωματικές. Οπότε

$\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow 3\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow 4\hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 45^o$

β) Το τετράπλευρο ΑΒΕΔ έχει τρείς γωνίες ορθές, τις $\hat{A}$, $\hat{\Delta}$ από την υπόθεση και την $\Delta\hat{E}B$ αφού η ΒΕ είναι κάθετη στην ΓΔ από κατασκευή, επομένως είναι ορθογώνιο. Οι ΑΕ, ΒΔ είναι διαγώνιοι του ορθογωνίου, οπότε είναι ίσες.

γ) Για τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου ΒΕΓ ισχύει:

$E\hat{B}\Gamma + \hat{\Gamma} = 90^o \Leftrightarrow E\hat{B}\Gamma + 45^o = 90^o \Leftrightarrow E\hat{B}\Gamma = 45^o$. Επομένως το τρίγωνο ΒΕΓ έχει δύο γωνίες ίσες, τις $\hat{\Gamma}$ και $E\hat{B}\Gamma$, άρα είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές τις ΒΕ και ΕΓ.

Επίσης από το ορθογώνιο ΑΒΕΔ έχουμε ότι ΑΒ = ΔΕ και επειδή από τα δεδομένα έχουμε ότι 2ΑΒ=ΓΔ, συμπεραίνουμε ότι $\Delta E = \frac{1}{2}\Gamma\Delta$. Δηλαδή το σημείο Ε είναι μέσο της πλευράς ΓΔ. Οπότε ΑΒ=ΔΕ=ΕΓ. Τότε όμως το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο αφού ΑΒ=//ΕΓ και Κ το σημείο τομής των διαγωνίων του. Στο τρίγωνο ΑΕΓ το ΛΚ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΕ και ΑΓ, άρα $K\Lambda = \frac{1}{2}E\Gamma = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\Gamma\Delta\right) = \frac{1}{4}\Delta\Gamma$.

27. Θέμα 1728

Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Αν τα σημεία Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι :

α) Το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

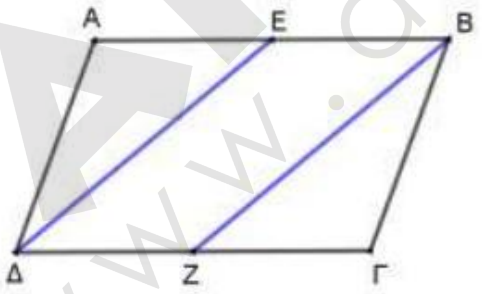
β) $A\hat{E}\Delta = B\hat{Z}\Gamma$ (Μονάδες 8)

γ) Οι ΔΕ και ΒΖ τριχοτομούν τη διαγώνιο ΑΓ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

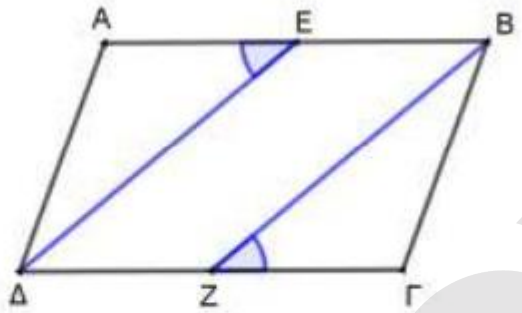
Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ε, Ζ τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΓΔ αντίστοιχα.

α)



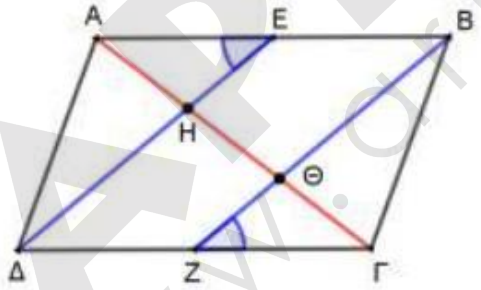
Είναι $\Delta Z = \frac{\Delta\Gamma}{2} = \frac{AB}{2} = EB$ και ΔΖ // ΕΒ αφού ΑΒ // ΔΓ. Άρα το ΔΕΒΖ έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

β)



Είναι $B\hat{E}\Delta = B\hat{Z}\Delta$ ως απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου ΔΕΒΖ, οπότε και $A\hat{E}\Delta = B\hat{Z}\Gamma$ ως εφεξής και παραπληρωματικές των γωνιών $B\hat{E}\Delta$ και $B\hat{Z}\Delta$.

γ)



Έστω Η και Θ τα σημεία τομής της ΑΓ με την ΔΕ και ΒΖ αντίστοιχα. Στο τρίγωνο ΑΒΘ το Ε είναι μέσο της ΑΒ και η ΕΗ // ΒΘ ως τμήματα των απέναντι πλευρών του παραλληλογράμμου ΔΕΒΖ, άρα το Η είναι μέσο του ΑΘ. Δηλαδή ΑΗ=ΗΘ (1). Στο τρίγωνο ΔΓΗ το Ζ είναι μέσο της ΓΔ και η ΖΘ//ΔΗ ως τμήματα των απέναντι πλευρών του παραλληλογράμμου ΔΕΒΖ, άρα το Θ είναι μέσο του ΓΗ. Δηλαδή ΗΘ=ΘΓ (2). Από τις σχέσεις (1), (2) συμπεραίνουμε ότι η ΑΗ=ΗΘ=ΘΓ, δηλαδή οι ΔΕ και ΒΖ τριχοτομούν της ΑΓ.

Σολωμού 29 Αθήνα τηλ: 210 38 22 157 info@arnos.gr www.arnos.gr

28. Θέμα 1741

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Κ, Λ τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

α) Θεωρούμε τυχαίο σημείο **Μ στο εσωτερικό του τριγώνου** και Δ, Ε τα συμμετρικά του Μ ως προς Κ και Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΔΕ//ΒΓ.

(Μονάδες 15)

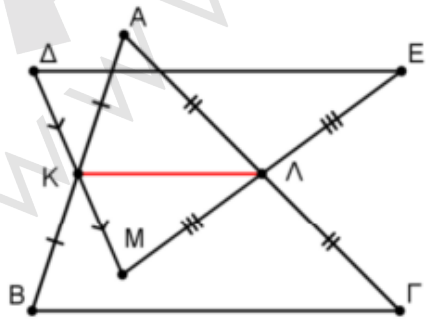
β) Στην περίπτωση που **το σημείο Μ είναι το μέσο** της πλευράς ΒΓ, και Δ, Ε τα συμμετρικά του Μ ως προς Κ και Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ, Α και Ε είναι συνευθειακά. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ, το ΚΛ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ άρα ΚΛ // ΒΓ (1)

Επειδή ΚΜ=ΚΔ και ΛΜ=ΛΕ, στο τρίγωνο ΜΔΕ το ΚΛ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΜΔ και ΜΕ άρα ΚΛ // ΔΕ (2)

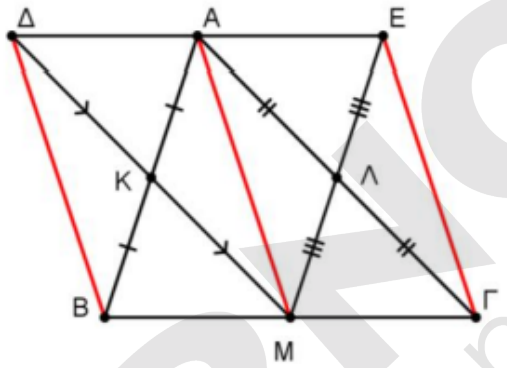
Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι ΔΕ // ΒΓ.



β) Στο τετράπλευρο ΑΕΓΜ οι διαγώνιοι ΑΓ και ΜΕ διχοτομούνται, άρα το ΑΕΓΜ είναι παραλληλόγραμμο. Επομένως ΑΕ // ΜΓ οπότε και ΑΕ // ΒΓ (3).

Όμοια οι διαγώνιοι ΑΒ και ΔΜ του ΔΑΜΒ διχοτομούνται, οπότε το ΔΑΜΒ είναι παραλληλόγραμμο. Άρα ΔΑ // ΒΜ οπότε και ΔΑ // ΒΓ (4)

Από τις (3), (4) προκύπτει ότι οι ΑΕ και ΔΑ είναι παράλληλες στην ίδια ευθεία. Και επειδή έχουν κοινό σημείο το Α, οι ευθείες ΑΕ και ΑΔ ταυτίζονται. Άρα τα Δ, Α, Ε είναι συνευθειακά.



29. Θέμα 1742

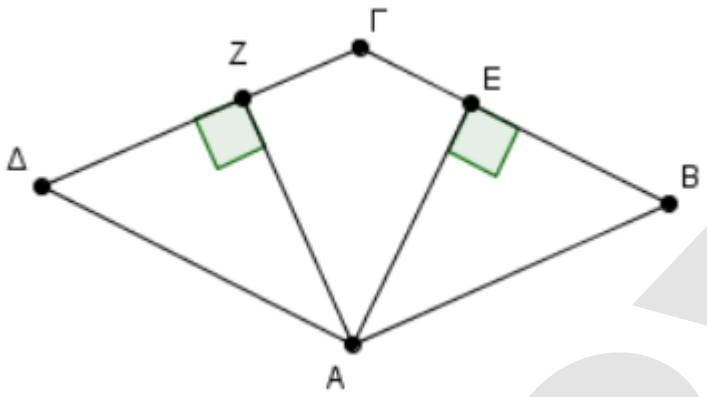
Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος είναι ρόμβος. Θεωρούμε $AZ \perp \Gamma\Delta$ και $AE \perp \Gamma B$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΖΑΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

β) Η ευθεία ΑΓ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΖΕ. (Μονάδες 9)

γ) Αν Μ και Ν τα μέσα των πλευρών ΑΔ και ΑΒ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ΜΝ//ΖΕ και ΖΜ=ΕΝ. (Μονάδες 10)

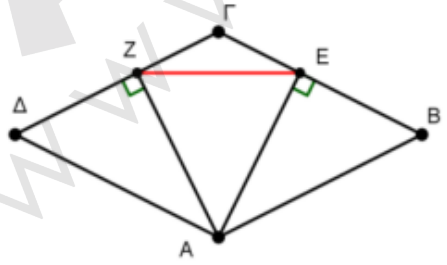


ΛΥΣΗ

α) Τα τρίγωνα ΑΖΔ και ΑΕΒ είναι ορθογώνια και έχουν:

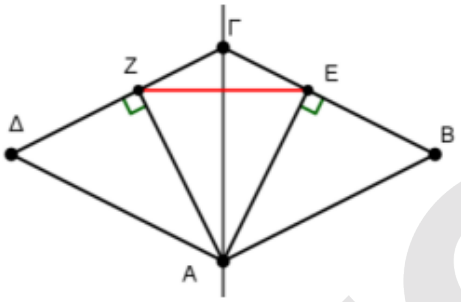
- ΑΒ = ΑΔ, διότι είναι πλευρές του ρόμβου
- $\widehat{B} = \widehat{\Delta}$, ως απέναντι γωνίες του ρόμβου.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα (έχουν την υποτείνουσα και μία οξεία γωνία ίσες μία προς μία). Οπότε και οι αντίστοιχες πλευρές τους ΑΖ και ΑΕ θα είναι ίσες, δηλ. ΑΖ = ΑΕ. Επομένως, το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισοσκελές.

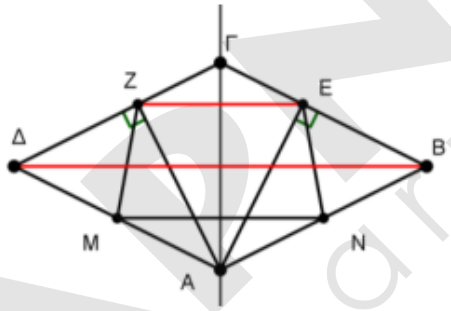


β) Επειδή τα τρίγωνα ΑΖΔ και ΑΕΒ είναι ίσα, έχουμε ΖΔ=ΒΕ. Και αφού ΓΔ=ΓΒ (πλευρές ρόμβου), θα έχουμε και ΓΔ–ΖΔ=ΓΒ–ΒΕ, δηλαδή ΓΖ=ΓΕ.

Οπότε, το Γ ισαπέχει από τα άκρα του ΖΕ. Ομοίως, από το προηγούμενο ερώτημα, το Α ισαπέχει από τα άκρα του ΖΕ. Οπότε, τα Α και Γ θα ανήκουν στη μεσκάθετο του ΖΕ. Άρα, η ΑΓ είναι η μεσοκάθετος του ΖΕ



γ) Το ΜΝ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΔΒ, άρα ΜΝ // ΒΔ (3).



Επίσης:

- ΑΓ ⊥ ΒΔ, ως διαγώνιες του ρόμβου
- ΖΕ ⊥ ΑΓ, από το ερώτημα β

Επομένως ΖΕ // ΔΒ (4).

30. Θέμα 1743

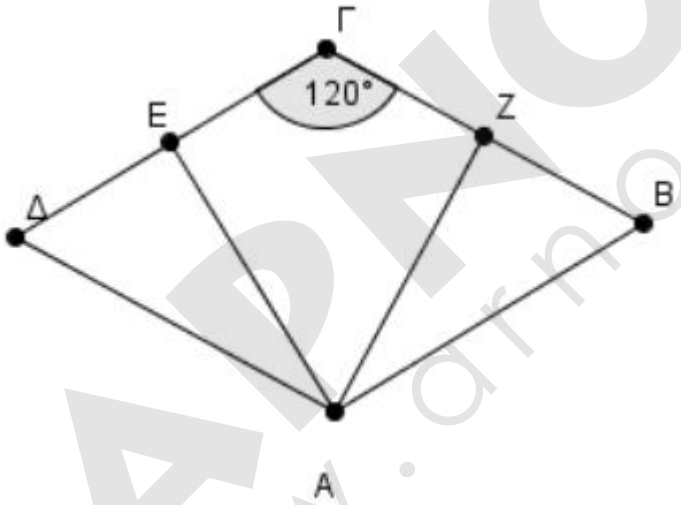
Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με $\hat{\Gamma} = 120^0$. Έστω ότι ΑΕ και ΑΖ είναι οι αποστάσεις του σημείου Α στις πλευρές ΓΔ και ΓΒ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα σημεία Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΓΔ και ΓΒ αντίστοιχα. (Μονάδες 8)

ii. $A\Gamma \perp EZ$. (Μονάδες 8)

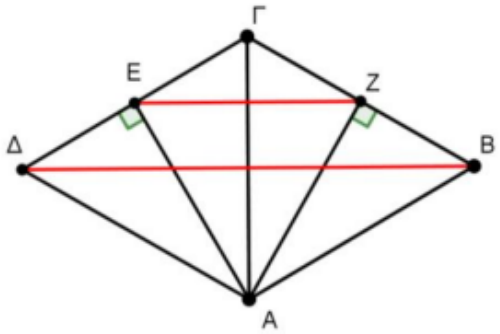
β) Αν Μ και Ν τα μέσα των πλευρών ΑΔ και ΑΒ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΜΝΖ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)



ΛΥΣΗ

α) i. Επειδή οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του, είναι $E\hat{\Gamma}A = A\hat{\Gamma}Z = 60^o$. Τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΑΒΓ είναι ισοσκελή και έχουν μια γωνία 60°, άρα είναι ισόπλευρα.

Τα ύψη ΑΕ, ΑΖ στα ισόπλευρα τρίγωνα είναι και διάμεσοί του, οπότε τα σημεία Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΓΔ και ΓΒ αντίστοιχα.

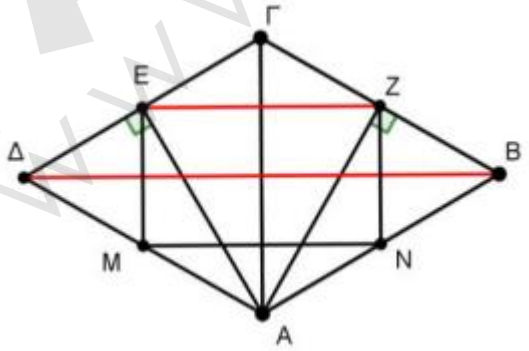


ii. Επειδή το ΕΖ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΓΔ και ΓΒ του τριγώνου ΓΔΒ, θα είναι παράλληλο στην τρίτη πλευρά του τριγώνου, δηλαδή ΕΖ // ΒΔ. Και αφού ΑΓ⊥ΒΔ (οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται κάθετα) θα είναι και ΑΓ ⊥ ΕΖ.

β) Το ΜΝ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΔ, άρα ΜΝ // = $\frac{ΔΒ}{2}$ (1).

Επίσης, στο τρίγωνο ΒΓΔ, είναι ΕΖ // = $\frac{ΔΒ}{2}$ (2). Από τις (1), (2) προκύπτει ότι ΕΖ // = ΜΝ άρα το ΕΜΝΖ είναι παραλληλόγραμμο.

Στο τρίγωνο ΑΒΓ, το ΖΝ ενώνει τα μέσα των ΒΓ και ΒΑ άρα ΖΝ // ΑΓ. Επίσης ΕΖ ⊥ ΑΓ οπότε ΖΝ ⊥ ΕΖ, δηλαδή $E\hat{Z}N = 90^o$. Άρα το παραλληλόγραμμο ΕΜΝΖ είναι ορθογώνιο.



31. Θέμα 1745

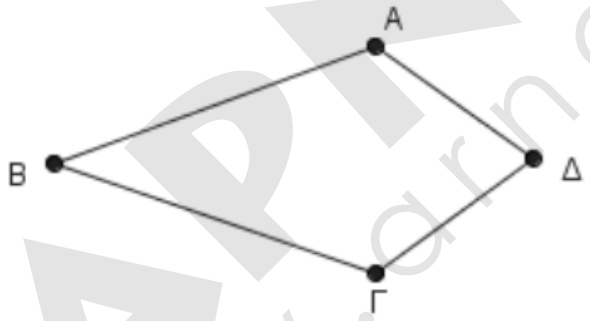
Δίνεται κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $BA = B\Gamma$ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$.

Να αποδείξτε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

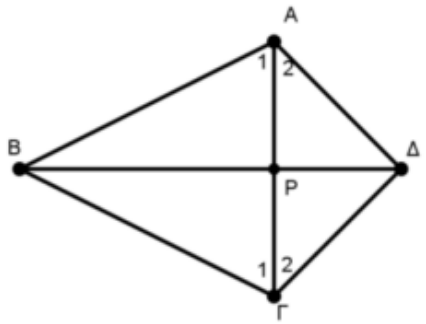
β) Οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ τέμνονται κάθετα. (Μονάδες 6)

γ) Το τετράπλευρο που έχει για κορυφές τα μέσα των πλευρών του ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 10)



ΛΥΣΗ

α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ΒΑ = ΒΓ οπότε είναι ισοσκελές. Άρα $\widehat{A}_1 = \widehat{\Gamma}_1$. Από υπόθεση είναι $\widehat{A} = \widehat{\Gamma}$, οπότε θα είναι και $\widehat{A}_2 = \widehat{\Gamma}_2$ ως διαφορά ίσων γωνιών. Συνεπώς το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές.



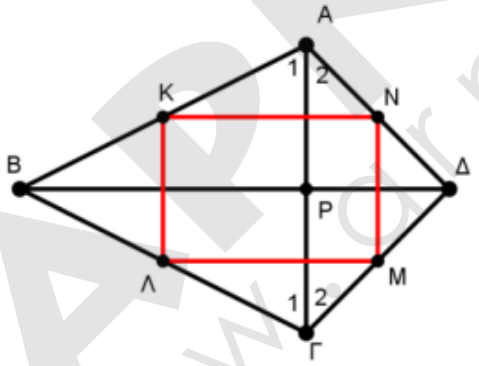
Έξυπνα & εύκολα!

β) Ονομάζουμε Ρ το σημείο τομής των ΑΓ και ΒΔ.

Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΓΒΔ έχουν:

- ΑΔ = ΔΓ, από το ερώτημα α
- ΒΔ, κοινή πλευρά
- ΑΒ = ΒΓ, από υπόθεση

Σύμφωνα με το κριτήριο Π – Π – Π τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΓΒΔ είναι ίσα οπότε έχουν ίσες και τις γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ΑΔ = ΔΓ , δηλαδή θα είναι $A\hat{B}\Delta = \Gamma\hat{B}\Delta$. Άρα στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ η ΒΡ είναι διχοτόμος, οπότε είναι και ύψος. Ισχύει δηλαδή $A\hat{O}B = 90^o$, οπότε ΒΔ ⊥ ΑΓ.



γ) Ονομάζουμε Κ, Λ, Μ, Ν τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντιστοίχως.

Στο τρίγωνο ΑΒΔ το ΚΝ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΓΔ και ΔΑ αντίστοιχα. Άρα ΚΝ // = $\frac{B\Delta}{2}$ (1).

Όμοια, στο τρίγωνο ΓΒΔ είναι ΛΜ // = $\frac{B\Delta}{2}$ (2).

Από (1), (2) συμπεραίνουμε ότι ΚΝ // = ΛΜ, οπότε το ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο.

Στο τρίγωνο ΑΒΓ το ΚΛ ενώνει τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ άρα ΚΛ // ΑΓ (3)

Επειδή ΑΓ ⊥ ΒΔ, από τις (1), (3) συμπεραίνουμε ότι ΚΛ ⊥ ΚΝ, δηλαδή $N\hat{K}\Lambda = 90^o$. Άρα το παραλληλόγραμμο ΚΛΜΝ έχει μία ορθή γωνία, άρα είναι ορθογώνιο.

32. Θέμα 1766

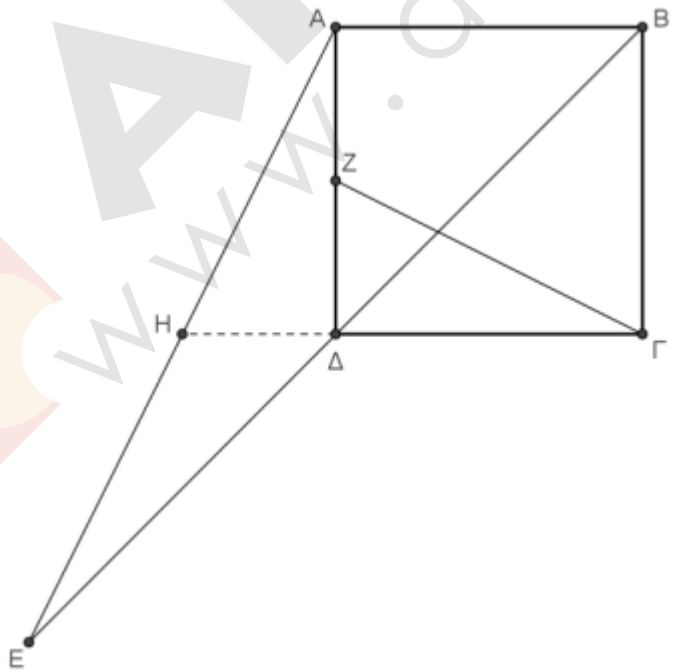
Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Έστω Ε το συμμετρικό σημείο του Β ως προς το Δ και Ζ είναι το μέσο της ΑΔ. Η προέκταση της ΓΔ τέμνει την ΑΕ στο Η.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta H = \frac{AB}{2}$ (Μονάδες 8)

β) Τα τρίγωνα ΑΔΗ και ΖΔΓ είναι ίσα. (Μονάδες 9)

γ) Η ΓΖ είναι κάθετη στην ΑΕ. (Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ

α) Στο τρίγωνο ΑΒΕ ισχύει ότι το Δ είναι μέσο του ΒΕ και ΔΗ // ΑΒ, άρα το Η είναι μέσο της πλευράς ΑΕ οπότε ισχύει ότι ΔΗ = $\frac{AB}{2}$.

β) Τα τρίγωνα ΑΔΗ και ΖΔΓ είναι ορθογώνια και έχουν:

- ΔΗ = ΔΖ, ως μισά των ίσων πλευρών ΑΒ και ΑΔ αντίστοιχα
- ΑΔ = ΔΓ, ως πλευρές του τετραγώνου.

Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΗ και ΖΔΓ έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία, οπότε είναι ίσα.

γ) Έστω ότι η προέκταση της ΓΖ τέμνει την ΑΗ στο Κ. Είναι

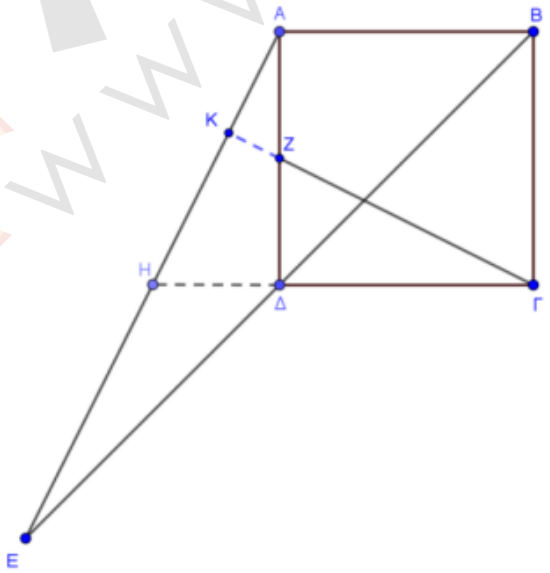
$K\hat{Z}A = \Delta\hat{Z}\Gamma$ ως κατακορυφήν και

$K\hat{A}Z = \Delta\hat{\Gamma}Z$, από τα ίσα τρίγωνα ΑΗΔ και ΔΖΒ.

Στο τρίγωνο ΑΚΖ έχουμε:

$K\hat{Z}A + K\hat{A}Z = \Delta\hat{Z}\Gamma + \Delta\hat{\Gamma}Z = 90^o$

Άρα το τρίγωνο ΑΚΖ είναι ορθογώνιο στο Κ, δηλαδή ΓΖ ⊥ ΑΕ.



33. Θέμα 1773

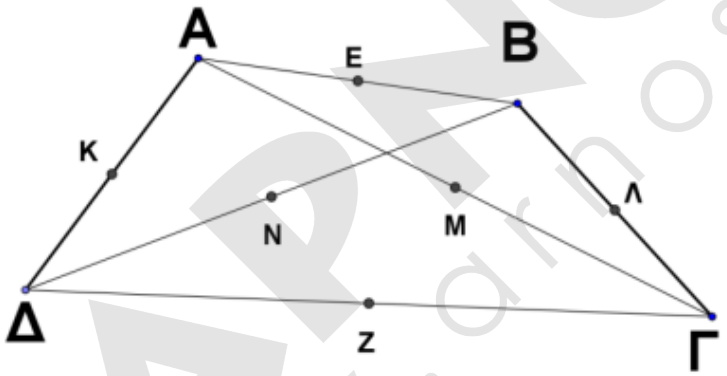
Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με ΑΔ=ΒΓ. Αν Ε,Λ,Ζ,Κ,Ν,Μ είναι τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, ΔΒ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΕΜΖΝ ρόμβος. (Μονάδες 8)

β) Η ΕΖ είναι μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος ΜΝ. (Μονάδες 7)

γ) ΚΕ=ΖΛ (Μονάδες 5)

δ) Τα ευθύγραμμα τμήματα ΚΛ, ΜΝ, ΕΖ διέρχονται από ίδιο σημείο. (Μονάδες 5)



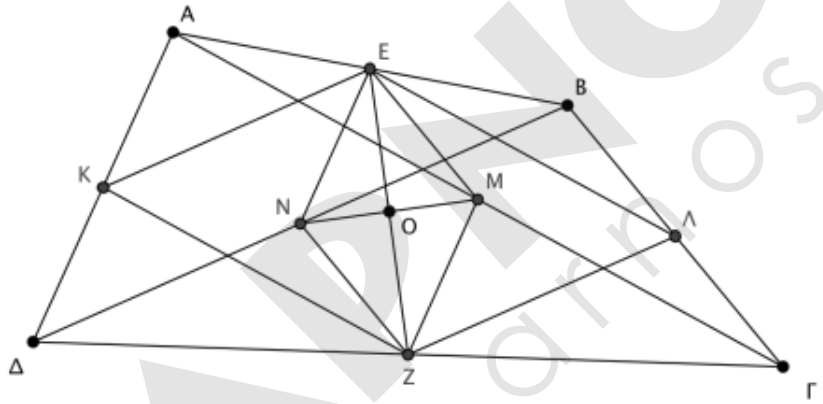
ΛΥΣΗ

α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα σημεία Ε και Μ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα οπότε: ΕΜ // ΒΓ και ΕΜ = $\frac{ΒΓ}{2}$.

Στο τρίγωνο ΔΒΓ τα σημεία Ν και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΔΒ και ΔΓ αντίστοιχα οπότε: ΝΖ // ΒΓ και ΝΖ = $\frac{ΒΓ}{2}$. Άρα ΕΜ // ΝΖ και ΕΜ = ΝΖ.

Οπότε το τετράπλευρο ΕΜΖΝ έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες, άρα είναι παραλληλόγραμμο. Επίσης, στο τρίγωνο ΓΑΔ τα σημεία Μ και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΓΑ και ΓΔ αντίστοιχα οπότε: ΜΖ = $\frac{ΑΔ}{2}$ και επειδή ΑΔ = ΒΓ από υπόθεση είναι: ΜΖ = $\frac{ΒΓ}{2}$ = ΝΖ

Άρα το παραλληλόγραμμο ΕΜΖΝ έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες άρα είναι ρόμβος.



β) Επειδή το ΕΜΖΝ είναι ρόμβος, οι διαγώνιοι του είναι κάθετες, άρα ΕΖ ⊥ ΜΝ και διχοτομούνται δηλαδή η ΕΖ διέρχεται από το μέσον της ΜΝ. Επομένως ΕΖ μεσοκάθετος της ΜΝ.

γ) Στο τρίγωνο ΑΔΒ τα σημεία Κ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΔ και ΑΒ αντίστοιχα, οπότε: ΚΕ = $\frac{ΔΒ}{2}$ (και ΚΕ // ΔΒ).

Στο τρίγωνο ΓΔΒ τα σημεία Ζ και Λ είναι τα μέσα των πλευρών ΓΔ και ΓΒ αντίστοιχα οπότε: ΖΛ = $\frac{ΔΒ}{2}$ (και ΖΛ // ΔΒ). Επομένως ΚΕ = ΖΛ.

δ) Επειδή ΚΕ // ΔΒ και ΖΛ // ΔΒ προκύπτει ότι ΚΕ // ΖΛ, και ισχύει ότι ΚΕ = ΖΛ άρα το τετράπλευρο ΕΚΖΛ είναι παραλληλόγραμμο. Οι ΕΖ, ΚΛ είναι διαγώνιοι του παραλληλογράμου ΕΚΖΛ που διχοτομούνται στο μέσο Ο του ΕΖ. Οι ΕΖ, ΜΝ είναι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου ΕΜΖΝ, οπότε διχοτομούνται επίσης στο μέσο Ο του ΕΖ. Άρα τα ΚΛ, ΜΝ, και ΕΖ διέρχονται από το ίδιο σημείο (το μέσο Ο του ΕΖ).

34. Θέμα 1775

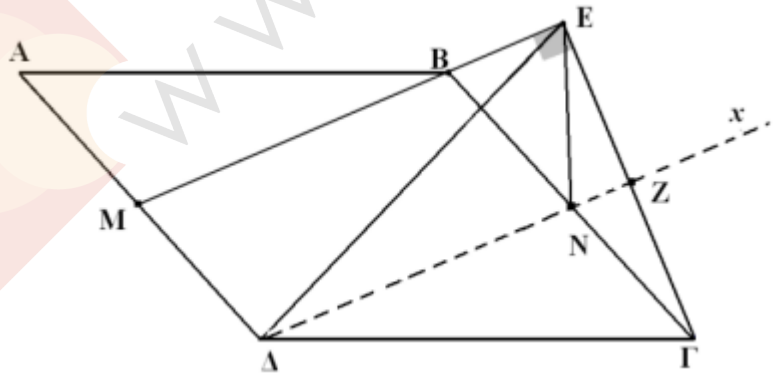
Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Θεωρούμε το μέσο Μ της πλευράς ΑΔ και ΓΕ κάθετος από τη κορυφή Γ στην ευθεία ΜΒ (ΓΕ ⊥ ΜΒ) . Η παράλληλη από την κορυφή Δ στην ευθεία ΜΒ (Δx // ΜΒ) τέμνει τις ΒΓ και ΓΕ στα σημεία Ν , Ζ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΜΒΝΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)

β) Το σημείο Ζ είναι μέσον του ευθυγράμμου τμήματος ΓΕ. (Μονάδες 9)

γ) ΔΕ=ΔΓ. (Μονάδες 9)



ΛΥΣΗ

α) Επειδή ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο είναι ΑΔ // ΒΓ άρα και ΜΔ // ΒΝ. Από υπόθεση είναι ΔΝ // ΜΒ, άρα το τετράπλευρο ΜΒΝΔ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες και συνεπώς είναι παραλληλόγραμμο.

β) Επειδή ΜΒΝΔ είναι παραλληλόγραμμο ισχύει ότι ΒΝ = ΜΔ (1). Το Μ είναι μέσο του ΑΔ άρα ΜΔ = $\frac{ΑΔ}{2}$ (2). Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο συνεπώς ΑΔ = ΒΓ (3). Από (1), (2) και (3) προκύπτει ΒΝ = $\frac{ΒΓ}{2}$. Άρα το Ν είναι μέσο του τμήματος ΒΓ.

Στο τρίγωνο ΒΕΓ, το Ν είναι μέσο του ΒΓ και η ΝΖ είναι παράλληλη στη ΒΕ, άρα το Ζ είναι μέσο του ΕΓ.

γ) Επειδή ΔΖ // ΜΕ και ΜΕ ⊥ ΓΕ θα είναι και ΔΖ ⊥ ΓΕ δηλαδή το ΔΖ είναι ύψος του τριγώνου ΔΕΖ. Το Ζ είναι μέσο του ΕΓ άρα η ΔΖ είναι και διάμεσος του τριγώνου ΔΕΖ. Οπότε το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ισοσκελές με ΔΕ = ΔΓ.

35. Θέμα 1781

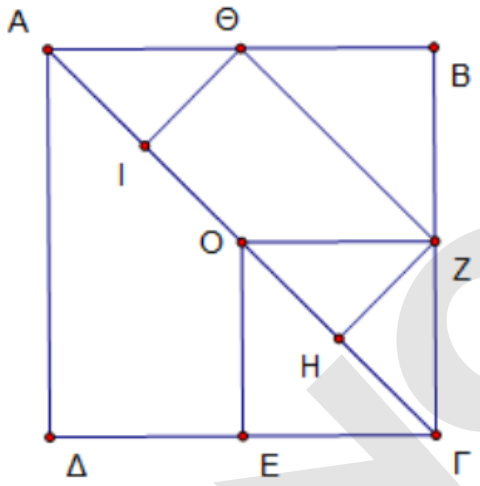
Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΔ. Στη διαγώνιο ΑΓ θεωρούμε σημεία Ι, Ο, Η ώστε $ΑΙ = ΙΟ = ΟΗ = ΗΓ$. Αν Ε, Θ και Ζ τα μέσα των πλευρών ΔΓ, ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΟΖΓΕ είναι τετράγωνο. (Μονάδες 7)

β) $ΖΗ = \frac{ΑΓ}{4}$. (Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο ΙΘΖΗ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, με $\Theta Z = 2\Theta I$.

(Μονάδες 10)



α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ το ΟΖ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΓ και ΒΓ οπότε ΟΖ // ΑΒ. Επειδή ΑΒ ⊥ ΒΓ θα είναι και ΟΖ ⊥ ΒΓ.

Στο τρίγωνο ΑΓΔ το ΟΕ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΓ και ΓΔ οπότε ΟΕ // ΑΔ. Επειδή ΑΔ ⊥ ΔΓ θα είναι και ΟΕ ⊥ ΔΓ.

Άρα το τετράπλευρο ΟΖΓΕ έχει τρεις γωνίες ορθές ($\hat{Z} = \hat{\Gamma} = \hat{E} = 90^0$) οπότε είναι ορθογώνιο. Επιπλέον ισχύει $ΓΕ = \frac{ΓΔ}{2} = \frac{ΑΒ}{2} = ΓΖ$ οπότε το ορθογώνιο ΟΖΓΕ έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες και συνεπώς είναι τετράγωνο.

β) Η ΖΗ είναι διάμεσος στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΖΓ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ΟΓ, άρα $ΖΗ = \frac{ΟΓ}{2} = \frac{\frac{ΑΓ}{2}}{2} = \frac{ΑΓ}{4}$.

Σολωμού 29 Αθήνα τηλ: 210 38 22 157 info@arnos.gr www.arnos.gr

γ) Το ΘΖ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΒΓ στο τρίγωνο ΑΒΓ οπότε είναι:

ΘΖ // ΑΓ άρα και ΘΖ // ΗΙ (1).

Ισχύει ακόμη ότι: ΘΖ = $\frac{ΑΓ}{2}$ = ΗΙ (2) διότι ΗΙ = ΗΟ + ΟΙ = $\frac{ΑΓ}{4} + \frac{ΑΓ}{4} = \frac{ΑΓ}{2}$.

Το τετράπλευρο ΙΘΖΗ έχει τις απέναντι πλευρές του ΘΖ και ΗΙ ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΟΖΓ, η ΖΗ είναι διάμεσος, οπότε είναι και ύψος, δηλαδή $Z\hat{H}O = 90^o$. Επειδή το παραλληλόγραμμο ΙΘΖΗ έχει μία ορθή γωνία, είναι ορθογώνιο.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΖΓ ($\hat{Z} = 90^0$) η ΖΗ είναι διάμεσος άρα ΖΗ = $\frac{ΟΓ}{2} = \frac{ΑΓ}{4}$. Οπότε σύμφωνα με τη (2) προκύπτει ΘΖ = 2ΖΗ. Το τετράπλευρο ΘΖΗΙ είναι παραλληλόγραμμο οπότε ΖΗ = ΘΙ. Συνεπώς ΘΖ = 2ΘΙ.

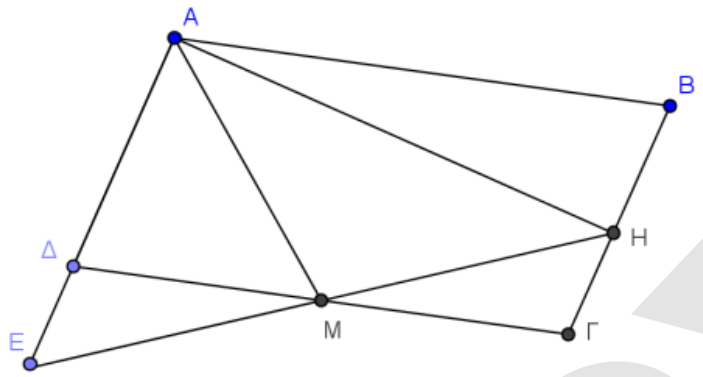
36. Θέμα 1787

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ = 2 ΒΓ, τη γωνία Α αμβλεία και Μ το μέσο της ΓΔ . Φέρουμε κάθετη στην ΑΔ στο σημείο Α, η οποία τέμνει την ΒΓ στο Η. Αν η προέκταση της ΗΜ τέμνει την προέκταση της ΑΔ στο Ε, να αποδείξετε ότι:

α) Η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας ΔΑΒ. (Μονάδες 9)

β) Τα τμήματα ΕΗ, ΔΓ διχοτομούνται. (Μονάδες 8)

γ) $\hat{E} = \Delta\hat{M}A$. (Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ

α) Είναι $B\hat{A}M = \Delta\hat{M}A$ (1) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΑΜ.

