Κεφ. 5.5. - Τράπεζα Θεμάτων 2022 - Γεωμετρία Α' Λυκείου

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ & ΛΥΣΕΙΣ

Η Τράπεζα Θεμάτων για τη Γεωμετρία Α' Λυκείου είναι μία μεγάλη «θάλασσα». Εμείς όμως έχουμε φροντίσει για εσένα, συγκεντρώνοντας εκείνα τα θέματα που αποτελούν τη «βάση» της γνώσης και για τα υπόλοιπα. Μελετώντας και κατανοώντας το μοτίβο σκέψης για τα συγκεκριμένα, μπορείς να λύσεις με επιτυχία και τα υπόλοιπα θέματα. Στην ιστοσελίδα μας www.arnos.gr για το Course της Γεωμετρίας, μελετάς και προετοιμάζεσαι με την αναλυτική διδασκαλία σε ασκήσεις και θέματα, στο ύφος της Τράπεζας.

Θέμα 2 - Κωδικοί:

1651, 1652, 13536, 14883

1. Θέμα 1651

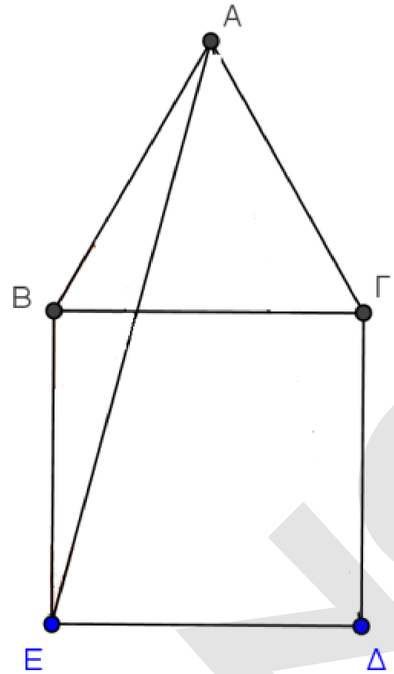
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και εκτός αυτού κατασκευάζουμε τετράγωνο ΒΓΔΕ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες

i. $A\hat{B}E$ (Μονάδες 8)

ii. $B\hat{E}A$ (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ

α) i. Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο είναι $A\hat{B}\Gamma = 60^o$.

Επίσης $E\hat{B}\Gamma = 90^o$ διότι το ΒΓΔΕ είναι τετράγωνο.

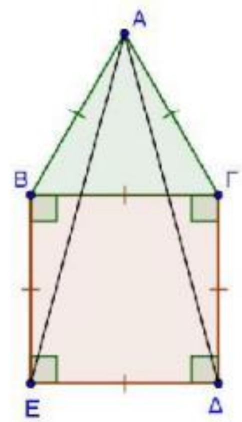
Τότε $A\hat{B}E = A\hat{B}\Gamma + E\hat{B}\Gamma = 60^o + 90^o = 150^o$

ii. Επειδή ΑΒ = ΒΓ=ΒΕ, το τρίγωνο ΒΕΑ είναι ισοσκελές

οπότε $B\hat{E}A = B\hat{A}E$ (1).

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΒΕΑ βρίσκουμε:

$B\hat{E}A + B\hat{A}E + A\hat{B}E = 180^o \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 2B\hat{E}A + 150^o = 180^o \Leftrightarrow 2B\hat{E}A = 30^o \Leftrightarrow B\hat{E}A = 15^o$



β) Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΔ έχουν:

- ΑΒ = ΑΓ, ως πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ
- ΒΕ = ΓΔ, ως πλευρές του τετραγώνου ΒΓΔΕ
- $Α\hat{Γ}Δ = Α\hat{Γ}Β + Β\hat{Γ}Δ = 60^o + 90^o = 150^o = Α\hat{Β}Ε$

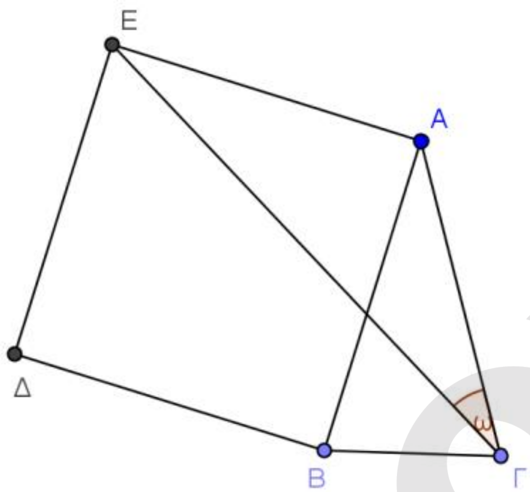
Σύμφωνα με το κριτήριο Π – Γ – Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και ΑΕ = ΑΔ, άρα το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές.

2. Θέμα 1652

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου το τετράγωνο ΑΒΔΕ. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΓΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

β) $2 \cdot Ε\hat{Γ}Α = 90^o - Β\hat{Α}Γ$. (Μονάδες 15)



ΛΥΣΗ

α) Είναι ΑΒ = ΑΕ ως πλευρές τετραγώνου και ΑΒ = ΑΓ από υπόθεση. Άρα ΑΕ = ΑΓ, οπότε το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισοσκελές.

β) Επειδή το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισοσκελές ισχύει ότι $\mathrm{A\hat{E}\Gamma} = \mathrm{E\hat{\Gamma}A}$ (1).

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΕΓ έχουμε:

$\mathrm{E\hat{A}\Gamma} + \mathrm{A\hat{E}\Gamma} + \mathrm{E\hat{\Gamma}A} = 180^o \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 2\mathrm{E\hat{\Gamma}A} + \mathrm{E\hat{A}B} + \mathrm{B\hat{A}\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow 2\mathrm{E\hat{\Gamma}A} + 90^o + \mathrm{B\hat{A}\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow$

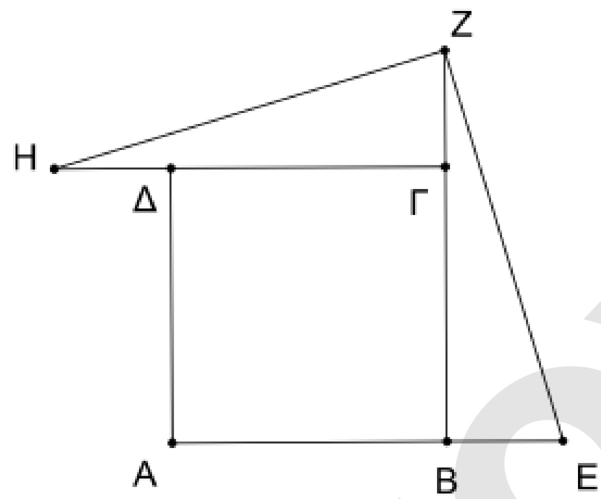
$2\mathrm{E\hat{\Gamma}A} = 90^o - \mathrm{B\hat{A}\Gamma}$

3. Θέμα 13536

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ προς το Β, ΒΓ προς το Γ και ΓΔ προς το Δ θεωρούμε σημεία Ε, Ζ και Η αντίστοιχα, ώστε ΒΕ = ΓΖ = ΔΗ.

α) Να αποδείξετε ότι ΖΕ = ΖΗ. (Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{E\hat{Z}H} = 90^o$. (Μονάδες 10)

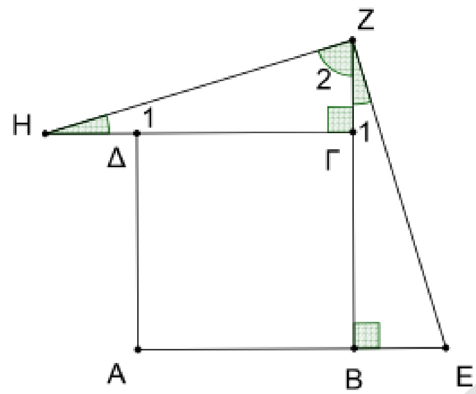


ΛΥΣΗ

α) Τα τρίγωνα ΒΕΖ και ΓΖΗ έχουν:

- $E\hat{B}Z = Z\hat{\Gamma}H = 90^o$ ως παραπληρωματικές γωνίες των ορθών γωνιών $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ του τετραγώνου ΑΒΓΔ.
- $BE = \Gamma Z$, από τα δεδομένα.
- $BZ = \Gamma H$ ως άθροισμα των ίσων τμημάτων ΒΓ, ΓΔ (πλευρές τετραγώνου) και ΒΕ, ΓΖ (δεδομένο).

Τα τρίγωνα ΒΕΖ και ΓΖΗ είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια και έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία. Άρα θα είναι $ZE = ZH$, γιατί είναι οι πλευρές απέναντι από τις ορθές γωνίες.



β) Από την ισότητα των τρίγωνων ΒΕΖ και ΓΖΗ έχουμε ότι $\hat{Z}_1 = \hat{H}_1$ (1), γιατί είναι γωνίες απέναντι από τις ίσες πλευρές ΒΕ, ΓΖ αντίστοιχα. Οι γωνίες $\hat{H}_1, \hat{Z}_2$ είναι συμπληρωματικές, γιατί είναι οι οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου ΓΖΗ, άρα $\hat{H}_1 + \hat{Z}_2 = 90^o$ (2). Από τις ισότητες (1) και (2) προκύπτει ότι $\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 = 90^o$ ή $E\hat{Z}H = 90^o$.

4. Θέμα 14883

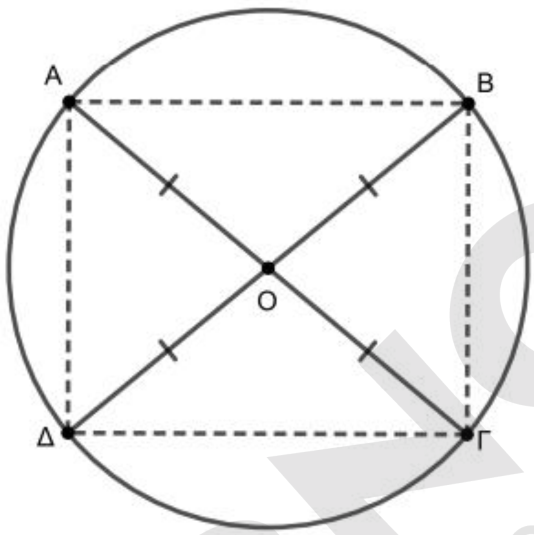
Σε κύκλο κέντρου Ο φέρουμε τις διαμέτρους του ΑΓ και ΒΔ.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 13)

β) Τί είδους γωνία σχηματίζουν οι διάμετροι ΑΓ και ΒΔ αν το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α)



Αν ρ η ακτίνα του κύκλου τότε: ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ = ΟΔ = ρ. Οπότε οι διαγώνιες ΑΓ και ΒΔ διχοτομούνται και είναι ίσες αφού ΑΓ = ΒΔ = 2ρ, άρα το τετράπλευρο είναι ορθογώνιο.

β) Αν το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, τότε οι διαγώνιοί του είναι επιπλέον κάθετες μεταξύ τους. Άρα οι διάμετροι ΑΓ και ΒΔ σχηματίζουν ορθή γωνία.

Θέμα 4 - Κωδικοί:

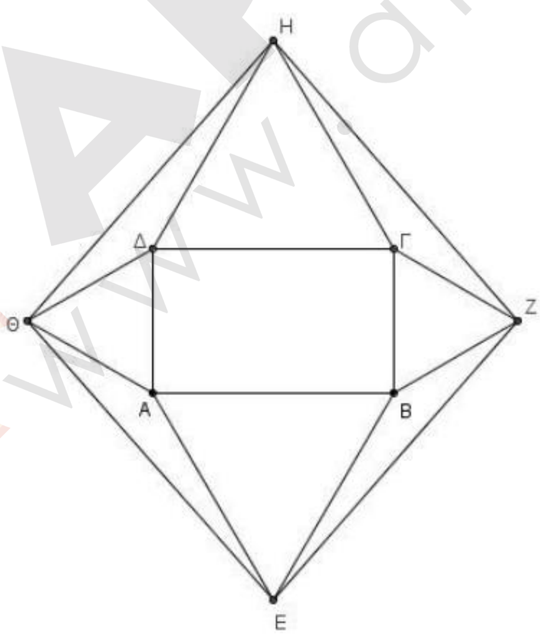
1734, 1747, 1750, 1788, 1795, 1814, 1825, 13744, 13841, 13848, 13850