Επειδή το Μ είναι μέσο του ΔΓ ισχύει ότι $\Delta M = \frac{\Gamma\Delta}{2}$ και ΓΔ = ΑΒ (απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ) άρα $\Delta M = \frac{AB}{2} = \frac{2B\Gamma}{2} = B\Gamma$. Όμως ΒΓ = ΑΔ (απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ) άρα ΔΜ = ΑΔ και συνεπώς το τρίγωνο ΔΑΜ είναι ισοσκελές οπότε $\Delta\hat{A}M = \Delta\hat{M}A$ (2).

Από τις (1), (2) είναι $B\hat{A}M = \Delta\hat{A}M$, οπότε η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{A}B$.

β) Τα τρίγωνα ΔΕΜ και ΜΗΓ έχουν:

ΔΜ = ΜΓ από υπόθεση

$\Delta\hat{M}E = H\hat{M}\Gamma$, ως κατακορυφήν

$E\hat{\Delta}M = \hat{\Gamma}$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΕ, ΒΓ που τέμνονται από την ΔΓ.

Σύμφωνα με το κριτήριο Γ – Π – Γ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και ΜΕ = ΜΗ διότι είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες ΕΔΜ και Γ.

Επειδή ΔΜ = ΜΓ και ΜΕ = ΜΗ, τα τμήματα ΕΗ, ΔΓ διχοτομούνται.

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΗ, η ΑΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα ΑΜ = $\frac{ΕΗ}{2}$ = ΜΕ. Άρα το τρίγωνο ΑΜΕ είναι ισοσκελές και ισχύει ότι: $\hat{Ε}$ = $Ε\hat{Α}Μ$. Όμως έχει αποδειχθεί ότι $Ε\hat{Α}Μ = Δ\hat{Μ}Α$ άρα $\hat{Ε} = Δ\hat{Μ}Α$.

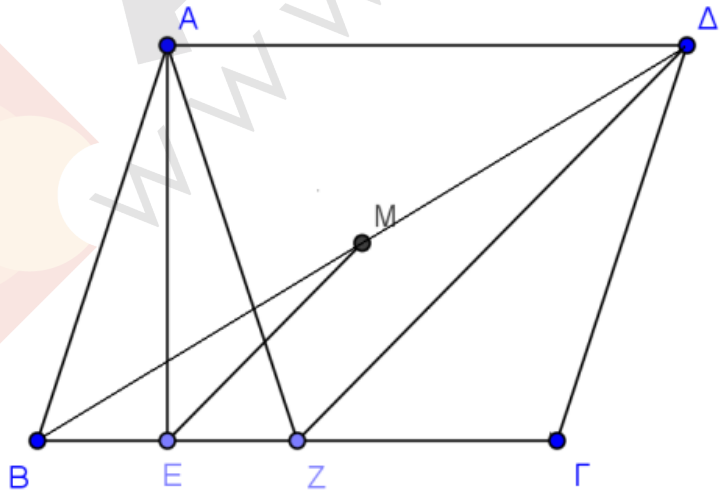
37. Θέμα 1790

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με τη γωνία του Β να είναι ίση με 70° και το ύψος του ΑΕ. Έστω Ζ σημείο της ΒΓ ώστε ΒΕ = ΕΖ.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΖΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπεζίου ΑΖΓΔ (Μονάδες 9)

γ) Αν Μ το μέσο του ΒΔ, να αποδείξετε ότι ΕΜ = $\frac{ΑΓ}{2}$. (Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ

α) Στο τρίγωνο ΑΒΖ το ΑΕ είναι ύψος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές. Άρα ΑΒ = ΑΖ.

Επίσης ισχύει ότι ΑΒ = ΓΔ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, άρα και ΓΔ = ΑΖ.

Επειδή ΑΔ // ΒΓ είναι και ΑΔ // ΖΓ. Η ΑΖ τέμνει την ΓΔ, αφού τέμνει την παράλληλή της ΑΒ. Άρα το ΑΖΓΔ έχει μόνο δύο πλευρές παράλληλες οπότε είναι τραπέζιο.

Το τραπέζιο ΑΖΓΔ έχει ΑΖ = ΒΓ οπότε είναι ισοσκελές.

β) Είναι $A\hat{\Delta}\Gamma = A\hat{B}\Gamma = 70^o$ ως απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

Επειδή οι γωνίες $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΒΓ, είναι παραπληρωματικές, δηλαδή:

$\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow 70^o + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 110^o$

Επειδή το ΑΖΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο, οι γωνίες της βάσης είναι ίσες, δηλαδή:

$A\hat{Z}\Gamma = \hat{\Gamma} = 110^o$ και $Z\hat{A}\Delta = \hat{\Delta} = 70^o$

γ) Το ΕΜ ενώνει τα μέσα των πλευρών του τριγώνου ΒΔΖ, άρα

$$EM = \frac{\Delta Z}{2}$$

Επίσης, οι διαγώνιοι του ισοσκελούς τραπεζίου ΑΖΓΔ είναι ίσες, οπότε

ΔΖ = ΑΓ

Άρα $EM = \frac{A\Gamma}{2}$.

38. Θέμα 1791

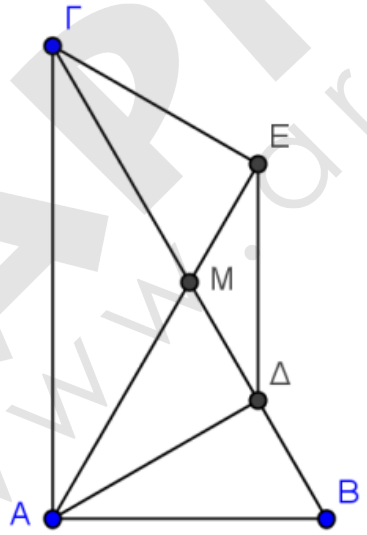
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^o$ και $\hat{\Gamma} = 30^o$. Φέρουμε το ύψος του ΑΔ και τη διάμεσό του ΑΜ. Από το Γ φέρουμε κάθετη στην ευθεία ΑΜ, η οποία την τέμνει στο Ε.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 8)

β) ΜΕ=ΜΔ=ΒΓ/4 (Μονάδες 9)

γ) Το ΑΔΕΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ

α) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ έχουμε:

$\hat{B}+\hat{\Gamma} = 90^o \Leftrightarrow \hat{B} + 30^o = 90^o \Leftrightarrow \hat{B} = 60^o$

Η ΑΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, άρα ΑΜ = $\frac{ΒΓ}{2}$ = ΜΒ = ΜΓ

Άρα το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισοσκελές και επειδή $\hat{B} = 60^o$, το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισόπλευρο.

β) Το ΑΔ είναι ύψος στο ισόπλευρο τρίγωνο ΑΜΒ, άρα είναι και διάμεσος, οπότε ισχύει ότι: ΜΔ = $\frac{ΜΒ}{2} = \frac{\frac{ΒΓ}{2}}{2} = \frac{ΒΓ}{4}$

Είναι $Γ\hat{M}E = A\hat{M}B = 60^o$ ως κατακορυφήν, οπότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΜΓΕ είναι $M\hat{Γ}E = 30^o$, άρα για την απέναντι πλευρά ΜΕ έχουμε ΜΕ = $\frac{ΜΓ}{2} = \frac{\frac{ΒΓ}{2}}{2} = \frac{ΒΓ}{4}$

γ) Η $A\hat{M}B$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΔΜΕ, οπότε $A\hat{M}B = M\hat{E}Δ + M\hat{Δ}E$. Από το ερώτημα (β) το τρίγωνο ΔΜΕ είναι ισοσκελές άρα $A\hat{M}B = 2M\hat{Δ}E \Leftrightarrow$

$M\hat{Δ}E = \frac{A\hat{M}B}{2} = 30^o$

Οι ίσες γωνίες $\hat{Γ}$ και $M\hat{Δ}E$ είναι εντός εναλλάξ των ΑΓ, ΔΕ που τέμνονται από τη ΓΔ άρα ΑΓ // ΔΕ.

Το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισοσκελές (ΑΜ = ΓΜ) οπότε $\hat{Γ} = Γ\hat{A}M = 30^o$

Στο ορθογώνιο τρίγωνα ΜΓΕ έχουμε:

$E\hat{Γ}M + Γ\hat{M}E = 90^o \Leftrightarrow E\hat{Γ}M + 60^o = 90^o \Leftrightarrow E\hat{Γ}M = 30^o$

Στο ισόπλευρο τρίγωνο ΑΜΒ η ΑΔ διχοτόμος οπότε $M\hat{A}Δ = 30^o$

Έχουμε $E\hat{Γ}A + Δ\hat{A}Γ = 60^o + 60^o = 120^o < 180^o$ δηλ. οι ΓΕ και ΑΔ τέμνονται.

Το τετράπλευρο ΑΔΕΓ έχει μόνο δύο πλευρές παράλληλες (ΕΔ= ΑΓ) οπότε είναι τραπέζιο.

Έχουμε $E\hat{\Gamma}A = \Delta\hat{A}\Gamma = 60^o$ οπότε το ΑΔΕΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

39. Θέμα 1794

α) Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ θεωρούμε Κ, Λ, Μ, Ν τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 15)

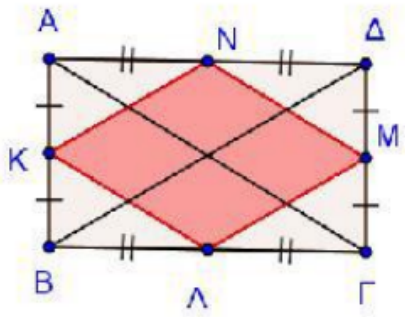
β) Σε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ τα μέσα Κ, Λ, Μ, Ν των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα είναι κορυφές ρόμβου. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ, πρέπει να είναι απαραίτητα ορθογώνιο; Να τεκμηριώσετε τη θετική ή αρνητική σας απάντηση.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Το ΚΛ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, άρα

$K\Lambda \,//\, A\Gamma$ και $K\Lambda = \frac{A\Gamma}{2}$



Το ΜΝ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΔΓ, άρα

$M N \,//\, A\Gamma$ και $M N = \frac{A\Gamma}{2}$

Το ΛΜ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΒΓΔ, άρα

$\Lambda M \,//\, B\Delta$ και $\Lambda M = \frac{B\Delta}{2}$

Το ΚΝ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΔ, άρα

$K N \,//\, B\Delta$ και $K N = \frac{B\Delta}{2}$

Επειδή το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο, οι διαγώνιες του ΑΓ και ΒΔ είναι ίσες, οπότε προκύπτει ότι: ΚΛ = ΛΜ = ΜΝ = ΚΝ, άρα το ΚΛΜΝ είναι ρόμβος.

β) Αν το ΚΛΜΝ είναι ρόμβος τότε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ θα έχει ίσες διαγώνιες διότι ΚΝ = ΝΜ οπότε ΑΓ = ΒΔ. Με αυτές τις προϋποθέσεις δεν είναι απαραίτητο να είναι ορθογώνιο το ΑΒΓΔ διότι θα μπορούσε να είναι ισοσκελές τραπέζιο.

40. Θέμα 1797

α) Σε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ θεωρούμε Κ, Λ, Μ, Ν τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 13)

β) Σε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ τα μέσα Κ, Λ, Μ, Ν των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα είναι κορυφές ρόμβου. Για να σχηματίζεται ρόμβος το ΑΒΓΔ πρέπει να είναι ισοσκελές τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε πλήρως τη θετική ή αρνητική απάντησή σας.

(Μονάδες12)

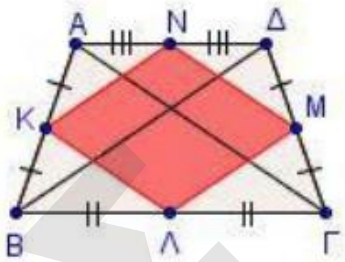
ΛΥΣΗ

α) Το ΚΛ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, άρα

$$ΚΛ = \frac{ΑΓ}{2}$$

Το ΜΝ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΔΓ, άρα

$MN = \frac{AΓ}{2}$



Το ΛΜ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΒΓΔ, άρα

$ΛM = \frac{BΔ}{2}$

Το ΚΝ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΔ, άρα

$KN = \frac{BΔ}{2}$

Επειδή το ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο, για τις διαγώνιές του ισχύει ΑΓ = ΒΔ. Άρα, προκύπτει: ΚΛ = ΛΜ = ΜΝ = ΚΝ

Οπότε το ΚΛΜΝ είναι ρόμβος αφού όλες του οι πλευρές είναι ίσες.

β) Αν το ΚΛΜΝ είναι ρόμβος, τότε σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχει ίσες διαγώνιες. Η ιδιότητα αυτή όμως από μόνη της δεν μπορεί να μας οδηγήσει στο συμπέρασμα ότι το τετράπλευρο είναι ισοσκελές τραπέζιο διότι θα μπορούσε να είναι ορθογώνιο ή τετράγωνο.

41. Θέμα 1798

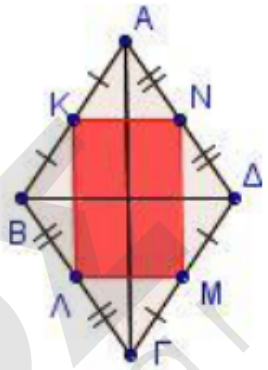
α) Σε ρόμβο ΑΒΓΔ θεωρούμε Κ, Λ, Μ, Ν τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ενός ορθογωνίου είναι κορυφές ρόμβου.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ



α) Το ΚΛ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, άρα

$ΚΛ // = \frac{ΑΓ}{2}$

Το ΜΝ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΔΓ, άρα

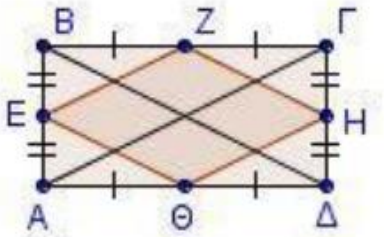
$ΜΝ // = \frac{ΑΓ}{2}$

Οπότε προκύπτει ότι το ΚΛΜΝ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

Επειδή οι ΑΓ, ΒΔ είναι διαγώνιες του ρόμβου, είναι κάθετες, οπότε και οι ΚΛ, ΚΝ που είναι παράλληλες προς αυτές θα είναι κάθετες, δηλαδή $Ν\hat{Κ}Λ = 90^o$.

Επειδή το παραλληλόγραμμο ΚΛΜΝ έχει μια ορθή γωνία, είναι ορθογώνιο.

β) Το ΕΖ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, άρα



$ΕΖ // = \frac{ΑΓ}{2}$

Το ΘΗ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΔΓ, άρα

$ΘΗ // = \frac{ΑΓ}{2}$

Το ΖΗ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΒΓΔ, άρα

$ΖΗ // = \frac{ΒΔ}{2}$

Το ΘΕ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΔ, άρα

$ΘΕ // = \frac{ΒΔ}{2}$

Επειδή το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο, οι διαγώνιες του ΑΓ και ΒΔ είναι ίσες, οπότε προκύπτει ότι ΘΕ = ΕΖ = ΖΗ = ΗΘ, άρα το ΘΕΖΗ είναι ρόμβος.

Έξυπνα & εύκολα!

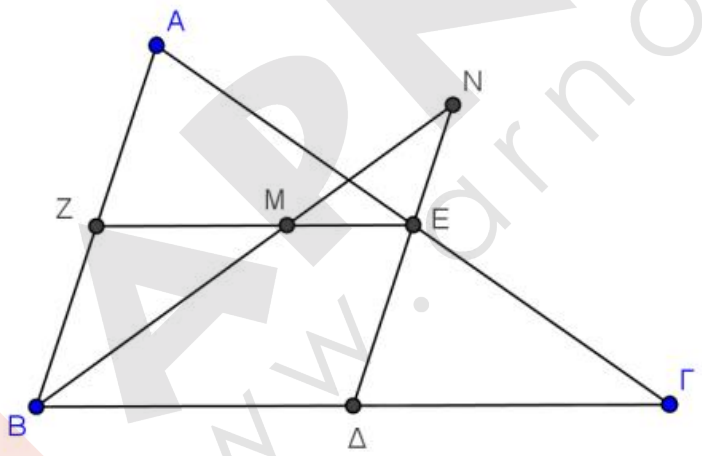
42. Θέμα 1801

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΓ > ΑΒ και Δ, Ε, Ζ τα μέσα των πλευρών του ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα. Αν η διχοτόμος της γωνίας Β τέμνει την ΖΕ στο σημείο Μ και την προέκταση της ΔΕ στο σημείο Ν, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΖΕΔΒ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)

β) Τα τρίγωνα ΒΖΜ και ΜΕΝ είναι ισοσκελή. (Μονάδες 10)

γ) ΒΖ + ΝΕ =ΔΓ (Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ

α) Το ΖΕ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, άρα ΖΕ // ΒΓ.

Το ΔΕ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, άρα ΔΕ // ΑΒ.

Το τετράπλευρο ΖΕΔΒ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

β) Ισχύει ότι: $\Delta\hat{B}M = Z\hat{M}B$

ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΖΕ, ΒΔ που τέμνονται από τη ΒΝ και

$\Delta\hat{B}M = Z\hat{B}M$ διότι ΒΜ διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$.

Οπότε προκύπτει $Z\hat{M}B = Z\hat{B}M$ άρα το τρίγωνο ΖΒΜ είναι ισοσκελές με ΖΒ = ΖΜ .

Είναι $Z\hat{B}M = M\hat{N}E$

ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΝΔ που τέμνονται από την ΒΝ και

$Z\hat{M}B = N\hat{M}E$ ως κατακορυφήν.

Επειδή $Z\hat{M}B = Z\hat{B}M$ προκύπτει: $M\hat{N}E = N\hat{M}E$, οπότε το τρίγωνο ΜΕΝ είναι ισοσκελές

με ΕΜ = ΕΝ .

γ) Είναι:

ΒΖ+ΝΕ = ΖΜ+ΜΕ = ΖΕ = ΒΔ = ΔΓ

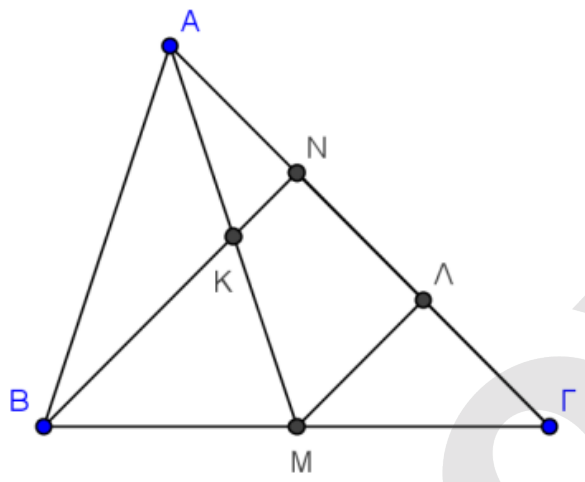
43. Θέμα 1802

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, ΑΜ διάμεσός του και Κ το μέσο του ΑΜ. Αν η προέκταση της ΒΚ τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ν, και Λ είναι το μέσο του ΓΝ, να αποδείξετε ότι:

α) Το σημείο Ν είναι μέσο του ΑΛ. (Μονάδες 9)

β) $K\hat{M}\Gamma = M\hat{B}K + A\hat{K}N$ (Μονάδες 9)

γ) ΒΚ = 3ΚΝ (Μονάδες 7)



ΛΥΣΗ

α) Στο τρίγωνο ΒΝΓ το ΜΛ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών, άρα

ΜΛ // ΒΝ και ΜΛ = $\frac{ΒΝ}{2}$

Στο τρίγωνο ΑΜΛ το Κ είναι μέσο της ΑΜ και ΚΝ // ΜΛ, αφού ΒΝ // ΜΛ, άρα το Ν είναι μέσο της ΑΛ.

β) Η γωνία $K\hat{M}Γ$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΒΚΜ, οπότε

$K\hat{M}Γ = M\hat{B}K + B\hat{K}M$

Επίσης $B\hat{K}M = A\hat{K}N$ ως κατακορυφήν.

Έχουμε: $K\hat{M}Γ = M\hat{B}K + A\hat{K}N$.

γ) Το ΚΝ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΜΛ, οπότε:

$$ΚΝ = \frac{ΜΛ}{2} = \frac{\frac{ΒΝ}{2}}{2} = \frac{ΒΝ}{4}$$

Τελικά:

$$ΒΚ = ΒΝ - ΚΝ = ΒΝ - \frac{ΒΝ}{4} = 3\frac{ΒΝ}{4} = 3ΚΝ$$

Έξυπνα & εύκολα!

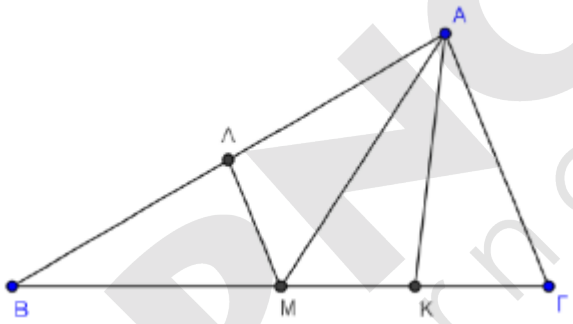
44. Θέμα 1803

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΒΓ = 2ΑΓ. Έστω ΑΜ διάμεσος του ΑΒΓ και Κ, Λ τα μέσα των ΜΓ και ΑΒ αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι:

α) $M\hat{A}\Gamma = A\hat{M}\Gamma$ (Μονάδες 7)

β) ΜΛ = ΜΚ. (Μονάδες 9)

γ) Η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας ΛΜΚ . (Μονάδες 9)



ΛΥΣΗ

α) Ισχύει ότι: $M\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{2A\Gamma}{2} = A\Gamma$

Άρα το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΜ και ισχύει ότι

$M\hat{A}\Gamma = A\hat{M}\Gamma$

β) Το ΑΜΓ είναι ισοσκελές τρίγωνο και ισχύει ΑΓ = ΜΓ

Επίσης Κ μέσο του ΜΓ οπότε $MK = \frac{M\Gamma}{2}$

Το ΜΛ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, άρα ΜΛ // ΑΓ και

$M\Lambda = \frac{A\Gamma}{2} = \frac{M\Gamma}{2} = MK$

γ) Είναι: $\Lambda\hat{M}A = M\hat{A}\Gamma$

ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΛΜ και ΑΓ που τέμνονται από την ΑΜ.

Επειδή $M\hat{A}\Gamma = A\hat{M}\Gamma$ έχουμε $\Lambda\hat{M}A = A\hat{M}\Gamma$.

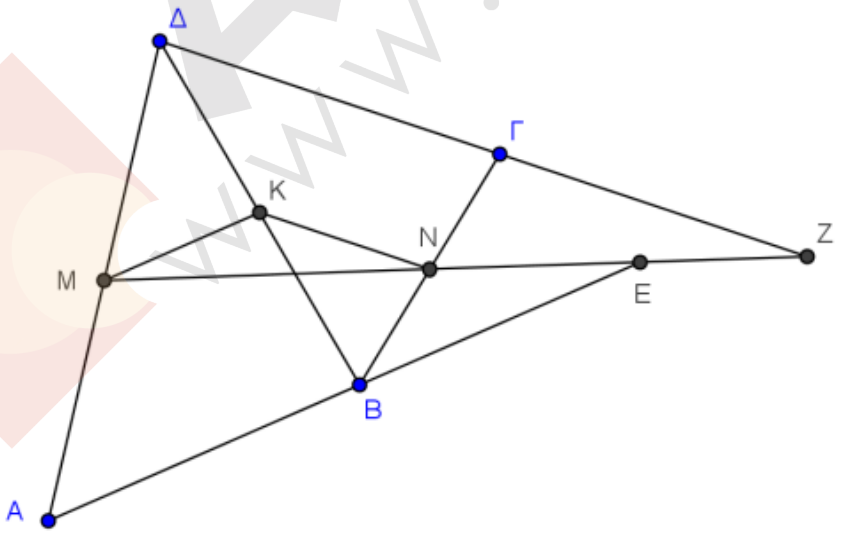
Δηλαδή η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Lambda\hat{M}K$.

45. Θέμα 1804

Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με ΑΒ = ΓΔ και Μ, Ν, Κ τα μέσα των ΑΔ, ΒΓ, ΒΔ αντίστοιχα. Αν οι προεκτάσεις των ΑΒ και ΔΓ τέμνουν την προέκταση της ΜΝ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:

α) ΜΚ = ΚΝ. (Μονάδες 13)

β) $M\hat{E}A = M\hat{Z}\Delta$. (Μονάδες 12)



ΛΥΣΗ

α) Το ΜΚ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΔΒΑ, άρα

ΜΚ // ΑΒ και $ΜΚ = \frac{ΑΒ}{2}$

Το ΚΝ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΒΓΔ, άρα

ΚΝ // ΓΔ και $ΚΝ = \frac{ΓΔ}{2}$

Επειδή ΑΒ = ΓΔ από υπόθεση έχουμε: ΜΚ = ΚΝ.

β) Ισχύει ότι:

$Μ\hat{Ε}Α = Ν\hat{Μ}Κ$

ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΜΚ, ΑΕ που τέμνονται από την ΜΕ και

$Μ\hat{Ζ}Δ = Κ\hat{Ν}Μ$

ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΚΝ, ΔΖ που τέμνονται από την ΜΖ.

Επειδή το τρίγωνο ΚΜΝ είναι ισοσκελές ισχύει ότι $Ν\hat{Μ}Κ = Κ\hat{Ν}Μ$ οπότε έχουμε:

$Μ\hat{Ε}Α = Μ\hat{Ζ}Δ$

46. Θέμα 1830

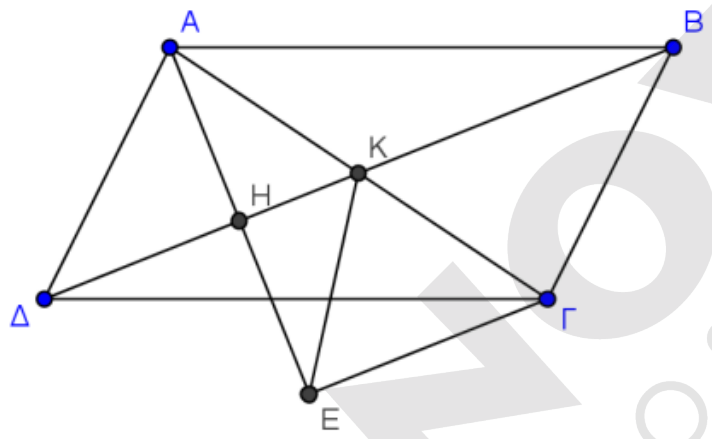
Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Κ το σημείο τομής των διαγωνίων του. Φέρουμε ΑΗ κάθετη στην ΒΔ και στην προέκταση της ΑΗ (προς το Η) θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο ώστε ΑΗ = ΗΕ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΚΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) Το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 9)

γ) Το τετράπλευρο ΔΒΓΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)



ΛΥΣΗ

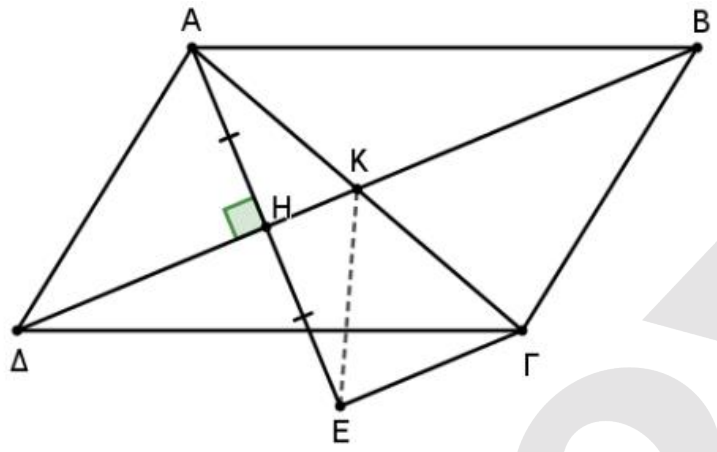
α) Στο τρίγωνο ΑΚΕ το ΚΗ είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

β) Επειδή ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο, οι διαγώνιες ΑΓ και ΒΔ διχοτομούνται, οπότε το Κ είναι μέσο της ΑΓ, οπότε $ΚΑ = \frac{ΚΓ}{2}$.

Αξιοποιώντας το ερώτημα (α) βρίσκουμε:

$ΕΚ = ΚΑ \Leftrightarrow ΕΚ = \frac{ΚΓ}{2}$

Άρα στο τρίγωνο ΑΕΓ η διάμεσός του ΕΚ ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, συνεπώς το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $Α\hat{Ε}Γ = 90^{o}$.



γ) Ισχύει ότι:

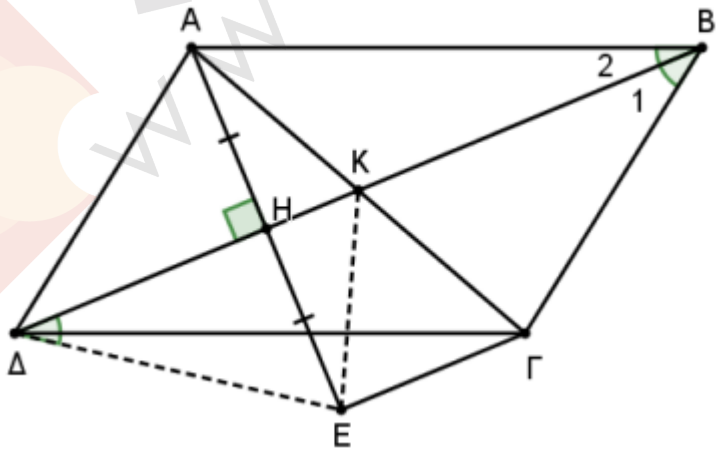
ΗΚ⊥ ΑΕ και ΕΓ⊥ΑΕ, άρα ΗΚ // ΕΓ ⇔ΒΔ // ΕΓ(1)

Στο τρίγωνο ΑΔΕ το ΔΗ είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές με ΔΕ=ΑΔ. Επειδή ΑΔ=ΒΓ, προκύπτει ότι ΔΕ=ΒΓ(2).

Επίσης, $E\hat{\Delta}B = \widehat{B_2}$ ως εντός και εναλλάξ γωνίες στις παράλληλες ευθείες ΑΒ και ΓΔ.

Οπότε $\widehat{B_1} + E\hat{\Delta}B = \widehat{B_1} + \widehat{B_2} = \hat{B} < 180^o$ (3) άρα οι ΔΕ και ΒΓ δεν είναι παράλληλες (3).

Από τις (1),(2) και (3) προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΔΒΓΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



47. Θέμα 1832

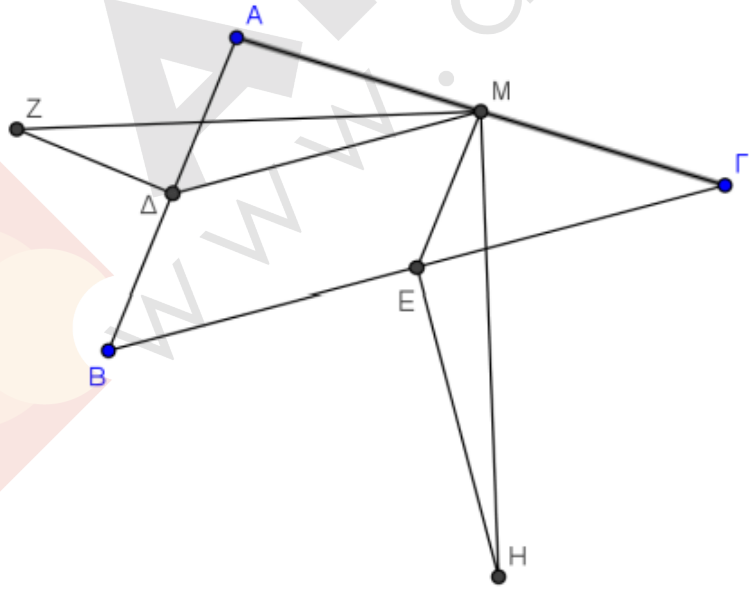
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με γωνίες Β και Γ οξείες και Δ, Μ και Ε τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Στις μεσοκάθετες των ΑΒ και ΒΓ και εκτός του τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε σημεία Ζ και Η αντίστοιχα, τέτοια ώστε ΔΖ = $\frac{AB}{2}$ και ΕΗ = $\frac{B\Gamma}{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο ΒΔΜΕ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 5)

ii. Τα τρίγωνα ΖΔΜ και ΕΜΗ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

β) Αν τα σημεία Ζ, Δ, Ε είναι συνευθειακά, να αποδείξετε ότι η γωνία Α=90° . (Μονάδες 10)



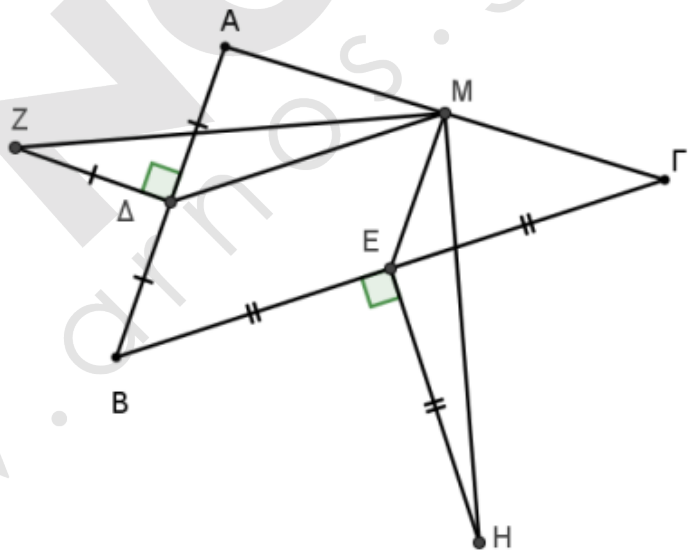
ΛΥΣΗ

α) i. Επειδή τα Δ και Μ είναι μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, ισχύει ότι

$ΔΜ // ΒΓ \Leftrightarrow ΔΜ // ΒΕ$ και $ΔΜ = \frac{ΒΓ}{2} = ΒΕ$

Στο τετράπλευρο ΒΔΜΕ δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες (ΔΜ//= ΒΕ), άρα είναι παραλληλόγραμμο.

ii. Τα τρίγωνα ΖΔΜ και ΕΜΗ έχουν:



- $ΖΔ = \frac{ΑΒ}{2} = ΒΔ = ΜΕ$, αφού τα ΒΔ και ΜΕ είναι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου
- $ΜΔ = ΒΕ = \frac{ΒΓ}{2} = ΕΗ$, αφού τα ΜΔ, ΒΕ είναι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου
- $Μ\hat{Ε}Η = Ζ\hat{Δ}Μ$, διότι
  - $Μ\hat{Ε}Η = Η\hat{Ε}Γ + Μ\hat{Ε}Γ = 90^o + Μ\hat{Ε}Γ$,
  - $Ζ\hat{Δ}Μ = 90^o + Α\hat{Δ}Μ$,
  - $Μ\hat{Ε}Γ = \hat{Β}$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΜΕ, ΑΒ που τέμνονται από την ΒΕ.
  - $Α\hat{Δ}Μ = \hat{Β}$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΜΔ, ΒΓ που τέμνονται από την ΒΔ.

Σύμφωνα με το κριτήριο Π – Γ – Π τα τρίγωνα ΖΔΜ και ΕΜΗ είναι ίσα.

β)Το ΜΕ ενώνει τα μέσα των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ

άρα ισχύει ότι:

ΜΕ // = $\frac{AB}{2}$ ⇔ ΜΕ // = ΑΔ

Επομένως το ΑΜΕΔ είναι παραλληλόγραμμο.

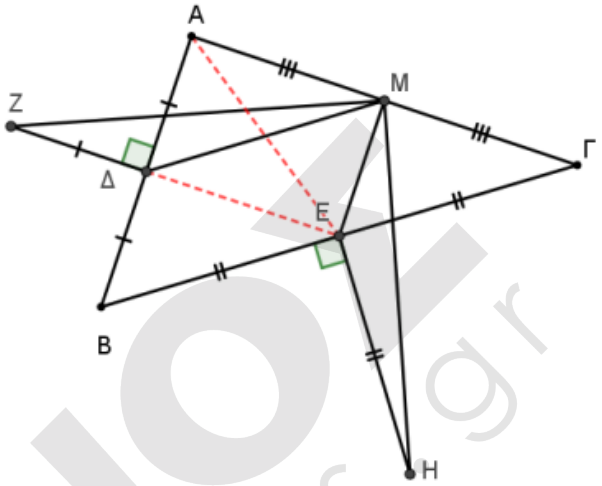
Επειδή τα σημεία Ζ, Δ και Ε είναι συνευθειακά

και ΖΔ ⊥ ΑΒ

θα είναι και ΕΔ ⊥ ΑΒ, δηλαδή $E\hat{\Delta}A = 90^o$.

Συνεπώς το παραλληλόγραμμο ΑΜΕΔ έχει μια

γωνία ορθή, οπότε είναι ορθογώνιο, άρα $\hat{A} = 90^o$.



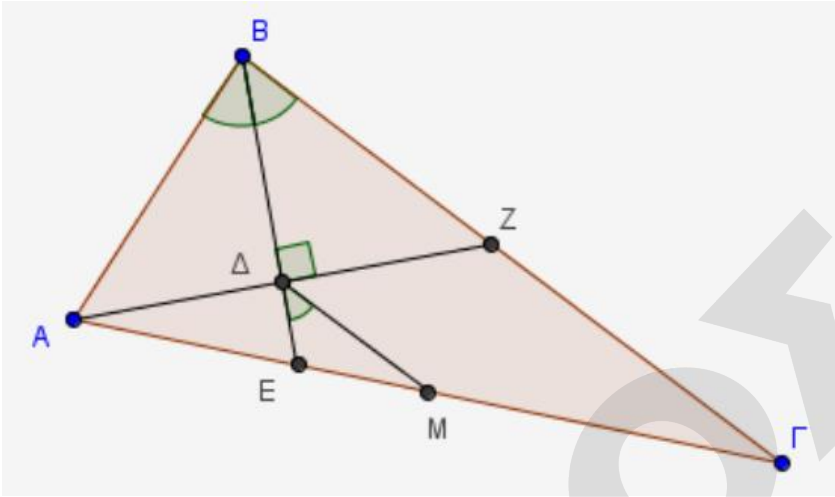
48. Θέμα 1837

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΒΓ και η διχοτόμος ΒΕ της γωνίας $\hat{B}$. Αν ΑΖ ⊥ ΒΕ, όπου Ζ σημείο της ΒΓ και Μ το μέσον της ΑΓ, να αποδείξετε ότι :

α) Το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) ΔΜ//ΒΓ και ΔΜ = $\frac{BΓ - AB}{2}$ (Μονάδες 10)

γ) $E\hat{\Delta}M = \frac{\hat{B}}{2}$, όπου $\hat{B}$ η γωνία του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ

α) Στο τρίγωνο ΑΒΖ το ΒΔ είναι ύψος και διχοτόμος, οπότε είναι ισοσκελές με βάση την ΑΖ.

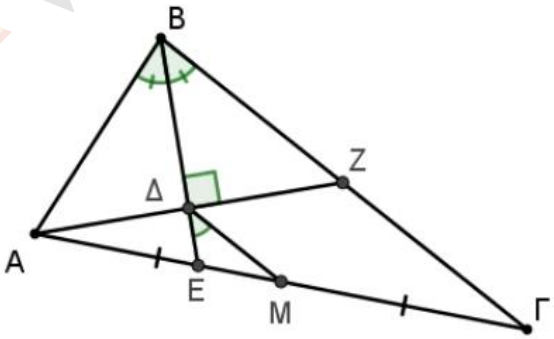
β) Από το προηγούμενο ερώτημα η διχοτόμος ΒΔ είναι και διάμεσος, άρα το Δ είναι μέσο της ΑΖ.