5. Θέμα 1734

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ και έξω από αυτό, κατασκευάζουμε τέσσερα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΕ, ΒΓΖ, ΓΔΗ, ΔΑΘ.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι ρόμβος. (Μονάδες 15)

β) Αν το αρχικό τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, τότε το ΕΖΗΘ τι είδους παραλληλόγραμμο είναι; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)



ΛΥΣΗ

α) Τα τρίγωνα ΗΔΘ, ΘΑΕ, ΕΒΖ και ΗΓΖ έχουν:

- ΗΔ = ΑΕ = ΒΕ = ΓΗ, ως ίσες πλευρές των ίσων ισόπλευρων τριγώνων ΗΔΓ και ΕΑΒ (τα τρίγωνα ΗΔΓ και ΕΑΒ είναι ίσα επειδή έχουν όλες τις πλευρές τους ίσες με τις πλευρές ΑΔ και ΒΓ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ)
- ΘΔ = ΘΑ = ΒΖ = ΓΖ ως ίσες πλευρές των ίσων ισόπλευρων τριγώνων ΘΔΑ και ΒΓΖ (όπως πριν, τα ΘΔΑ και ΒΓΖ είναι ίσα αφού έχουν όλες τις πλευρές τους ίσες με τις πλευρές ΑΒ και ΓΔ του ΑΒΓΔ)
- $Η\hat{Δ}Θ = Θ\hat{Α}Ε = Ε\hat{Β}Ζ = Ζ\hat{Γ}Η = 360^o - 90^o - 2 \cdot 60^o = 150^o$

Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε θα έχουν ίσες και τις πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις γωνίες των 150°, δηλ. ΗΘ = ΘΕ = ΕΖ = ΖΗ.

Το τετράπλευρο ΕΖΗΘ έχει όλες του τις πλευρές ίσες, οπότε είναι ρόμβος.

β) Αν ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο τότε ισχύει ΑΒ = ΑΔ. Στα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΔΘ και ΑΕΒ είναι ΑΘ = ΑΔ και ΑΕ = ΑΒ, οπότε ΑΘ = ΑΕ. Δηλαδή, το τρίγωνο ΑΘΕ είναι ισοσκελές και οι γωνίες του $Α\hat{Θ}Ε$ και $Α\hat{Ε}Θ$ είναι ίσες. Οπότε ισχύει ότι: $Α\hat{Θ}Ε + Α\hat{Ε}Θ + Θ\hat{Α}Ε = 180^o$ $\Leftrightarrow 2Α\hat{Θ}Ε + 150^o = 180^o \Leftrightarrow Α\hat{Θ}Ε = 15^o$. Όμοια, στο τρίγωνο ΔΘΗ, βρίσκουμε $Η\hat{Θ}Δ = 15^o$.

Τότε: $Ε\hat{Θ}Η = Δ\hat{Θ}Η + Ε\hat{Θ}Α + Α\hat{Θ}Δ = 15^o + 60^o + 15^o = 90^o$

Επομένως ο ρόμβος έχει και μια γωνία ορθή, οπότε είναι τετράγωνο.

6. Θέμα 1747

Δίνεται κύκλος (O, R) με διάμετρο AB και δυο ευθείες ε_1, ε_2 εφαπτόμενες του κύκλου στα άκρα της διαμέτρου AB. Έστω ότι, μια τρίτη ευθεία ε εφάπτεται του κύκλου σ' ένα σημείο του Ε και τέμνει τις ε_1 και ε_2 στα Δ και Γ αντίστοιχα.

α) Αν το σημείο Ε δεν είναι το μέσο του τόξου AB, να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο. (Μονάδες 8)

ii. ΓΔ= ΑΔ+ΒΓ. (Μονάδες 8)

β) Αν το σημείο Ε βρίσκεται στο μέσον του τόξου AB, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΓΒ είναι ορθογώνιο. Στην περίπτωση αυτή να εκφράσετε την περίμετρο του ορθογωνίου ΑΔΓΒ ως συνάρτηση της ακτίνας R του κύκλου.

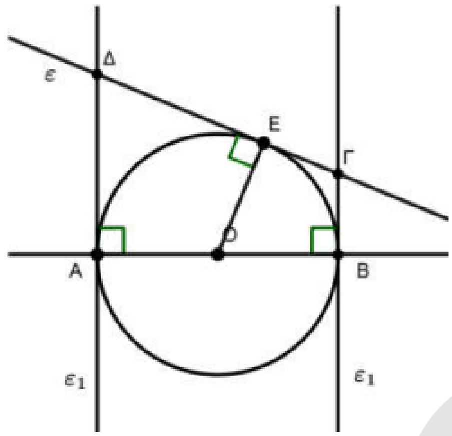
(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) i. Οι ε_1, ε_2 είναι κάθετες στην AB (εφπτόμενες που είναι κάθετες στις ακτίνες ΟΑ και ΟΒ), άρα είναι μεταξύ τους παράλληλες. Οπότε ΔΑ // ΓΒ.

Το Ε δεν είναι μέσο του τόξου AB οπότε $B\hat{O}E \neq 90^o$. Επειδή $\hat{E} = 90^o$, οι ΔΓ και AB δεν είναι παράλληλες.

Άρα το ΑΒΓΔ έχει μόνο δύο πλευρές παράλληλες, άρα είναι τραπέζιο.



ii. Τα εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από σημείο εκτός κύκλου προς αυτόν, είναι μεταξύ τους ίσα, άρα ΔΑ = ΔΕ και ΓΕ = ΓΒ. Τότε ΓΔ = ΓΕ + ΕΔ = ΒΓ + ΑΔ

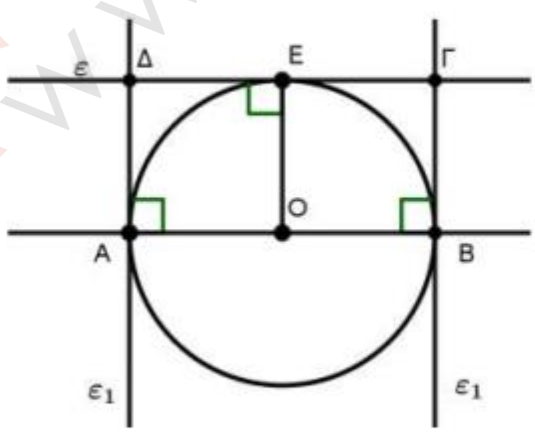
β) Εφόσον το Ε είναι μέσο του τόξου $\overset{\frown}{AB}$, για το μέτρο της γωνίας $B\hat{O}E$ ισχύει ότι

$$B\hat{O}E = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ.$$

Επιπλέον $\hat{E} = 90^o$ (η ακτίνα είναι κάθετη στην αντίστοιχη εφαπτομένη).