Στο τρίγωνο ΑΖΓ το ΔΜ ενώνει τα μέσα των πλευρών του οπότε:

ΔΜ // ΖΓ ⇔ ΔΜ // ΒΓ

Επίσης ισχύει ότι:

$ΔΜ = \frac{ΖΓ}{2} = \frac{ΒΓ-ΒΖ}{2}$. Όμως ΒΖ=ΑΒ από το (α) ερώτημα, άρα $ΔΜ = \frac{ΒΓ-ΑΒ}{2}$



γ) Είναι $E\hat{\Delta}M = E\hat{B}\Gamma = \frac{\hat{B}}{2}$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες των παραλλήλων ΔΜ, ΒΓ που τέμνονται από την ΒΕ.

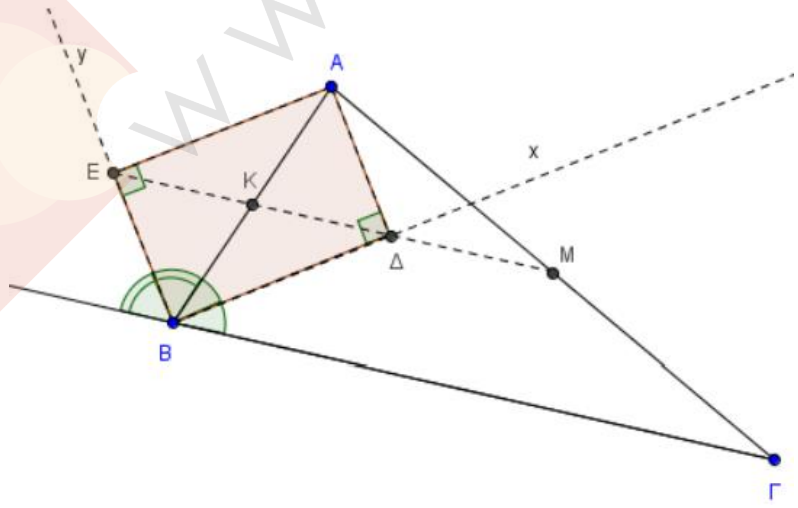
49. Θέμα 1838

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, η διχοτόμος Βx της γωνίας Β του τριγώνου ΑΒΓ και η διχοτόμος Βy της εξωτερικής γωνίας Β. Αν Δ και Ε είναι οι προβολές της κορυφής Α του τριγώνου ΑΒΓ στην Βx και Βy αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΔΒΕ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 7)

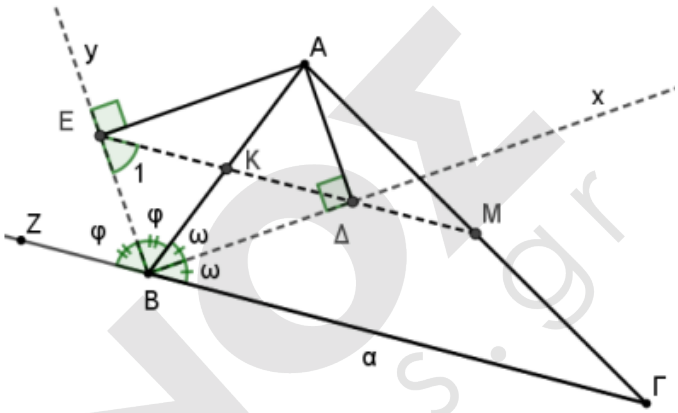
β) Η ευθεία ΕΔ είναι παράλληλη προς τη ΒΓ και διέρχεται από το μέσο Μ της ΑΓ. (Μονάδες 10)

γ) Το τετράπλευρο ΚΜΓΒ είναι τραπέζιο και η διάμεσός του είναι ίση με $\frac{3\alpha}{4}$, όπου α=ΒΓ . (Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ

α) Οι Βx και Βy είναι διχοτόμοι των γωνιών $\widehat{B}$ και $\widehat{B}_{εξ}$, θέτουμε $Γ\widehat{B}Δ=Δ\widehat{B}A=\widehat{\omega}$ και $A\widehat{B}E=E\widehat{B}Z=\widehat{\varphi}$. Τότε:



$Γ\widehat{B}Δ + Δ\widehat{B}A + A\widehat{B}E + E\widehat{B}Z = 180^o \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \widehat{\omega} + \widehat{\omega} + \widehat{\varphi} + \widehat{\varphi} = 180^o \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\widehat{\omega} + 2\widehat{\varphi} = 180^o \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \widehat{\omega} + \widehat{\varphi} = 90^o \Leftrightarrow E\widehat{B}Δ = \widehat{\omega} + \widehat{\varphi} = 90^o$

Το τετράπλευρο ΑΔΒΕ έχει τρείς γωνίες ορθές άρα είναι ορθογώνιο.

β) Οι διαγώνιοι ΕΔ και ΑΒ του ορθογωνίου ΑΔΒΕ είναι ίσες και διχοτομούνται. Άρα:

$AB = EΔ \Leftrightarrow \frac{AB}{2} = \frac{EΔ}{2} \Leftrightarrow KB = KΔ$

Επομένως το τρίγωνο ΚΒΔ είναι ισοσκελές και ισχύει ότι $K\widehat{B}Δ = K\widehat{Δ}B$ (1).

Ισχύει ακόμη ότι $K\widehat{B}Δ = Δ\widehat{B}Γ = \widehat{\omega}$ (2).

Από (1), (2) βρίσκουμε $K\widehat{Δ}B = Δ\widehat{B}Γ$.

Δηλαδή οι ευθείες ΕΔ και ΒΓ που τέμνονται από τη ΒΔ σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες τους ίσες, άρα είναι ΕΔ // ΒΓ.

Στο τρίγωνο ΑΒΓ το Κ είναι μέσο της ΑΒ και ΚΜ // ΒΓ, άρα η ΚΜ διέρχεται από το μέσο Μ της ΑΓ.

γ) Επειδή το ΚΜ ενώνει μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, είναι ΚΜ // ΒΓ (3) και

$KM = \frac{BΓ}{2}$ (4)

Από την (3) και γνωρίζοντας ότι οι ΚΒ και ΜΓ δεν είναι παράλληλες αφού τέμνονται στο Α, προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΚΜΓΒ είναι τραπέζιο. Η διάμεσος του τραπεζίου, είναι ίση με: $\frac{ΚΜ+ΒΓ}{2}$. Αντικαθιστώντας το ΚΜ από τη σχέση (4) έχουμε

$$\frac{\frac{ΒΓ}{2}+ΒΓ}{2}=\frac{\frac{3ΒΓ}{2}}{2}=\frac{3ΒΓ}{4}=\frac{3α}{4}$$

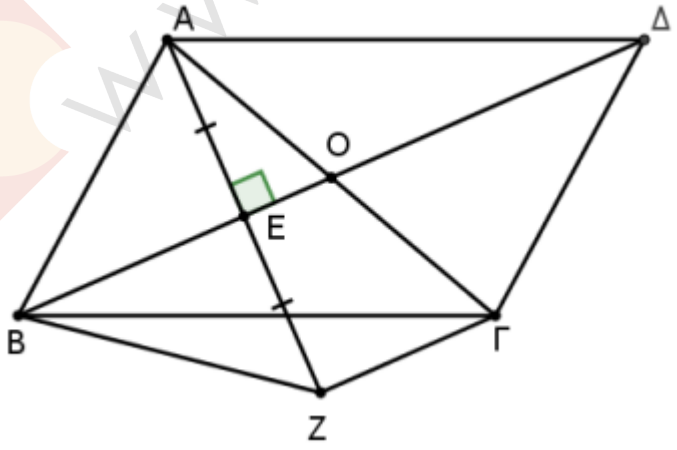
50. Θέμα 1841

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ<ΑΔ και έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ. Φέρνουμε την ΑΕ κάθετη στην διαγώνιο ΒΔ. Αν το Ζ είναι το συμμετρικό του Α ως προς την διαγώνιο ΒΔ και δεν συμπίπτει με το σημείο Γ, τότε να αποδείξετε ότι:

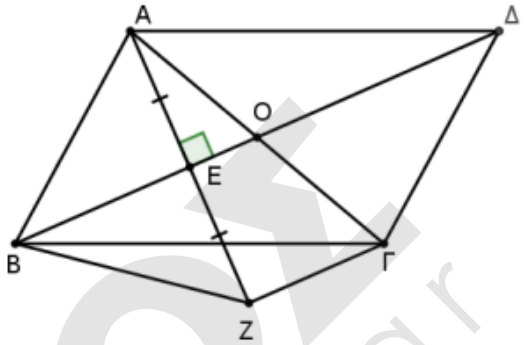
α) Το τρίγωνο ΑΔΖ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) ΖΓ = 2ΟΕ. (Μονάδες 9)

γ) Το ΒΔΖΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)



ΛΥΣΗ



α) Το ΔΕ είναι ύψος και διάμεσος στο τρίγωνο ΑΔΖ, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

β) Το ΟΕ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΖΓ, άρα

$OE = \frac{ZΓ}{2} \Leftrightarrow ZΓ = 2OE.$

γ) Επειδή το ΟΕ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΖΓ, άρα ΟΕ//ΖΓ $\Leftrightarrow$ ΒΔ//ΖΓ. Η ΒΖ τέμνει την ΑΒ άρα τέμνει και την ΓΔ, οπότε οι πλευρές ΒΖ και ΓΔ δεν είναι παράλληλες. Άρα το ΒΔΖΓ είναι τραπέζιο.

Στο τρίγωνο ΑΒΖ το ΒΕ είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Άρα ΒΖ = ΑΒ αλλά και ΑΒ=ΓΔ ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου, οπότε ΒΖ = ΓΔ. Άρα το τετράπλευρο ΒΔΖΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

51. Θέμα 1867

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΔΓ) και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Η ΑΓ είναι κάθετη στην ΑΔ και η ΒΔ είναι κάθετη στην ΒΓ. Θεωρούμε τα μέσα Μ, Ε και Ζ των ΓΔ, ΒΔ και ΑΓ αντίστοιχα.

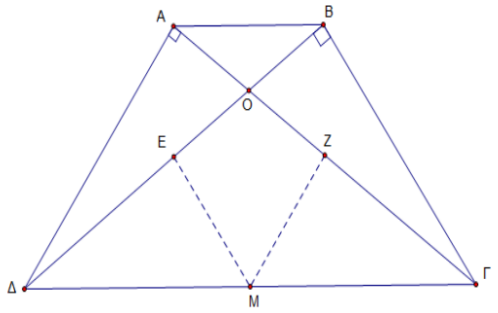
Να αποδείξετε ότι:

α) ΜΕ=ΜΖ. (Μονάδες 6)

β) Η ΜΖ είναι κάθετη στην ΑΓ. (Μονάδες 6)

γ) Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{M\Delta E}$ και $\overset{\Delta}{MZ\Gamma}$ είναι ίσα. (Μονάδες 7)

δ) Η ΟΜ είναι μεσοκάθετος του ΕΖ. (Μονάδες 6)



ΛΥΣΗ

α) Το ΜΕ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΔΒΓ, οπότε ΕΜ = $\frac{ΒΓ}{2}$

Το ΖΜ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΓΑΔ, άρα ΜΖ // ΑΔ και ΜΖ = $\frac{ΑΔ}{2}$

Επίσης, το ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο οπότε ισχύει ότι ΒΓ = ΑΔ .

Οπότε προκύπτει ότι ΜΕ = ΜΖ .

β) Είναι ΜΖ // ΑΔ και ΑΔ ⊥ ΑΓ άρα είναι και ΜΖ ⊥ ΑΓ.

γ) Τα τρίγωνα ΜΔΕ και ΜΖΓ έχουν:

- ΜΕ =ΜΖ, από το ερώτημα (α)
- ΜΔ = ΜΓ, διότι Μ μέσο του ΓΔ
- ΔΕ = $\frac{ΔΒ}{2} = \frac{ΑΓ}{2}$ = ΖΓ, διότι οι ΑΓ, ΒΔ είναι διαγώνιες του ισοσκελούς τραπεζίου.

Σύμφωνα με το κριτήριο ισότητας Π – Π – Π, τα τρίγωνα είναι ίσα.

δ) Επειδή τα τρίγωνα ΜΔΕ και ΜΖΓ είναι ίσα έχουν και

$O\hat{Δ}Γ = O\hat{Γ}Δ$ διότι είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές ΜΕ, ΜΖ αντίστοιχα.

Άρα το τρίγωνο ΟΔΓ είναι ισοσκελές και ισχύει ΟΔ = ΟΓ. Τότε:

ΟΔ = ΟΓ ⇔ ΟΕ + ΕΔ = ΟΖ + ΖΓ ⇔ ΟΕ = ΟΖ

Επίσης ισχύει ΜΕ=ΜΖ, λόγω του ερωτήματος (α) . Άρα ΟΕ = ΟΖ και ΜΕ = ΜΖ οπότε η ΟΜ είναι μεσοκάθετος του ΕΖ.

52. Θέμα 1868

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $\overset{\Delta}{\text{ΑΒΓ}}$ και τα μέσα Δ, Ε και Μ των ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Στην προέκταση του ΜΔ (προς το Δ) θεωρούμε τμήμα ΔΖ=ΔΜ.

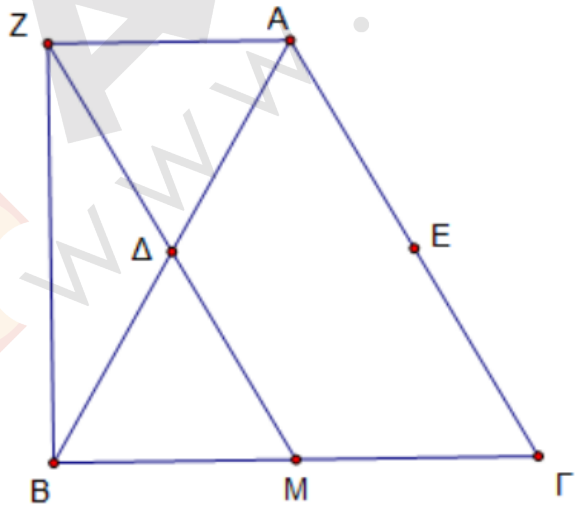
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{\text{ΑΖΔ}}$ και $\overset{\Delta}{\text{ΒΜΔ}}$ είναι ίσα. (Μονάδες 6)

β) Το τετράπλευρο ΖΑΓΜ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)

γ) Τα τμήματα ΖΕ και ΑΔ τέμνονται κάθετα και διχοτομούνται. (Μονάδες 7)

δ) Η ΒΖ είναι κάθετη στη ΖΑ. (Μονάδες 6)



ΛΥΣΗ

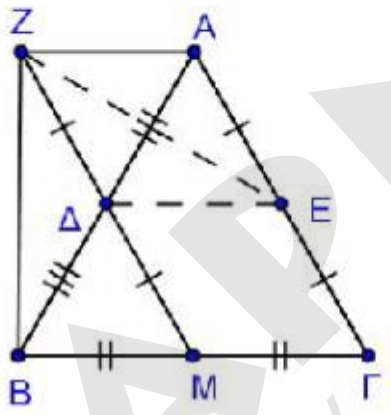
α) Τα τρίγωνα ΑΖΔ και ΒΜΔ έχουν:

ΔΖ = ΔΜ, από υπόθεση

ΑΔ = ΔΒ, διότι Δ είναι μέσο του ΑΒ

$A\hat{\Delta}Z = B\hat{\Delta}M$, ως κατακορυφήν

Σύμφωνα με το κριτήριο Π – Γ – Π τα τρίγωνα ΑΖΔ και ΒΜΔ είναι ίσα.



β) Το ΔΜ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΒΓ στο τρίγωνο ΑΒΓ, άρα η ΔΜ // ΑΓ οπότε και ΖΜ // ΑΓ και ΔΜ = $\frac{ΑΓ}{2}$. Όμως το Δ είναι μέσο του ΖΜ άρα ΔΜ = $\frac{ΖΜ}{2}$. Συνεπώς ΖΜ = ΑΓ.

Τελικά οι απέναντι πλευρές ΖΜ και ΑΓ του τετραπλεύρου ΖΑΓΜ είναι παράλληλες και ίσες οπότε το τετράπλευρο ΖΑΓΜ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Επειδή το ΖΑΓΜ είναι παραλληλόγραμμο ισχύει ότι ΖΑ // ΜΓ δηλαδή ΖΑ // ΒΓ και ΖΑ = ΜΓ.

Στο τρίγωνο ΑΒΓ το ΔΕ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου οπότε:

ΔΕ //ΒΓ και ΔΕ = $\frac{ΒΓ}{2}$. Όμως το Μ είναι μέσο του ΒΓ άρα ΔΕ = ΜΓ .

Οπότε ΖΑ // ΔΕ και ΖΑ = ΔΕ, δηλαδή το τετράπλευρο ΖΑΕΔ έχει τις απέναντι πλευρές του ΖΑ και ΔΕ ίσες παράλληλες οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

Επιπλέον ισχύει ότι: ΔΕ = $\frac{ΒΓ}{2}$ και το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο οπότε ΒΓ = ΑΓ. Συνεπώς ΔΕ = $\frac{ΑΓ}{2}$. Όμως Ε μέσο του ΑΓ άρα ΑΕ = $\frac{ΑΓ}{2}$. Οπότε ΔΕ = ΑΕ

Επομένως το παραλληλόγραμμο ΑΕΔΖ έχει τις διαδοχικές του πλευρές ΔΕ και ΑΕ ίσες οπότε είναι ρόμβος.

Τα τμήματα ΖΕ, ΑΔ είναι διαγώνιοι του ρόμβου, οπότε τέμνονται κάθετα και διχοτομούνται.

δ) Είναι ΖΔ = ΔΜ = $\frac{ΑΓ}{2} = \frac{ΑΒ}{2}$.

Στο τρίγωνο ΖΑΒ η ΖΔ είναι διάμεσος και ισούται με το μισό της πλευράς ΑΒ στην οποία αντιστοιχεί. Άρα το τρίγωνο ΖΑΒ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την ΑΒ, οπότε η ΖΒ είναι κάθετη στη ΖΑ.

Σολωμού 29 Αθήνα τηλ: 210 38 22 157 info@arnos.gr www.arnos.gr

53. Θέμα 1873

Έστω τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ με διάμεσο ΑΜ τέτοια ώστε ΑΜ=ΑΒ. Φέρουμε το ύψος του ΑΚ και το προεκτείνουμε (προς το Κ) κατά τμήμα $K\Delta = AK$. Προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ (προς το Μ) κατά τμήμα ΜΕ=ΑΜ.

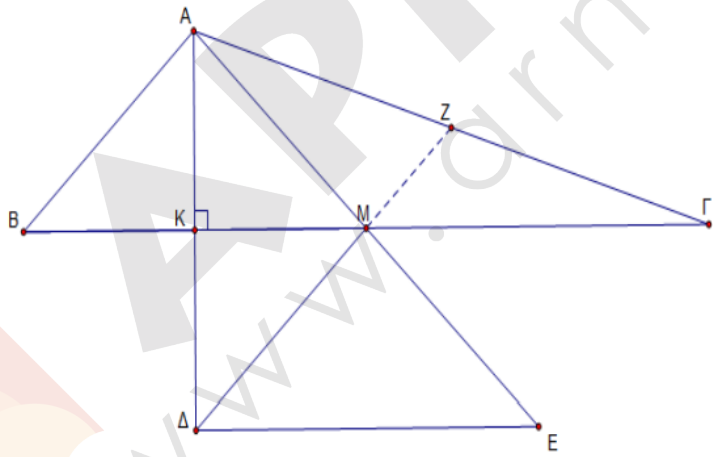
Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta E \perp A\Delta$ και $\Delta E = 2KM$ (Μονάδες 7)

β) Το τετράπλευρο ΑΒΕΓ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)

γ) Το τετράπλευρο ΑΒΔΜ είναι ρόμβος. (Μονάδες 6)

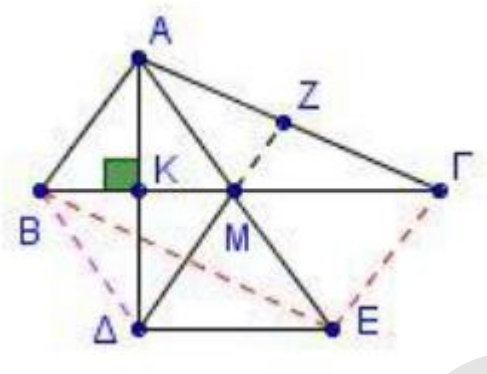
δ) Η προέκταση της ΔΜ τέμνει το ΑΓ στο μέσον του Ζ. (Μονάδες 6)



ΛΥΣΗ

α) Είναι ΑΜ = ΑΒ άρα το τρίγωνο ΑΒΜ είναι ισοσκελές και ΑΚ ύψος του τριγώνου ΑΒΜ οπότε το ΑΚ είναι και διάμεσος του τριγώνου. Συνεπώς το ΚΜ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών ΑΔ και ΑΕ στο τρίγωνο ΑΔΕ, άρα ΚΜ // ΔΕ και ΚΜ = $\frac{\Delta E}{2} \Leftrightarrow \Delta E = 2KM$.

Επειδή ΑΔ ⊥ ΚΜ και ΚΜ // ΔΕ, είναι και ΑΔ ⊥ ΔΕ.



β) Είναι ΜΒ = ΜΓ, διότι Μ μέσο της ΒΓ και

ΜΑ = ΜΕ από υπόθεση. Άρα οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου ΑΒΕΓ διχοτομούνται στο Μ, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Το Κ είναι μέσο του ΒΜ όπως αποδείχθηκε στο ερώτημα (α) και του ΑΔ από υπόθεση. Επιπλέον ΑΔ ⊥ ΒΜ από υπόθεση άρα οι διαγώνιοι ΑΔ και ΒΜ του τετραπλεύρου ΑΒΔΜ διχοτομούνται κάθετα στο Κ, οπότε είναι ρόμβος.

δ) Επειδή το ΑΒΔΜ είναι ρόμβος, είναι ΑΒ // ΔΜ.

Από το παραλληλόγραμμο ΑΒΕΓ έχουμε ΓΕ // ΑΒ.

Άρα ΓΕ // ΔΜ ή ΓΕ // ΜΖ.

Στο τρίγωνο ΑΓΕ ο Μ είναι μέσο της ΑΕ και ΜΖ // ΓΕ, άρα Ζ μέσο του ΑΓ.

54. Θέμα 1889

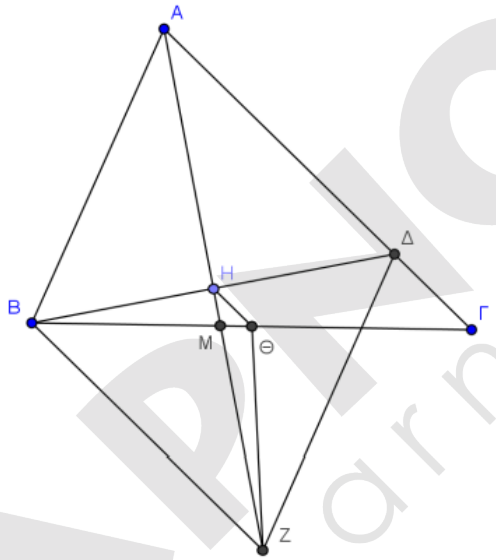
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ. Από το Β φέρουμε κάθετη στην διχοτόμο ΑΜ της γωνίας Α, η οποία τέμνει την ΑΜ στο Η και την ΑΓ στο Δ. Στην προέκταση της ΑΗ θεωρούμε σημείο Ζ τέτοιο ώστε ΑΗ = ΗΖ και έστω Θ το μέσο της πλευράς ΒΓ.

Να αποδείξετε ότι

α) το τετράπλευρο ΑΒΖΔ είναι ρόμβος. (Μονάδες 9)

β) ΗΘ//ΒΖ. (Μονάδες 9)

γ) ΗΘ = $\frac{ΑΓ-ΑΒ}{2}$ (Μονάδες 7)



ΛΥΣΗ

α) Στο τρίγωνο ΑΒΔ το ΑΗ είναι ύψος και διχοτόμος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές και το ΑΗ είναι και διάμεσος. Άρα ΒΗ = ΗΔ. Επίσης από υπόθεση ισχύει ότι ΑΗ = ΗΖ. Συνεπώς, στο τετράπλευρο ΑΒΖΔ οι διαγώνιες του ΑΖ, ΒΔ διχοτομούνται κάθετα, άρα το τετράπλευρο είναι ρόμβος.

β) Το ΗΘ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΒΔΓ, άρα

ΗΘ // ΔΓ ⇔ ΗΘ // ΑΔ (1)

Επειδή το ΑΒΖΔ είναι ρόμβος ισχύει ότι ΒΖ // ΑΔ (3).

Από τις (1), (3) προκύπτει ότι ΗΘ // ΒΖ

γ) Το ΗΘ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΒΔ και ΒΓ του τριγώνου ΒΔΓ οπότε

$ΗΘ = \frac{ΔΓ}{2} = \frac{ΑΓ-ΑΔ}{2} = \frac{ΑΓ-ΑΒ}{2}$

διότι ΑΒ = ΑΔ αφού ΑΒΖΔ είναι ρόμβος.

55. Θέμα 1893

Έστω ΑΒΓΔ ορθογώνιο με ΑΒ>ΒΓ τέτοιο ώστε οι διαγώνιοί του να σχηματίζουν γωνία 60°. Από το Δ φέρουμε ΔΜ κάθετη στην ΑΓ.

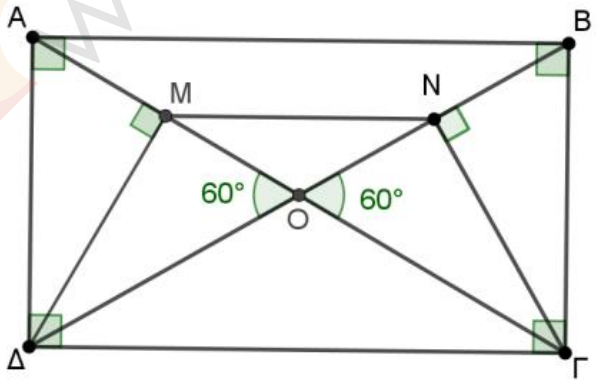
α) Να αποδείξετε ότι:

i. το σημείο Μ είναι μέσο του ΑΟ όπου Ο το κέντρο του ορθογωνίου. (Μονάδες 8)

ii. $ΑΜ=\frac{1}{4}ΑΓ$ (Μονάδες 7)

β) Αν από το Γ φέρουμε ΓΝ κάθετη στη ΒΔ, να αποδείξετε ότι το ΜΝΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ



α) i. Οι διαγώνιοι ΑΓ, ΒΔ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι ίσες και διχοτομούνται, άρα και τα μισά τους είναι ίσα, δηλαδή ΑΓ = ΒΔ $\Leftrightarrow \frac{ΑΓ}{2} = \frac{ΒΔ}{2} \Leftrightarrow$ ΟΑ = ΟΔ.

Άρα το τρίγωνο ΟΑΔ είναι ισοσκελές με $Δ\hat{Α}Ο = Α\hat{Δ}Ο$. Όμως $Α\hat{Ο}Δ = 60^o$, από υπόθεση και συνεπώς, από το άθροισμα των γωνιών του, το ισοσκελές τρίγωνο έχει $Δ\hat{Α}Ο + Α\hat{Δ}Ο + 60^o = 180^o$ με $Δ\hat{Α}Ο = Α\hat{Δ}Ο$. Άρα $Δ\hat{Α}Ο = Α\hat{Δ}Ο = Α\hat{Ο}Δ = 60^o$. Οπότε το τρίγωνο ΟΑΔ είναι ισόπλευρο, εφόσον έχει τρεις γωνίες ίσες. Το ΔΜ είναι ύψος στο ισόπλευρο τρίγωνο, οπότε είναι και διάμεσος, δηλαδή το Μ είναι μέσο του ΟΑ.

ii. Είναι ΑΜ = $\frac{ΟΑ}{2} = \frac{\frac{ΑΓ}{2}}{2} = \frac{ΑΓ}{4}$.

β) Ομοίως με το ΟΑΔ, το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισόπλευρο οπότε το ΓΝ είναι ύψος και διάμεσός του.

Στο τρίγωνο ΟΑΒ το ΜΝ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών, άρα ΜΝ // ΑΒ. Όμως ΑΒ // ΓΔ ως πλευρές ορθογωνίου, άρα ΜΝ // ΓΔ.

Επίσης, ΜΝ = $\frac{ΑΒ}{2} = \frac{ΓΔ}{2} <$ ΓΔ. Δηλαδή το ΜΝ είναι μικρότερο του ΓΔ, επομένως το ΜΝΓΔ δεν είναι παραλληλόγραμμο, καθώς αν ήταν οι απέναντι πλευρές του, ΜΝ και ΓΔ θα ήταν ίσες. Επομένως οι ΜΔ και ΓΝ δεν είναι παράλληλες.

Άρα το ΜΝΓΔ είναι τραπέζιο.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΟΜΔ και ΟΝΓ:

- Είναι ορθογώνια.
- $Μ\hat{Ο}Δ = Ν\hat{Ο}Γ = 60^o$, ως κατακορυφήν γωνίες και
- ΟΔ = ΟΓ, ως μισά των ίσων διαγωνίων του ορθογωνίου.

Άρα τα τρίγωνα ΟΜΔ και ΟΝΓ είναι ίσα οπότε ισχύει και ΔΜ = ΓΝ, ως απέναντι από τις ίσες γωνίες $Μ\hat{Ο}Δ$ και $Ν\hat{Ο}Γ$. Επομένως το τραπέζιο ΜΝΓΔ είναι ισοσκελές.

Σολωμού 29 Αθήνα τηλ: 210 38 22 157 info@arnos.gr www.arnos.gr

56. Θέμα 1898

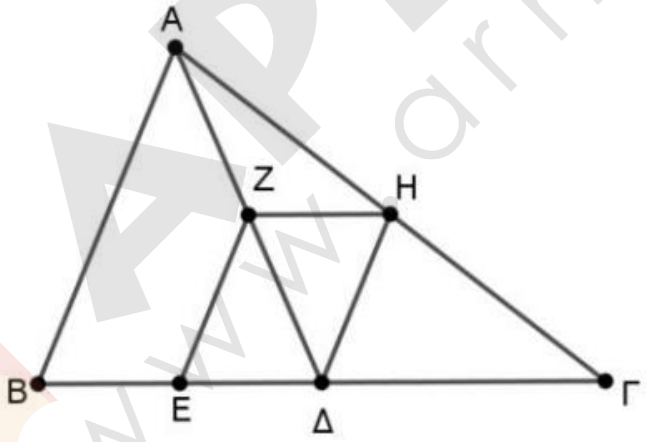
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΔ. Έστω Ε, Ζ και Η είναι τα μέσα των ΒΔ, ΑΔ και ΑΓ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τη σχέση των πλευρών ΑΒ και ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ, ώστε το παραλληλόγραμμο ΔΕΖΗ να είναι ρόμβος. (Μονάδες 10)

γ) Στην περίπτωση που το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο (η γωνία Β ορθή), να βρείτε το είδος του παραλληλογράμμου ΔΕΖΗ. (Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ



α) Το ΕΖ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΔ, άρα ΕΖ // ΑΒ και ΕΖ = $\frac{AB}{2}$ (1).

Το ΔΗ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, άρα ΔΗ // ΑΒ και ΔΗ = $\frac{AB}{2}$ (2).

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι ΕΖ // ΔΗ και ΕΖ = ΔΗ οπότε το ΔΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμο αφού δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες.

β) Είναι ΖΗ, ΕΔ απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΔΕΖΗ, οπότε ΖΗ = ΕΔ = $\frac{ΒΔ}{2}$.

Όμως ΒΔ = $\frac{ΒΓ}{2}$, άρα ΖΗ = ΕΔ = $\frac{\frac{ΒΓ}{2}}{2} = \frac{ΒΓ}{4}$ (3).

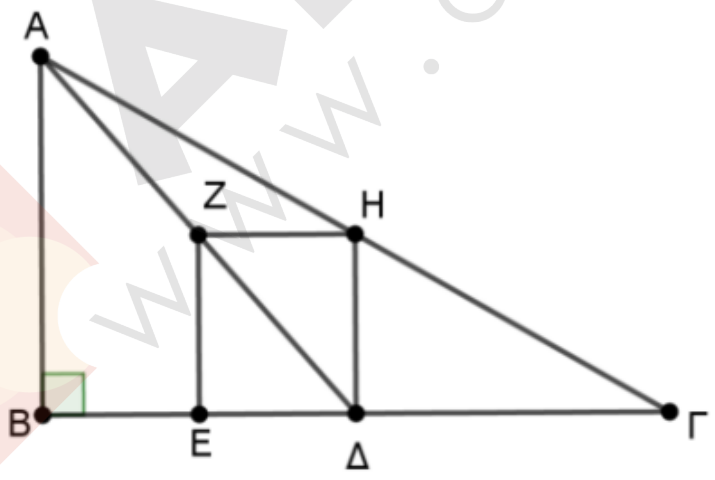
Το ΖΕ ενώνει τα μέσα στο τρίγωνο ΑΒΓ, άρα (ΖΕ // ΑΒ και) ΖΕ = $\frac{ΑΒ}{2}$ (4).

Εφόσον το ΔΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμο, για να είναι ρόμβος αρκεί να έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες. Από τη σχέση ΖΕ = ΖΗ και από τις (3) και (4) προκύπτει ότι $\frac{ΑΒ}{2} = \frac{ΒΓ}{4} \Leftrightarrow$ ΒΓ = 2ΑΒ.

γ) Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με τη γωνία $\widehat{Β}$ = 90°, τότε:

Εφόσον ΔΗ // ΑΒ και ΒΓ ⊥ ΑΒ, άρα και ΒΓ ⊥ ΔΗ

Επομένως $Η\widehat{Δ}Ε$ = 90°, οπότε το παραλληλόγραμμο ΔΕΖΗ θα έχει μια ορθή γωνία και θα είναι ορθογώνιο.



57. Θέμα 13519

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ>ΑΔ. Στην ΑΒ θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε ΑΕ = ΑΔ. Από το μέσο Μ της ΔΕ φέρουμε παράλληλη προς την ΔΓ που τέμνει την ΒΓ στο Κ.

α) Να αποδείξετε ΑΜ ⊥ ΔΕ. (Μονάδες 7)

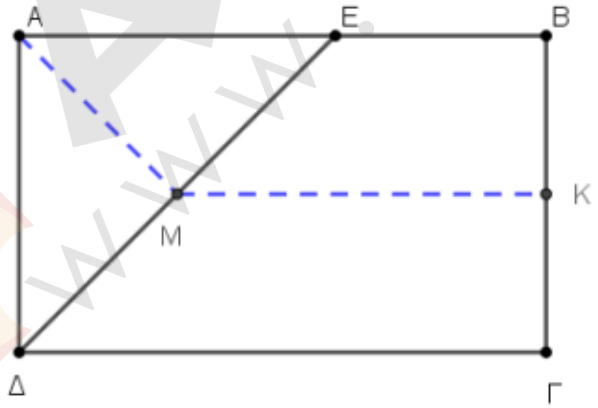
β) Να αποδείξετε ότι 2ΜΚ = 2ΑΒ - ΑΔ. (Μονάδες 9)

γ) Φέρνουμε την ΕΚ που τέμνει την προέκταση της ΔΓ στο Ζ.

Να αποδείξετε ότι ΓΖ = ΑΒ – ΑΔ. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

Κατασκευάζουμε το ορθογώνιο ΑΒΓΔ με ΑΒ > ΑΔ. Στην ΑΒ θεωρούμε σημείο Ε, τέτοιο ώστε ΑΔ = ΑΕ. Από το μέσο Μ της ΔΕ φέρουμε παράλληλη προς την ΔΓ που τέμνει την ΒΓ στο Κ.



α) Το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές, γιατί ΑΔ = ΑΕ.

Επομένως, η διάμεσος ΑΜ που αντιστοιχεί στην βάση θα είναι και ύψος.

Άρα, ΑΜ ⊥ ΔΕ.

β) Αν η ΔΕ ήταν παράλληλη στην ΒΓ, θα είχαμε από το Δ δύο παράλληλες, τις ΔΑ και ΔΕ προς την ΒΓ, που είναι άτοπο λόγω του 1ου αιτήματος παραλληλίας. Επομένως, η ΔΕ δεν είναι παράλληλη προς την ΒΓ. Άρα, το ΕΒΓΔ είναι τραπέζιο γιατί ΕΒ//ΔΓ και η ΔΕ δεν είναι παράλληλη με την ΒΓ.

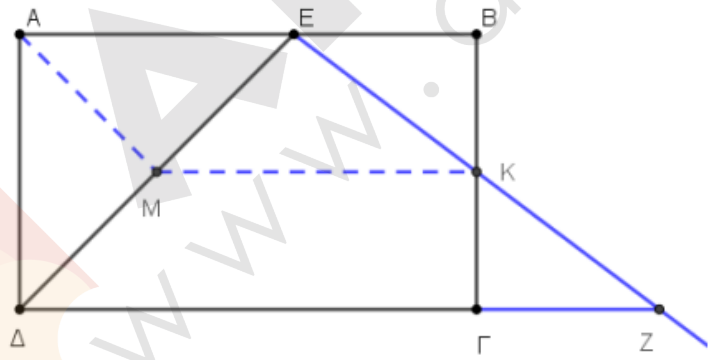
Από το μέσο Μ της ΔΕ φέραμε ΜΚ//ΔΓ, άρα το Κ είναι το μέσο πλευράς ΒΓ.

Η διάμεσος ΜΚ του τραπεζίου ΕΒΓΔ θα ισούται με το ημιάθροισμα των βάσεων, δηλαδή $ΜΚ = \frac{ΔΓ+ΕΒ}{2}$ ή 2ΜΚ = ΔΓ + ΕΒ (1).

Όμως ΔΓ=ΑΒ (2), ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ και ΑΔ = ΑΕ (3), από υπόθεση. Επίσης, ΕΒ = ΑΒ-ΑΕ (4).

Από (1), (2), (3) και (4) συμπεραίνουμε ότι 2ΜΚ = ΑΒ + ΑΒ – ΑΕ = 2ΑΒ – ΑΔ (5).

γ) Προεκτείνουμε την ΕΚ που τέμνει την προέκταση της ΔΓ στο Ζ.



Στο τρίγωνο ΔΕΖ το Μ είναι μέσο της ΔΕ και ΜΚ//ΔΖ, άρα η ΜΚ διέρχεται από το μέσο Κ της ΕΖ. Επομένως:

$ΜΚ = \frac{ΔΖ}{2}$ ⇔ 2ΜΚ = ΔΖ ⇔(από (5)) 2ΑΒ - ΑΔ = ΔΓ + ΓΖ ⇔

2ΑΒ-ΑΔ=ΑΒ+ΓΖ⇔ ΓΖ = ΑΒ – ΑΔ.

58. Θέμα 13743

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Μ στην πλευρά ΑΒ. Από το Μ φέρουμε παράλληλη στη ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Δ.