Οπότε οι ΓΔ και ΑΒ είναι παράλληλες (εφόσον είναι κάθετες στην ΟΕ).

Αφού είναι και ΑΔ//ΒΓ, το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. Και αφού έχει μια ορθή γωνία (πχ. $\hat{B} = 90^o$) θα είναι ορθογώνιο.



Το ΟΒΓΕ είναι τετράγωνο (έχει τρεις ορθές γωνίες και ΟΒ=ΟΕ), οπότε ισχύει ότι ΟΒ = ΓΒ = R.

Οπότε και ΑΔ=ΒΓ=R και ΓΔ=ΑΒ=2R (απέναντι πλευρές του ΑΒΓΔ). Έτσι, η περίμετρος του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι: ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΑΔ = 2R + R + 2R + R = 6R

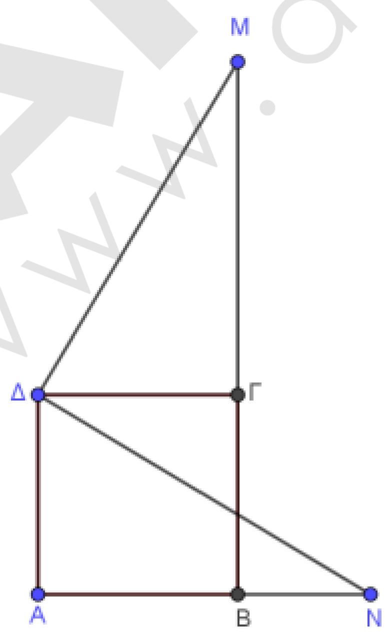
7. Θέμα 1750

Στο τετράγωνο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ κατά τμήμα ΒΝ και την πλευρά ΒΓ κατά τμήμα ΓΜ = ΑΝ.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΔΝ = ΔΜ (Μονάδες 12)

β) ΔΝ ⊥ ΔΜ (Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ

α) Τα τρίγωνα ΑΔΝ και ΔΓΜ είναι ορθογώνια και έχουν:

- ΑΔ = ΔΓ, ως πλευρές του τετραγώνου
- ΓΜ = ΑΝ, από υπόθεση

Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΝ και ΔΓΜ έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία, οπότε είναι ίσα. Από την ισότητα αυτή προκύπτει ότι και οι αντίστοιχες πλευρές τους ΔΝ και ΔΜ είναι ίσες, δηλαδή ΔΝ = ΔΜ.

β) Από την προηγούμενη ισότητα τριγώνων προκύπτει ότι οι γωνίες που είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές ΓΜ και ΑΝ είναι ίσες, δηλαδή $M\hat{\Delta}\Gamma = A\hat{\Delta}N$. Τότε:

$M\hat{\Delta}N = M\hat{\Delta}\Gamma + \Gamma\hat{\Delta}N = A\hat{\Delta}N + \Gamma\hat{\Delta}N = A\hat{\Delta}\Gamma = 90^o$.

8. Θέμα 1788

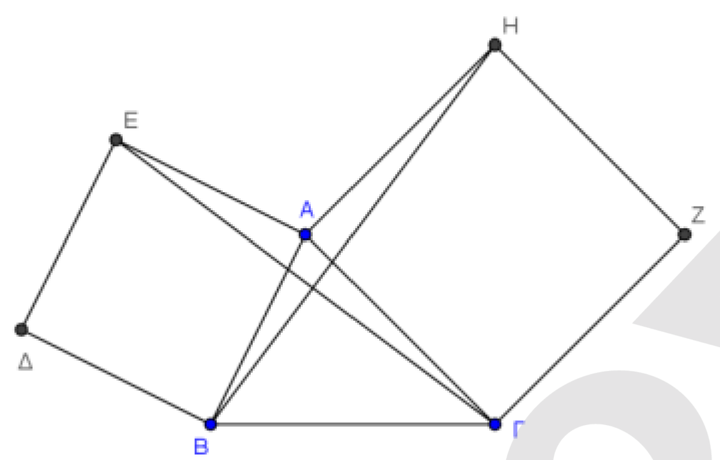
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και στο εξωτερικό του σχηματίζονται τα τετράγωνα ΑΒΔΕ και ΑΓΖΗ.

Να αποδείξετε ότι:

α) $E\hat{A}H = A\hat{B}\Gamma + A\hat{\Gamma}B$ (Μονάδες 8)

β) ΕΓ = ΒΗ (Μονάδες 9)

γ) Η ΕΓ είναι κάθετη στη ΒΗ. (Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ

α) Ισχύει ότι:

$B\hat{A}E + B\hat{A}\Gamma + H\hat{A}\Gamma + E\hat{A}H = 360^o \Leftrightarrow 90^o + B\hat{A}\Gamma + 90^o + E\hat{A}H = 360^o \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow E\hat{A}H = 180^o - B\hat{A}\Gamma$ (1).

Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ βρίσκουμε:

$A\hat{B}\Gamma + A\hat{\Gamma}B + B\hat{A}\Gamma = 180^o \Leftrightarrow A\hat{B}\Gamma + A\hat{\Gamma}B = 180^o - B\hat{A}\Gamma$ (2)

Από (1), (2) προκύπτει ότι: $E\hat{A}H = A\hat{B}\Gamma + A\hat{\Gamma}B$.

β) Τα τρίγωνα ΑΕΓ και ΑΒΗ έχουν:

ΑΓ = ΑΗ, ως πλευρές του τετραγώνου ΑΓΖΗ

$E\hat{A}\Gamma = H\hat{A}B$, διότι $E\hat{A}\Gamma = E\hat{A}B + B\hat{A}\Gamma = 90^o + B\hat{A}\Gamma$ και

$H\hat{A}B = H\hat{A}\Gamma + B\hat{A}\Gamma = 90^o + B\hat{A}\Gamma$

ΑΒ = ΑΕ, ως πλευρές του τετραγώνου ΑΒΔΕ

Σύμφωνα με το κρτήριο Π – Γ – Π τα τρίγωνα ΑΕΓ και ΑΒΗ είναι ίσα οπότε ισχύει και ΕΓ = ΒΗ διότι είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες ΕΑΓ και ΒΑΗ.

γ) Έστω Θ το σημείο τομής των ΕΓ, ΒΗ και Κ το σημείο τομής των ΕΓ, ΑΒ.

Επειδή τα τρίγωνα ΕΑΓ και ΗΑΒ είναι ίσα, ισχύει ότι: $A\hat{E}\Gamma = A\hat{B}H$ (3) διότι είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΗ και ΑΓ.

Επίσης $E\hat{K}A = B\hat{K}\Gamma$ (4) ως κατακορυφήν.

Στο τρίγωνο ΑΕΚ είναι: $A\hat{E}\Gamma + E\hat{K}A = 90^o \overset{(3),(4)}{\Longleftrightarrow} A\hat{B}H + B\hat{K}\Gamma = 90^o$ (5).

Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΒΚΘ βρίσκουμε:

$B\hat{\Theta}K + A\hat{B}H + B\hat{K}\Gamma = 180^o \overset{(5)}{\Leftrightarrow} B\hat{\Theta}K + 90^o = 180^o \Leftrightarrow B\hat{\Theta}K = 90^o$. Άρα $E\Gamma \perp BH$.

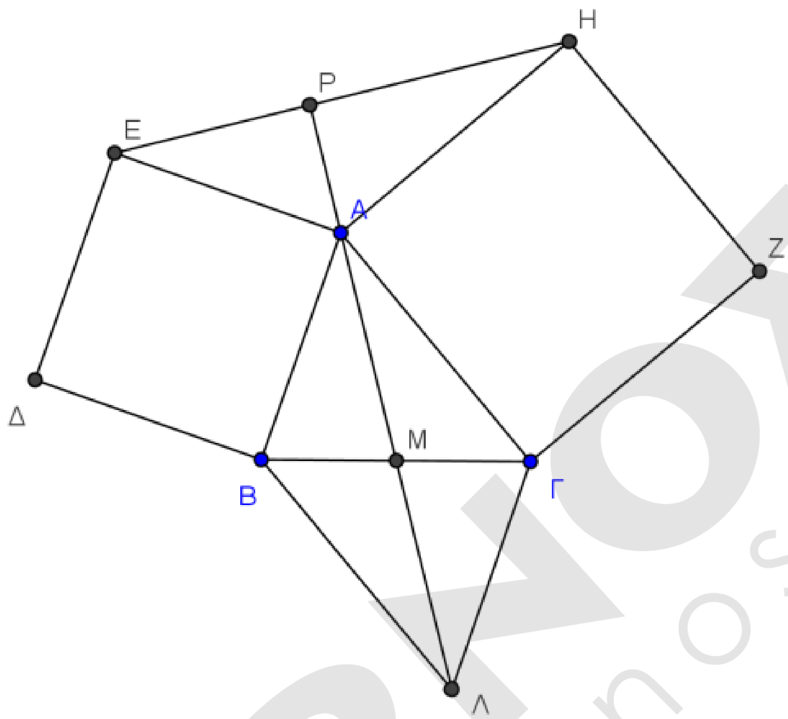
9. Θέμα 1795

Εκτός τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε τετράγωνα ΑΒΔΕ και ΑΓΖΗ. Αν Μ το μέσο του ΒΓ και Λ σημείο στην προέκταση της ΑΜ τέτοιο ώστε ΑΜ = ΜΛ, να αποδείξετε ότι:

α) ΓΛ = ΑΕ. (Μονάδες 10)

β) Οι γωνίες ΑΓΛ και ΕΑΗ είναι ίσες. (Μονάδες 10)

γ) Η προέκταση της ΜΑ (προς το Α) τέμνει κάθετα την ΕΗ. (Μονάδες 5)



ΛΥΣΗ

α) Στο τετράπλευρο ΑΒΛΓ οι διαγώνιές του διχοτομούνται, αφού Μ μέσο του ΒΓ και ΑΜ = ΜΛ από υπόθεση. Άρα είναι παραλληλόγραμμο και ΓΛ = ΑΒ. Επίσης ΑΕ = ΑΒ γιατί είναι πλευρές τετραγώνου, άρα ΓΛ = ΑΕ.

β) Είναι $E\hat{A}B = H\hat{A}\Gamma = 90^o$, οπότε ισχύει ότι

$E\hat{A}H + B\hat{A}\Gamma = 180^o \Leftrightarrow E\hat{A}H = 180^o - B\hat{A}\Gamma$

Το τετράπλευρο ΑΒΛΓ είναι παραλληλόγραμμο και οι γωνίες $B\hat{A}\Gamma$ και $A\hat{\Gamma}\Lambda$ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ,ΓΔ που τέμνονται από την ΑΓ. Άρα είναι παραπληρωματικές, δηλαδή $B\hat{A}\Gamma + A\hat{\Gamma}\Lambda = 180^o \Leftrightarrow A\hat{\Gamma}\Lambda = 180^o - B\hat{A}\Gamma$.

Οπότε $A\hat{\Gamma}\Lambda = E\hat{A}H$.

γ) Τα τρίγωνα ΕΑΗ και ΑΓΛ έχουν:

- ΑΓ= ΑΗ, ως πλευρές του τετραγώνου ΑΓΖΗ
- ΓΛ = ΑΕ, όπως αποδείξαμε στο (α) ερώτημα
- $A\hat{\Gamma}\Lambda = E\hat{A}H$, όπως αποδείξαμε στο (β) ερώτημα

Σύμφωνα το κριτήριο Π–Γ–Π, τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $P\hat{H}A = \Gamma\hat{A}\Lambda$ διότι βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΕ, ΓΛ αντίστοιχα. Ισχύει ότι:

$P\hat{A}H + H\hat{A}\Gamma + \Lambda\hat{A}\Gamma = 180^o \Leftrightarrow P\hat{A}H + 90^o + P\hat{H}A = 180^o \Leftrightarrow P\hat{A}H + P\hat{H}A = 90^o$.

Άρα το τρίγωνο ΡΑΗ είναι ορθογώνιο στο Ρ οπότε $MA \perp EH$.