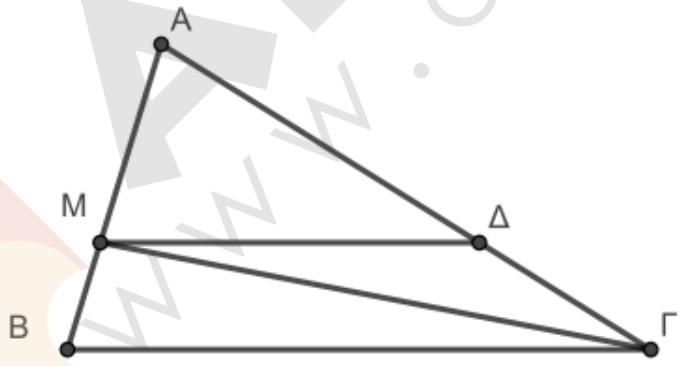
α) Να αποδείξετε ότι $\Delta\hat{M}\Gamma = B\hat{\Gamma}M$. (Μονάδες 05)

β) Αν το τρίγωνο ΓΑΒ είναι ισοσκελές με βάση ΑΒ, να προσδιορίσετε τη θέση του σημείου Μ στην ΑΒ ώστε το τρίγωνο ΔΜΓ να είναι ισοσκελές με ΔΜ = ΔΓ και να δικαιολογήσετε τους ισχυρισμούς σας. (Μονάδες 10)

γ) Αν Μ είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ και Ε το μέσο του τμήματος ΒΓ να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο ΜΔΕΒ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)

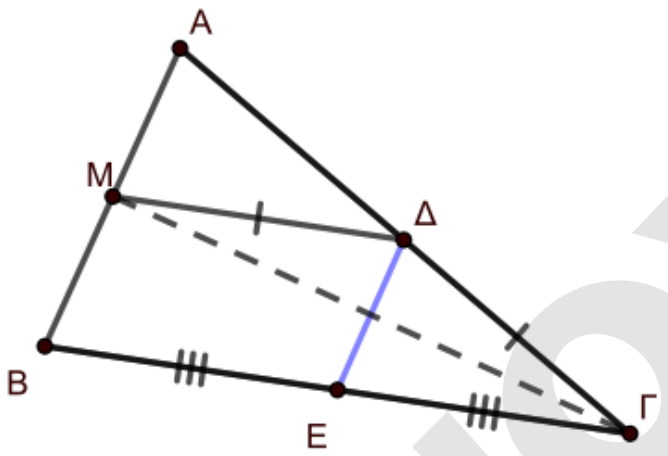
ΛΥΣΗ

α)



Από το σημείο Μ φέρουμε ΜΔ//ΒΓ. Τότε οι γωνίες $\Delta\hat{M}\Gamma$ και $B\hat{\Gamma}M$ είναι ίσες, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΜΔ και ΒΓ που τέμνονται από τη ΜΓ.

β)



Αν το ΔΜΓ είναι ισοσκελές με ΔΜ = ΔΓ, τότε οι γωνίες στη βάση του θα είναι ίσες, δηλαδή $\Delta\hat{M}\Gamma = \Delta\hat{\Gamma}M$. Στο ερώτημα α) αποδείξαμε ότι $\Delta\hat{M}\Gamma = B\hat{\Gamma}M$, οπότε $\Delta\hat{\Gamma}M = B\hat{\Gamma}M$, άρα η ΓΜ θα είναι διχοτόμος της γωνίας Γ. Όμως από την υπόθεση το τρίγωνο ΓΑΒ είναι ισοσσκελές με βάση ΑΒ, οπότε η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής Γ θα είναι και διάμεσος προς τη βάση του. Δηλαδή το ζητούμενο σημείο Μ είναι το μέσο της ΑΒ.

γ) Το Μ είναι το μέσο της ΑΒ και έχουμε φέρει ΜΔ//ΒΓ, άρα το σημείο Δ είναι το μέσο της ΑΓ. Δίνεται ότι το σημείο Ε είναι μέσο της ΒΓ άρα το τμήμα ΔΕ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε το ΔΕ είναι παράλληλο στην ΑΒ, ή ΔΕ//ΜΒ. Το τετράπλευρο ΜΔΕΒ έχει τις απέναντι πλευρές του ανά δύο παράλληλες, άρα είναι παραλληλόγραμμο.

59. Θέμα 13745

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, το μέσο Μ της βάσης ΒΓ και τυχαίο εσωτερικό σημείο Δ στη βάση του.

α) Αν από το μέσο Μ φέρουμε παράλληλες προς τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου, που τις τέμνουν στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:

i. ΜΕ = ΜΖ. (Μονάδες 6)

ii. Το ΑΕΜΖ είναι ρόμβος με περίμετρο ίση με 2ΑΒ. (Μονάδες 7)

β) Αν πάρουμε τυχαίο εσωτερικό σημείο Δ στο ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ, διαφορετικό από το μέσο Μ, και φέρουμε τις παράλληλες προς τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου, που τις τέμνουν στα σημεία Κ και Λ αντίστοιχα, τότε:

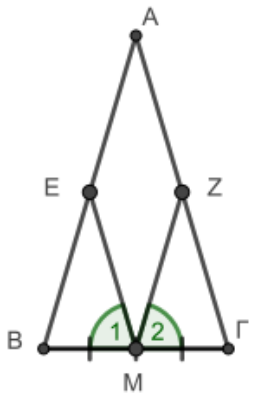
i. Ποιο είναι το είδος του τετράπλευρου ΑΚΔΛ;

ii. Να συγκρίνετε την περίμετρο του τετράπλευρου ΑΚΔΛ με την περίμετρο του ρόμβου ΑΕΜΖ του ερωτήματος α ii) και να διατυπώστε λεκτικά το συμπέρασμα που προκύπτει.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Έστω Μ το μέσο της βάσης ΒΓ στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ τότε :

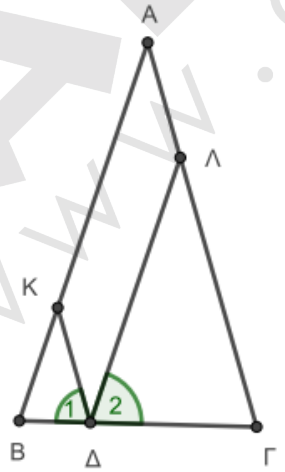


Έξυπνα & εύκολα!

i. Από το μέσο Μ της ΒΓ φέρουμε ΜΕ//ΑΓ, οπότε το Ε θα είναι μέσο της ΑΒ και $ΜΕ = \frac{ΑΓ}{2}$ (1), ομοίως επειδή από το μέσο Μ φέρουμε ΜΖ//ΑΒ θα είναι Ζ μέσο της ΑΓ και $ΜΖ = \frac{ΑΒ}{2}$ (2). Επιπλέον δίνεται ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ, οπότε από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι ΜΕ = ΜΖ.

ii. Από την υπόθεση είναι ΜΕ//ΑΓ ή ΜΕ//ΑΖ και ΜΖ//ΑΒ ή ΜΖ//ΑΕ, οπότε το τετράπλευρο ΑΕΜΖ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, άρα είναι παραλληλόγραμμο. Επιπλέον οι διαδοχικές πλευρές του ΜΕ και ΜΖ είναι ίσες από το α)i. ερώτημα, οπότε το ΑΕΜΖ είναι ρόμβος. Η περίμετρος του ρόμβου αυτού είναι ίση με $ΑΕ + ΕΜ + ΜΖ + ΑΖ = 4\ ΑΕ = 4\ \frac{ΑΒ}{2} = 2ΑΒ$. Διότι το τετράπλευρο είναι ρόμβος οπότε οι τέσσερις πλευρές του είναι ίσες με ΑΕ και $ΑΕ= \frac{ΑΒ}{2}$, αφού Ε μέσο της ΑΒ.

β) Αν το Δ είναι τυχαίο σημείο στη βάση ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου, όπως στο σχήμα



i. Από την κατασκευή οι απέναντι πλευρές του τετράπλευρου ΑΚΔΛ είναι παράλληλες, αφού ΔΚ//ΑΓ ή ΔΚ//ΑΛ και ΔΛ//ΑΒ ή ΔΛ//ΑΚ. Άρα το ΑΚΔΛ είναι παραλληλόγραμμο. Θα αποδείξουμε ότι το ΑΚΔΛ, όταν το Δ δεν είναι το μέσο του ΒΓ δε μπορεί να είναι ρόμβος.

Έξυπνα & εύκολα!

Οι γωνίες $\hat{\Gamma}$ και $\hat{\Delta}_1$ είναι εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΔΚ και ΑΓ με τέμνουσα την ΒΓ, οπότε $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma}$, άρα $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}$, (αφού οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ είναι ίσες ως γωνίες στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου) . Οπότε το ΒΚΔ είναι ισοσκελές τρίγωνο με ΚΔ = ΚΒ (1). Όμοια οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Delta}_2$ είναι εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΔΛ και ΑΒ με τέμνουσα την ΒΓ, οπότε $\hat{\Delta}_2 = \hat{B}$, άρα $\hat{\Delta}_2 = \hat{\Gamma}$. Άρα το τρίγωνο ΔΛΓ είναι ισοσκελές με ΛΔ = ΛΓ (2). Επειδή $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}$, $\hat{\Delta}_2 = \hat{\Gamma}$ και $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, προκύπτει ότι $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = \hat{B} = \hat{\Gamma}$. Δηλαδή τα ισοσκελή τρίγωνα ΒΚΔ και ΓΛΔ έχουν τις γωνίες της βάσης τους ίσες μία προς μία, οπότε και οι τρίτες γωνίες τους, $B\hat{K}\Delta$ και $\Gamma\hat{\Lambda}\Delta$, θα είναι μεταξύ τους ίσες. Αν το Δ δεν ταυτίζεται με το μέσο Μ της ΒΓ τα τμήματα ΒΔ και ΔΓ δεν είναι ίσα, οπότε και τα τρίγωνα ΒΚΔ και ΓΛΔ δεν είναι ίσα. (Αν ήταν ίσα θα έπρεπε και οι πλευρές ΒΔ και ΔΓ που είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες $B\hat{K}\Delta$ και $\Gamma\hat{\Lambda}\Delta$ αντίστοιχα, να είναι ίσες). Οι πλευρές ΔΚ και ΔΛ δεν είναι ίσες, γιατί αν ήταν ίσες, τα τρίγωνα ΒΚΔ και ΓΛΔ θα ήταν ίσα από το κριτήριο ΓΠΓ. Άτοπο, αφού αποδείξαμε ότι τα τρίγωνα ΒΚΔ και ΓΛΔ δεν είναι ίσα.

Οπότε οι διαδοχικές πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΚΔΛ δεν είναι ίσες , επομένως αυτό δεν είναι πια ρόμβος.

ii. Για την περίμετρο του παραλληλογράμμου ΑΚΔΛ έχουμε ότι είναι ίση με ΑΚ + ΚΔ + ΔΛ + ΛΑ με τη βοήθεια των σχέσεων (1) και (2) του β)i. ερωτήματος η περίμετρος γίνεται ίση με ΑΚ + ΚΒ +ΓΛ + ΛΑ = ΑΒ + ΑΓ = ΑΒ + ΑΒ = 2ΑΒ.

Παρατηρούμε ότι η περίμετρος του παραλληλογράμμου που σχηματίζεται όταν το Δ είναι οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο στη βάση ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ είναι σταθερή και ίση με 2ΑΒ.

60. Θέμα 13751

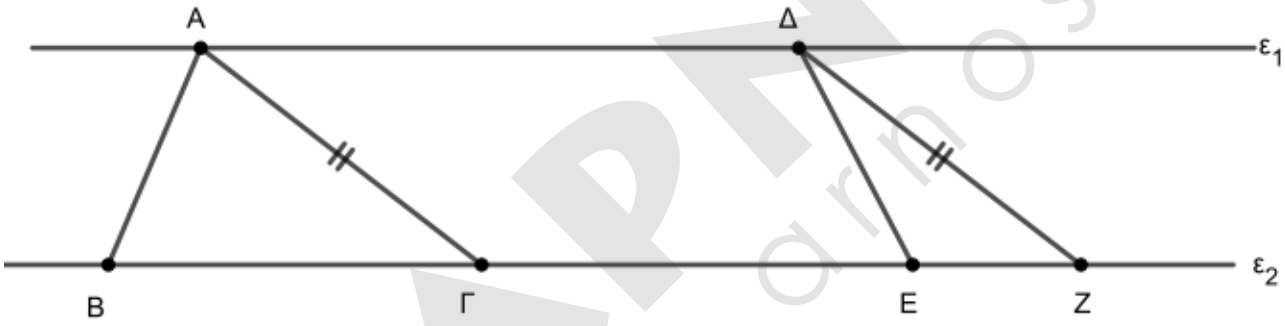
Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο, ενώ το ΔΕΖ είναι αμβλυγώνιο με $\hat{E} > 90^o$. Ισχύει επίσης ότι ΑΓ = ΔΖ.

α)

i. Να σχεδιάσετε τα ύψη των τριγώνων από τις κορυφές Α και Δ ονομάζοντάς τα ΑΗ και ΔΘ αντίστοιχα. (Μονάδες 05)

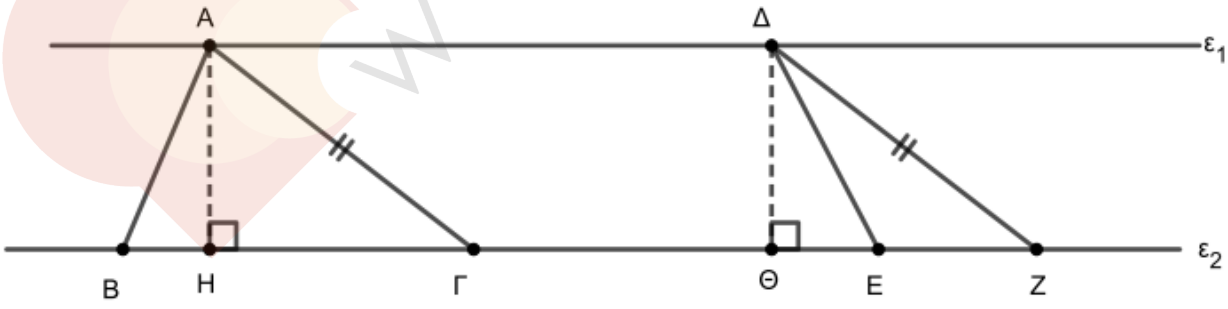
ii. Να αποδείξετε ότι ΗΓ = ΘΖ. (Μονάδες 12)

β) Να δικαιολογήσετε γιατί ΕΖ < ΒΓ. (Μονάδες 08)



ΛΥΣΗ

α)



i. Έστω ΑΗ το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ και ΔΘ το ύψος του τριγώνου ΔΕΖ.

ii. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΗΓ και ΔΘΖ, τα οποία έχουν:

- ΑΗ = ΔΘ, ως αποστάσεις παραλλήλων ευθειών
- ΑΓ = ΔΖ, από την υπόθεση
- $\hat{H} = \hat{\Theta} = 90^o$, αφού ΑΗ και ΔΘ ύψη

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία κάθετη πλευρά ίση. Οπότε και οι άλλες κάθετες πλευρές τους θα είναι ίσες, δηλαδή ΗΓ = ΘΖ.

β) Το σημείο Η είναι εσωτερικό του τμήματος ΒΓ γιατί το τρίγωνο είναι οξυγώνιο, οπότε ΗΓ < ΒΓ. Το σημείο Θ είναι εξωτερικό του τμήματος ΕΖ γιατί η γωνία $\hat{E}$ είναι αμβλεία, οπότε ΕΖ < ΘΖ. Από το α) ii. ερώτημα βρήκαμε ότι ΗΓ = ΘΖ.

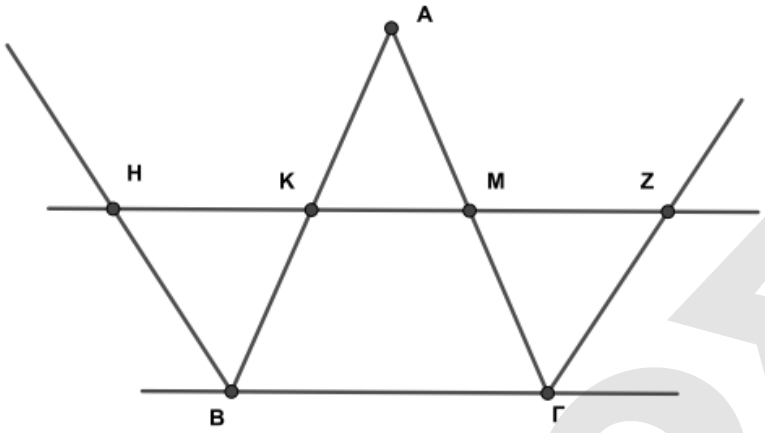
Άρα ΕΖ < ΘΖ, ΘΖ = ΗΓ και ΗΓ < ΒΓ, επομένως ΕΖ < ΒΓ.

61. Θέμα 13838

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ), με Κ, Μ τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Κ και Μ τέμνει τις εξωτερικές διχοτόμους των γωνιών Β και Γ στα σημεία Η και Ζ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

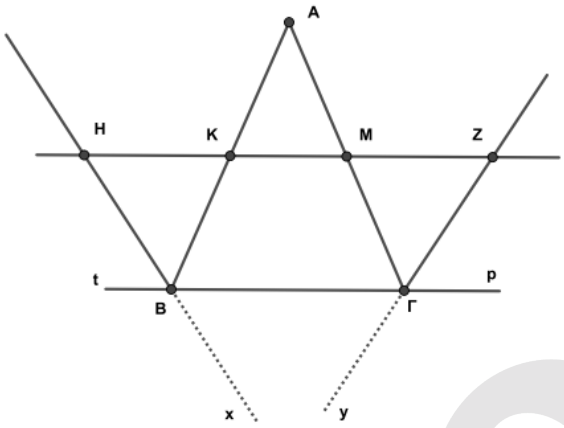
α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΜΓΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 11)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΖΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 14)



ΛΥΣΗ

α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα σημεία Κ και Μ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, συνεπώς ΚΜ//ΒΓ. Το τετράπλευρο ΚΜΓΒ είναι τραπέζιο αφού έχει 2 πλευρές παράλληλες (ΚΜ, ΒΓ) και οι άλλες δύο πλευρές του (ΒΚ και ΓΜ) τέμνονται ως μέρη των πλευρών ΑΒ και ΑΓ, αντίστοιχα, του τριγώνου ΑΒΓ. Από υπόθεση έχουμε ότι ΑΒ=ΑΓ και τα σημεία Κ, Μ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, συνεπώς ΚΒ=ΜΓ (ως μισά των ίσων τμημάτων ΑΒ και ΑΓ), άρα το τετράπλευρο ΚΜΓΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο αφού οι μη παράλληλες πλευρές του ΚΒ και ΜΓ είναι ίσες μεταξύ τους.



β) Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα σημεία Κ, Μ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα και ισχύει ΚΜ//ΒΓ, άρα και ΗΖ//ΒΓ (αφού τα σημεία Η και Ζ βρίσκονται στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Κ, Μ). Επιπλέον οι ΒΗ και ΓΖ τεμνόμενες από τη ΒΓ σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά γωνίες τους ($\Gamma\hat{B}x$ και $B\hat{\Gamma}y$) με άθροισμα μικρότερο από 2 ορθές, αφού:

$\Gamma\hat{B}x = H\hat{B}t$ (ως κατακορυφήν) και $H\hat{B}t = \frac{\hat{B}\varepsilon\xi}{2}$

$B\hat{\Gamma}y = Z\hat{\Gamma}p$ (ως κατακορυφήν) και $Z\hat{\Gamma}p = \frac{\hat{\Gamma}\varepsilon\xi}{2}$

αλλά επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές οι ίσες γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ είναι οξείες άρα οι εξωτερικές τους $\hat{B}_{\varepsilon\xi}$ και $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}$ είναι αμβλείες δηλαδή ισχύει:

$\hat{B}_{\varepsilon\xi} < 180^o$ ή $\frac{\hat{B}\varepsilon\xi}{2} < 90^o$ και $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} < 180^o$ ή $\frac{\hat{\Gamma}\varepsilon\xi}{2} < 90^o$

$\frac{\hat{B}\varepsilon\xi}{2} + \frac{\hat{\Gamma}\varepsilon\xi}{2} < 180^o$ ή

$H\hat{B}t + Z\hat{\Gamma}p < 180^o$ ή

$\Gamma\hat{B}x + B\hat{\Gamma}y < 180^o$. Οι ΒΗ και ΓΖ τέμνονται συνεπώς το τετράπλευρο ΒΓΖΗ είναι τραπέζιο με βάσεις ΒΓ και ΖΗ.