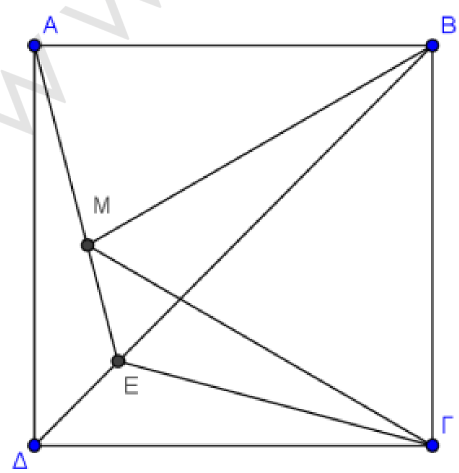
10. Θέμα 1814

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και εντός αυτού ισόπλευρο τρίγωνο ΜΒΓ. Αν η προέκταση της ΑΜ τέμνει την ΒΔ στο σημείο Ε, να αποδείξετε ότι:

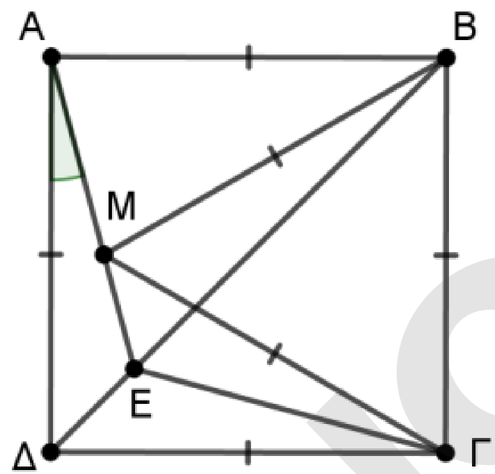
α) $\Delta\hat{A}E = 15^o$. (Μονάδες 8)

β) Τα τρίγωνα ΔΑΕ και ΔΕΓ είναι ίσα. (Μονάδες 8)

γ) Η ΓΕ είναι διχοτόμος της γωνίας ΔΓΜ. (Μονάδες 9)



ΛΥΣΗ



α) Επειδή το τρίγωνο ΒΜΓ είναι ισόπλευρο ισχύει ότι $M\hat{B}\Gamma = 60^o$.

Επίσης οι γωνίες $A\hat{B}M$ και $M\hat{B}\Gamma$ είναι συμπληρωματικές.

Άρα $A\hat{B}M + M\hat{B}\Gamma = 90^o \Leftrightarrow A\hat{B}M + 60^o = 90^o \Leftrightarrow A\hat{B}M = 30^o$.

Ισχύει ακόμη ότι ΒΜ = ΜΓ = ΒΓ, ως πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου ΜΒΓ. Επίσης ΒΑ = ΒΓ ως πλευρές του τετραγώνου ΑΒΓΔ. Άρα ΒΑ = ΒΜ οπότε το τρίγωνο ΒΑΜ είναι ισοσκελές και ισχύει $B\hat{A}M = B\hat{M}A$. Τότε από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΒΜ βρίσκουμε:

$A\hat{B}M + B\hat{A}M + B\hat{M}A = 180^o \Leftrightarrow 30^o + 2B\hat{A}M = 180^o \Leftrightarrow B\hat{A}M = 75^o$.

Όμως οι γωνίες $\Delta\hat{A}E$ και $B\hat{A}M$ είναι συμπληρωματικές.

Άρα $\Delta\hat{A}E = 90^o - B\hat{A}M = 90^o - 75^o = 15^o$.

β) Τα τρίγωνα ΔΑΕ και ΔΕΓ έχουν:

- ΔΕ κοινή πλευρά
- ΔΑ = ΔΓ, ως πλευρές του τετραγώνου ΑΒΓΔ
- $A\hat{\Delta}E = E\hat{\Delta}\Gamma$ διότι η διαγώνιος του τετραγώνου διχοτομεί τις γωνίες του

Σύμφωνα με το κριτήριο Π – Γ – Π, τα τρίγωνα είναι ίσα.

γ) Από την προηγούμενη ισότητα τριγώνων ισχύει ότι $\Delta\hat{A}E = \Delta\hat{\Gamma}E \Leftrightarrow \Delta\hat{\Gamma}E = 15^o$ (1), καθώς οι γωνίες $\Delta\hat{A}E$ και $\Delta\hat{\Gamma}E$ βρίσκονται απέναντι από την κοινή πλευρά ΔΕ, των ίσων τριγώνων.

Επειδή το ΒΓΜ είναι ισόπλευρο ισχύει ότι $B\hat{\Gamma}M = 60^o$.

Επίσης $\Delta\hat{\Gamma}B = \Delta\hat{\Gamma}E + E\hat{\Gamma}M + B\hat{\Gamma}M = 15^o + E\hat{\Gamma}M + 60^o$.

Όμως $\Delta\hat{\Gamma}B = 90^o$, άρα $15^o + E\hat{\Gamma}M + 60^o = 90^o \Leftrightarrow E\hat{\Gamma}M = 15^o$ (2).

Από (1) και (2) βρίσκουμε $\Delta\hat{\Gamma}E = E\hat{\Gamma}M$, άρα η ΓΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{\Gamma}M$.

11. Θέμα 1825

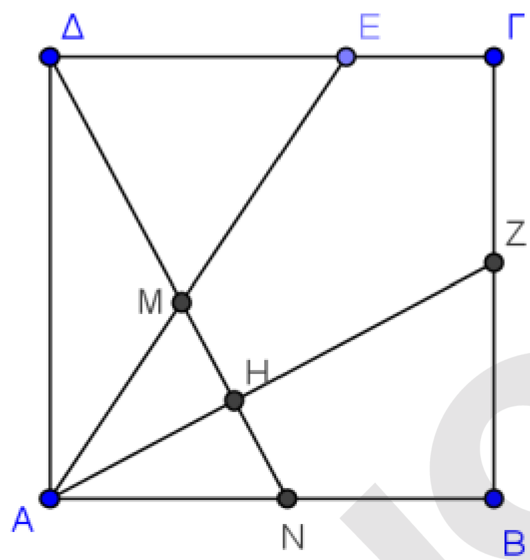
Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και τυχαίο σημείο Ε στην πλευρά ΔΓ. Φέρουμε τη διχοτόμο ΑΖ της γωνίας ΕΑΒ και τη ΔΗ κάθετη από το Δ προς την ΑΖ, η οποία τέμνει την ΑΕ στο Μ και την ΑΒ στο Ν.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΔΝ και ΑΒΖ είναι ίσα. (Μονάδες 8)

β) ΑΜ=ΑΝ και ΔΕ=ΕΜ. (Μονάδες 10)

γ) ΑΕ=ΔΕ+ΒΖ (Μονάδες 7)



ΛΥΣΗ

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΖ ($\hat{B} = 90^{\circ}$), από το άθροισμα των γωνιών του, η γωνία $A\hat{Z}B$ είναι συμπληρωματική της $Z\hat{A}B$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΗΝ ($A\hat{H}N = 90^{\circ}$), από το άθροισμα των γωνιών του, η γωνία $A\hat{N}H$ είναι συμπληρωματική της $H\hat{A}N$ ή αλλιώς $Z\hat{A}B$.