Έξυπνα & εύκολα!

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ είναι προσκείμενες στη βάση ΒΓ συνεπώς είναι ίσες, δηλαδή $\hat{B}=\hat{\Gamma}$ άρα και $\hat{B}_{\varepsilon\xi}=\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}$ (ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ αντίστοιχα) άρα και $\frac{\hat{B}\varepsilon\xi}{2}=\frac{\hat{\Gamma}\varepsilon\xi}{2}$ ή $K\hat{B}H=M\hat{\Gamma}Z$. Επίσης ισχύει $\Gamma\hat{B}H=B\hat{\Gamma}Z$ (ως άθροισμα ίσων γωνιών $\hat{B}+K\hat{B}H$ και $\hat{\Gamma}+M\hat{\Gamma}Z$). Το τραπέζιο ΒΓΖΗ είναι ισοσκελές, αφού έχει τις προσκείμενες στη βάση ΒΓ γωνίες του $\Gamma\hat{B}H$ και $B\hat{\Gamma}Z$ ίσες.

62. Θέμα 13856

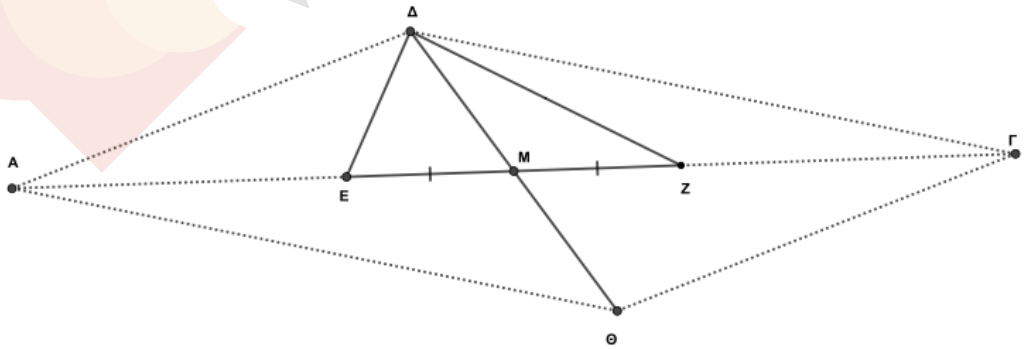
Σε τρίγωνο ΔΕΖ, φέρουμε τη διάμεσο ΔΜ και στην προέκτασή της προς το μέρος του Μ παίρνουμε σημείο Θ έτσι ώστε ΔΜ=ΜΘ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΕΖ προς το Ε κατά τμήμα ΕΑ=ΕΖ και προς το Ζ κατά τμήμα ΖΓ=ΕΖ.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΔΑΜ και ΘΓΜ είναι ίσα. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΘΑΔΓ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

γ) Στο σχήμα της άσκησης που κατασκεύασε στο τετράδιό του ο Γιάννης είναι ΑΔ=12. Πόσο θα είναι το μήκος της διαμέσου ΕΗ του τριγώνου ΔΕΖ στο σχήμα του Γιάννη; (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ



α) Το σημείο Μ είναι το μέσο της πλευράς ΕΖ άρα ΜΕ=ΜΖ, επίσης ΕΑ=ΕΖ=ΖΓ (από υπόθεση) άρα: ΜΕ+ΕΑ=ΜΖ+ΖΓ ή ΜΑ=ΜΓ.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΔΑΜ και ΘΓΜ που έχουν:

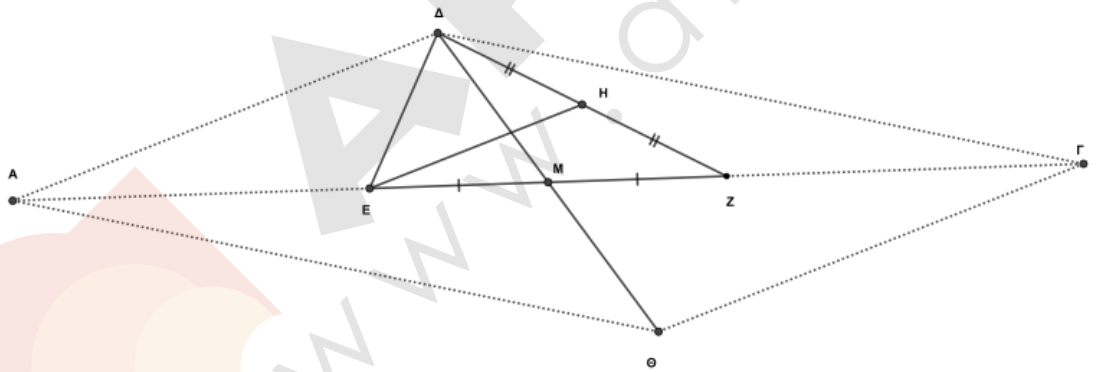
i. ΔΜ=ΜΘ (από υπόθεση)

ii. ΜΑ=ΜΓ (ως άθροισμα ίσων τμημάτων ΜΕ+ΕΑ και ΜΖ+ΖΓ)

iii. $\Delta\widehat{M}A=\Theta\widehat{M}\Gamma$ (ως κατακορυφήν)

Τα τρίγωνα είναι ίσα επειδή έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες.

β) Το σημείο Μ είναι το μέσο του τμήματος ΔΘ (από υπόθεση) και μέσο του τμήματος ΑΓ (ii στη σύγκριση του ερωτήματος α)). Στο τετράπλευρο ΘΑΔΓ οι διαγώνιοι ΔΘ και ΑΓ διχοτομούνται στο σημείο Μ, άρα το τετράπλευρο ΘΑΔΓ είναι παραλληλόγραμμο.



γ) Το σημείο Η είναι το μέσο της πλευράς ΔΖ αφού η ΕΗ είναι διάμεσος. Από υπόθεση έχουμε ΕΑ=ΕΖ, άρα το σημείο Ε είναι το μέσο της πλευράς ΑΖ. Στο τρίγωνο ΑΔΖ τα σημεία Ε και Η είναι μέσα πλευρών άρα $ΕΗ=\frac{ΑΔ}{2}$ ή $ΕΗ=\frac{12}{2}$ ή ΕΗ=6. Στο σχήμα του Γιάννη η διάμεσος ΕΗ του τριγώνου ΔΕΖ θα έχει μήκος 6.

63. Θέμα 14882

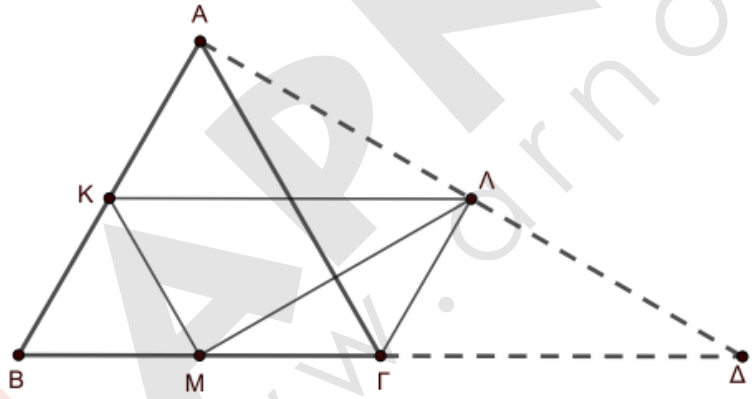
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Στην προέκταση της ΒΓ (προς το Γ) θεωρούμε τμήμα ΓΔ = ΒΓ. Αν Μ, Κ και Λ είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΑΒ και ΑΔ αντίστοιχα τότε:

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΑΔ. (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο ΚΛΓΜ είναι ισοσκελές τραπέζιο με τη μεγάλη βάση διπλάσια από τη μικρή. (Μονάδες 8)

ii. Το τρίγωνο ΚΜΛ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 10)



ΛΥΣΗ

α)

Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, ισχύει ότι: $B\hat{A}\Gamma = \hat{B} = B\hat{\Gamma}A = 60^o$

Ισχύει ακόμη ότι ΓΔ = ΒΓ και ΒΓ = ΑΓ, άρα ΓΔ = ΑΓ, οπότε το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισοσκελές, επομένως $\Gamma\hat{A}\Delta = \hat{\Delta}$ (1).

Η γωνία $A\hat{\Gamma}B$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΓΔ, άρα $A\hat{\Gamma}B = \Gamma\hat{A}\Delta + \hat{\Delta}$ και λόγω της (1) $60^o = 2\hat{\Delta}$ ή $\hat{\Delta} = 30^o$. Οπότε λόγω της (1) είναι και $\Gamma\hat{A}\Delta = 30^o$. Ισχύει ακόμη ότι:

$B\hat{A}\Delta = B\hat{A}\Gamma + \Gamma\hat{A}\Delta = 60^o + 30^o = 90^o$.

β)

i. Το ΚΛ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΔ, οπότε ΚΛ // ΒΔ ή ΚΛ//ΜΓ.

Επιπλέον το Γ είναι το μέσο της ΒΔ, αφού ΒΓ = ΓΔ από υπόθεση και το Λ είναι το μέσο της ΑΔ, άρα ΛΓ//ΑΒ. Το τμήμα ΚΜ τέμνει τη μία από τις δύο παράλληλες την ΑΒ, άρα θα τέμνει και την άλλη. Δηλαδή τα τμήματα ΚΜ και ΛΓ τέμνονται , οπότε δεν είναι παράλληλα. Έτσι το ΚΛΓΜ είναι τραπέζιο.

Το ΛΓ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΔ, άρα $\Lambda\Gamma = \frac{AB}{2}$ (2)

Το ΚΜ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, άρα $KM = \frac{A\Gamma}{2}$ (3)

Επειδή ΑΒ = ΑΓ, από τις (1), (2) βρίσκουμε ότι ΛΓ = ΚΜ, οπότε το τραπέζιο ΚΛΓΜ είναι ισοσκελές.

Για τις βάσεις του έχουμε $K\Lambda = \frac{B\Delta}{2}$, αφού Κ και Λ τα μέσα των ΑΒ και ΑΔ αντίστοιχα, δηλαδή $K\Lambda = \frac{2\,B\Gamma}{2}$ ή ΚΛ = ΒΓ, ενώ $M\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}$, αφού το Μ είναι μέσο του ΒΓ. Δηλαδή $K\Lambda = B\Gamma$ και $M\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}$ και έτσι η μεγάλη βάση του τραπεζίου είναι διπλάσια της μικρής.

Σολωμού 29 Αθήνα τηλ: 210 38 22 157 info@arnos.gr www.arnos.gr

ii. Ισχύουν τα εξής:

- $B\hat{K}M = B\hat{A}\Gamma = 60^o$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη που σχηματίζονται από τις παράλληλες ΚΜ και ΑΓ που τέμνονται από την ΑΒ.
- $A\hat{K}\Lambda = \hat{B} = 60^o$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη που σχηματίζονται από τις παράλληλες ΚΛ και ΒΔ που τέμνονται από την ΑΒ.
- $A\hat{K}\Lambda + \Lambda\hat{K}M + B\hat{K}M = 180^o$ ή $60^o + \Lambda\hat{K}M + 60^o = 180^o$, δηλαδή $\Lambda\hat{K}M = 60^o$.

Τα τρίγωνα ΜΚΛ και ΑΚΛ έχουν:

- ΚΛ κοινή πλευρά
- $A\hat{K}\Lambda = \Lambda\hat{K}M = 60^o$
- ΑΚ = ΚΜ, διότι $AK = \frac{AB}{2}$ και $KM = \frac{A\Gamma}{2} = \frac{AB}{2}$

Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΜΚΛ και ΑΚΛ είναι ίσα, άρα:

$K\hat{M}\Lambda = K\hat{A}\Lambda$ δηλαδή $K\hat{M}\Lambda = 90^o$. Επομένως το τρίγωνο ΚΜΛ είναι ορθογώνιο.

64. Θέμα 14885

Δίνεται το οξυγώνιο και σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ. Προεκτείνουμε το ύψος του ΑΗ κατά τμήμα ΗΔ=ΑΗ και τη διάμεσό του ΑΜ κατά τμήμα ΜΕ=ΑΜ. Να αποδείξετε ότι:

α)

i. ΑΒ = ΓΕ

ii. ΑΒ = ΒΔ

(Μονάδες 8)

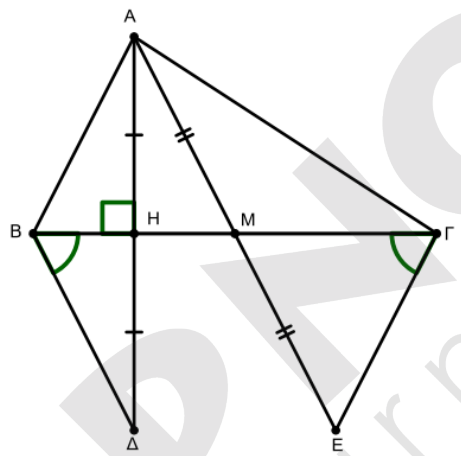
β) $\Gamma\hat{B}\Delta = B\hat{\Gamma}E$ (Μονάδες 8)

γ)

i. Εξετάστε αν το τμήμα ΒΔ μπορεί να είναι παράλληλο στο τμήμα ΓΕ.

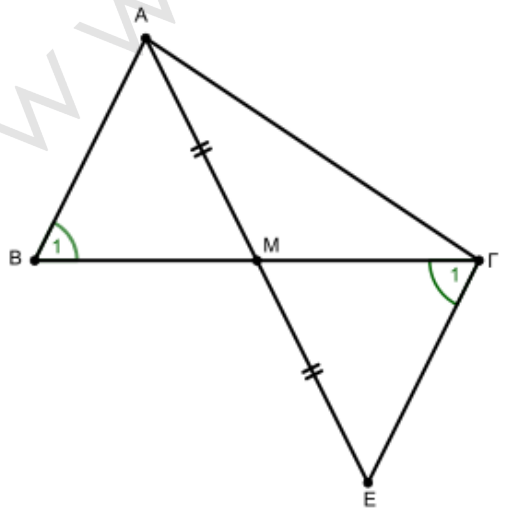
(Μονάδες 5)

ii. Ποιο είναι το είδος του τετραπλεύρου ΒΓΕΔ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. (Μονάδες 4)



ΛΥΣΗ

α)

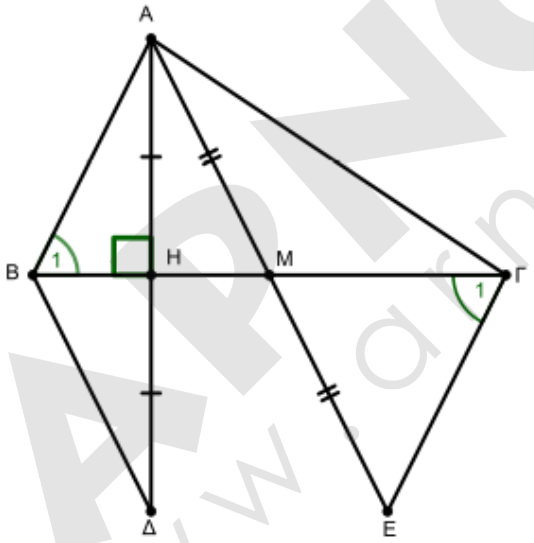


i. Τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΕΓΜ έχουν:

- ΑΜ = ΕΜ, από υπόθεση
- ΒΜ = ΓΜ, το Μ είναι μέσο του ΒΓ
- $A\widehat{M}B = E\widehat{M}\Gamma$, ως κατακορυφήν γωνίες ίσες

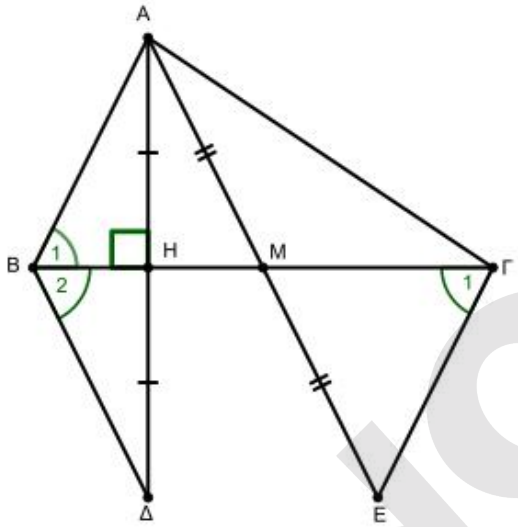
Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΕΓΜ είναι ίσα, οπότε έχουν και τις τρίτες πλευρές τους ίσες, δηλαδή ΑΒ = ΓΕ.

ii.



Από την υπόθεση έχουμε ότι ΑΗ ⊥ ΒΓ αφού ΑΗ ύψος, άρα ΒΗ ⊥ ΑΔ (1). Επίσης ΑΗ = ΗΔ από κατασκευή, άρα το σημείο Η είναι μέσο του τμήματος ΑΔ (2). Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι στο τρίγωνο ΑΒΔ το τμήμα ΒΗ είναι ύψος και διάμεσος, επομένως το τρίγωνο είναι ισοσκελές με βάση ΑΔ και ΑΒ = ΒΔ.

β)

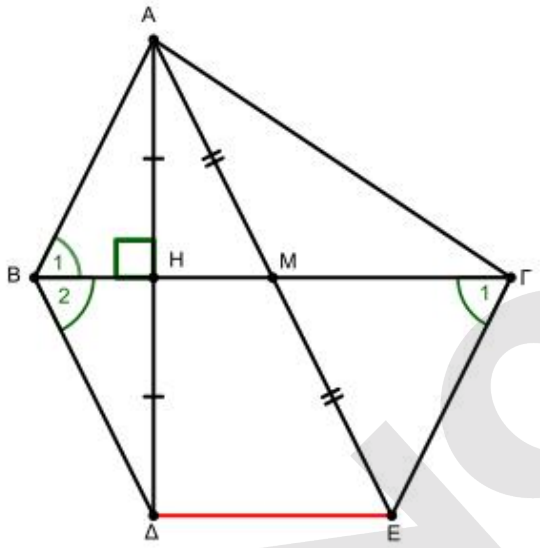


Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΔ του α) ii. ερωτήματος το τμήμα ΒΗ θα είναι και διχοτόμος της γωνίας $A\hat{B}\Delta$, άρα $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$. Στα ίσα τρίγωνα ΑΒΜ και ΕΓΜ του α) i. ερωτήματος απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΜ και ΜΕ θα βρίσκονται ίσες γωνίες, δηλαδή $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$. Οπότε τελικά $\hat{B}_2 = \hat{\Gamma}_1$ ή $\Gamma\hat{B}\Delta = B\hat{\Gamma}E$.

γ)

i. Από την ισότητα των γωνιών $\hat{B}_1$ και $\hat{\Gamma}_1$ που είναι γωνίες εντός εναλλάξ των των ΑΒ και ΓΕ τεμνομένων από το ΑΒ συμπεραίνουμε ότι ΑΒ // ΓΕ. Επειδή το τμήμα ΒΔ τέμνει το τμήμα ΑΒ, θα τέμνει και το παράλληλό του τμήμα ΓΕ. Άρα το ΒΔ δεν μπορεί να είναι παράλληλο στο ΓΕ.

ii.



Στο τρίγωνο ΑΔΕ το Η είναι μέσο του τμήματος ΑΔ και το Μ είναι μέσο του τμήματος ΑΕ από κατασκευή. Άρα το τμήμα ΗΜ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του, οπότε είναι παράλληλο στην τρίτη πλευρά, δηλαδή ΗΜ // ΔΕ ή ΒΓ // ΔΕ. Άρα το τετράπλευρο ΒΓΕΔ έχει δύο μόνο πλευρές παράλληλες, αφού δείξαμε ότι στο γ) i. ερώτημα ότι η ΒΔ δεν μπορεί να είναι παράλληλη στην ΓΕ, άρα είναι τραπέζιο. Συγχρόνως από το β) ερώτημα οι γωνίες της βάσης του ΒΓ είναι ίσες, αφού $\widehat{ΓΒΔ} = \widehat{ΒΓΕ}$, άρα το τραπέζιο είναι ισοσκελές.