Επομένως, $A\hat{Z}B = A\hat{N}H$, ως συμπληρωματικές στην ίδια γωνία.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΔΝ και ΑΒΖ.

- Είναι ορθογώνια.
- $A\hat{Z}B = A\hat{N}\Delta$, γιατί $A\hat{Z}B = A\hat{N}H$.
- ΑΔ = ΑΒ, ως πλευρές του ίδιου τετραγώνου.

Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΝ και ΑΒΖ είναι ίσα, γιατί έχουν μία κάθετη πλευρά και μία οξεία γωνία, ίσες μία προς μία.

β) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΗΜ και ΑΗΝ.

- Είναι ορθογώνια, γιατί η ΔΗ είναι κάθετη στην ΑΖ, από την υπόθεση.
- ΑΗ κοινή πλευρά.
- $M\hat{A}H = N\hat{A}H$, γιατί η ΑΖ είναι διχοτόμος της γωνίας $M\hat{A}N$.

Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΗΜ και ΑΗΝ είναι ίσα, καθώς έχουν μια κοινή κάθετη πλευρά και από μία οξεία γωνία ίση. Συνεπώς ΑΜ = ΑΝ, καθώς είναι οι υποτείνουσές τους.

Οι γωνίες $E\hat{\Delta}N = A\hat{N}M$ (1) ως εντός και εναλλάξ των παραλλήλων ΔΓ και ΑΒ με τέμνουσα την ΔΝ.

Επίσης $\Delta\hat{M}E = A\hat{M}N$ (2), ως κατακορυφήν.

Όμως, το τρίγωνο ΑΜΝ είναι ισοσκελές με βάση την ΜΝ, καθώς ΑΜ = ΑΝ.

Άρα, $A\hat{M}N = A\hat{N}M$ (3).

Από (1), (2) και (3) είναι $\Delta\hat{M}E = E\hat{\Delta}N$. Άρα το τρίγωνο ΔΕΝ είναι ισοσκελές με βάση ΔΜ και ΔΕ = ΕΜ.

γ) Είναι ΑΕ = ΑΜ + ΜΕ.

Όμως, από το β) ΑΜ = ΑΝ και ΜΕ = ΔΕ, άρα ΑΕ = ΑΝ + ΔΕ.

Από τα ίσα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΝ και ΑΒΖ έχουμε ότι ΑΝ = ΒΖ, καθώς είναι οι δύο άλλες κάθετες πλευρές τους, πέρα από τις ΑΔ και ΑΒ (οι οποίες είναι ίσες).

Επομένως ΑΕ = ΒΖ + ΔΕ.

12. Θέμα 13744

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Στις προεκτάσεις των πλευρών του ΑΒ και ΒΓ προς το Β και προς το Γ αντίστοιχα, παίρνουμε τα σημεία Ε και Ζ τέτοια ώστε ΒΕ = ΓΖ. Αν Ρ είναι το σημείο τομής των ΑΖ και ΔΕ, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Οι γωνίες $A\hat{E}\Delta$ και $B\hat{Z}A$ είναι ίσες.

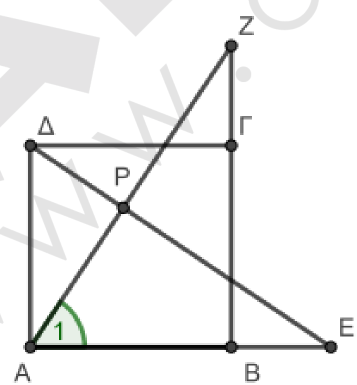
ii. Τα τμήματα ΑΖ και ΔΕ είναι κάθετα.

(Μονάδες 18)

β) Αν γνωρίζετε ότι το σημείο τομής Ρ των ΑΖ και ΔΕ είναι τέτοιο ώστε ΡΒ = ΑΒ, να προσδιορίσετε τη θέση του σημείου Ε στην προέκταση του τμήματος ΑΒ. (Μονάδες 07)

ΛΥΣΗ

α)



i. ΑΒ = ΒΓ, ως πλευρές του τετραγώνου, ΒΕ = ΓΖ, από την υπόθεση. Προσθέτοντας κατά μέλη τις ισότητες έχουμε ΑΕ=ΒΖ (1), ως αθροίσματα ίσων τμημάτων.

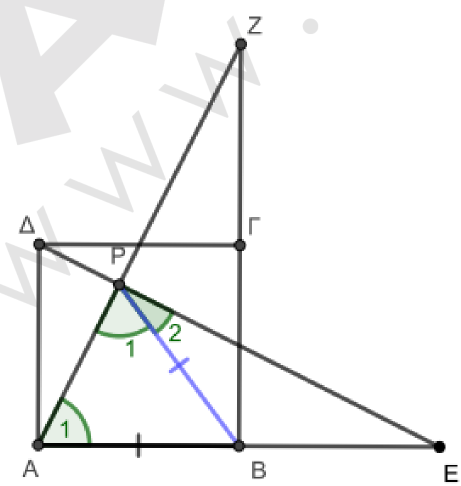
Στα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΖ:

- ΑΔ = ΑΒ, ως πλευρές του τετραγώνου ΑΒΓΔ
- ΑΕ = ΒΖ, από τη σχέση (1)
- $\Delta\hat{A}E = A\hat{B}Z = 90^o$

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΖ έχουν τις κάθετες πλευρές τους μια προς μία ίσες, οπότε είναι ίσα. Οι γωνίες $A\hat{E}\Delta$ και $B\hat{Z}A$ είναι ίσες γιατί είναι γωνίες απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΔ και ΑΒ αντίστοιχα.

ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΖ το άθροισμα των δύο οξειών γωνιών του είναι 90^o. Δηλαδή ισχύει $\hat{A}_1 + B\hat{Z}A = 90^o$, αλλά $B\hat{Z}A = A\hat{E}\Delta$, από το α)i. ερώτημα, οπότε $\hat{A}_1 + A\hat{E}\Delta = 90^o$ ή $\hat{A}_1 + A\hat{E}P = 90^o$ (όπου Ρ το σημείο τομής των ΑΖ και ΔΕ). Στο τρίγωνο ΑΕΡ το άθροισμα δύο γωνιών του είναι 90^o, οπότε η τρίτη γωνία του θα είναι 90^o. Δηλαδή $A\hat{P}E = 90^o$, έτσι τα τμήματα ΑΖ και ΔΕ είναι κάθετα.

β)



Από την υπόθεση ΡΒ = ΑΒ , άρα το τρίγωνο ΒΑΡ είναι ισοσκελές, οπότε $\hat{A}_1 = \hat{P}_1$, ως προσκείμενες γωνίες στη βάση του. Από το προηγούμενο ερώτημα $\hat{A}_1$ + $A\hat{E}P = 90^o$, ως άθροισμα των οξειών γωνιών ορθογωνίου τριγώνου, οπότε $\hat{P}_1 + A\hat{E}P = 90^o$ (1). Επιπλέον ισχύει $\hat{P}_1 + \hat{P}_2 = 90^o$ (2) επειδή $A\hat{P}E = 90^o$ από το α)ii. Από τις (1) και (2) έχουμε $A\hat{E}P = \hat{P}_2$, ή $B\hat{E}P = \hat{P}_2$, άρα το τρίγωνο ΒΕΡ είναι ισοσκελές με ΕΒ = ΡΒ. Όμως ΡΒ = ΑΒ, από υπόθεση, οπότε ΒΕ = ΑΒ και η θέση του σημείου Ε προσδιορίζεται στην προέκταση του ΑΒ ώστε ΒΕ = ΑΒ.

13. Θέμα 13841

Σε τρίγωνο ΑΒΓ, ΒΔ η διχοτόμος της γωνίας Β και Μ το μέσο της. Από το σημείο Δ φέρουμε παράλληλη προς τη ΒΓ, η οποία τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ε. Αν η ΕΜ τέμνει τη ΒΓ στο σημείο Ζ τότε:

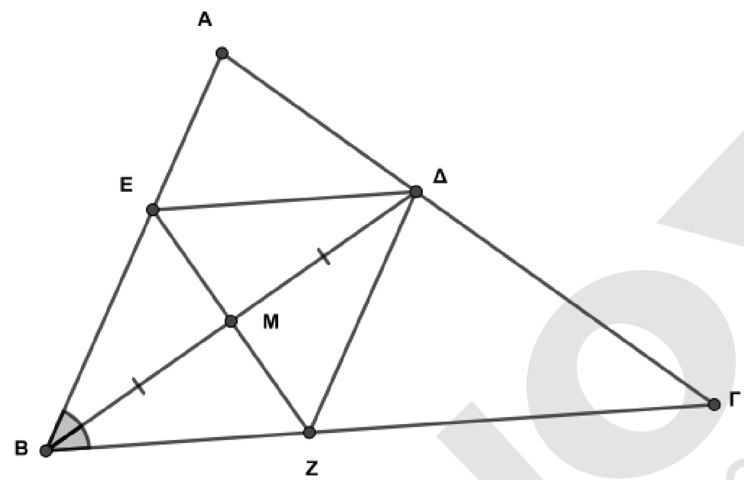
α) Να αποδείξετε ότι ΒΕ=ΕΔ. (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι ΒΕ//ΖΔ. (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι ρόμβος. (Μονάδες 5)

δ) Ποιο θα έπρεπε να είναι το είδος του τριγώνου ΑΒΓ ώστε το τετράπλευρο ΔΕΒΖ να είναι τετράγωνο; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ



α) Από υπόθεση γνωρίζουμε ότι ΔΕ//ΒΓ άρα $\Delta\widehat{B}Z=E\widehat{\Delta}B$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΕΔ και ΒΖ που τέμνονται από την ΒΔ. Από υπόθεση γνωρίζουμε ότι η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B}$, άρα $\Delta\widehat{B}Z=\Delta\widehat{B}E$. Συνεπώς $E\widehat{\Delta}B = \Delta\widehat{B}E$ ως ίσες με την $\Delta\widehat{B}Z$, άρα το τρίγωνο ΒΕΔ είναι ισοσκελές με ΒΕ=ΕΔ.

β) Συγκρίνω τα τρίγωνα ΒΜΖ και ΔΜΕ τα οποία έχουν:

i. ΒΜ=ΜΔ (υπόθεση)

ii. $\Delta\widehat{B}Z=E\widehat{\Delta}B$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΕΔ και ΒΖ που τέμνονται από την ΒΔ)

iii. $B\widehat{M}Z=\Delta\widehat{M}E$ (ως κατακορυφήν)

Τα τρίγωνα ΒΜΖ, ΔΜΕ είναι ίσα γιατί έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, άρα και ΒΖ=ΔΕ ως απέναντι πλευρές από τις ίσες γωνίες $B\widehat{M}Z$ και $\Delta\widehat{M}E$.

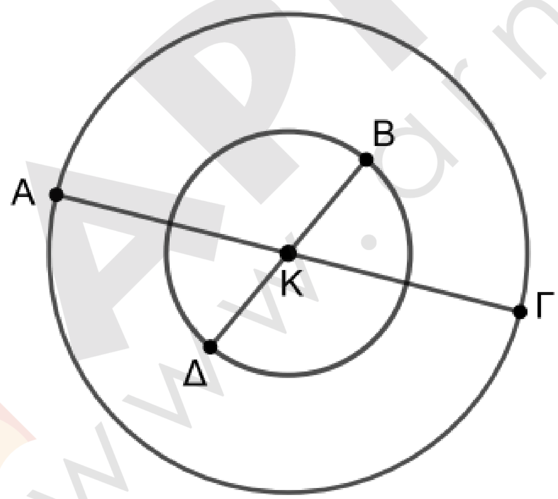
Το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο αφού έχει τις πλευρές του ΒΖ και ΔΕ παράλληλες και ίσες άρα και ΒΕ//ΖΔ (ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου).

γ) Από το α) ερώτημα έχουμε ΒΕ=ΕΔ, άρα το παραλληλόγραμμο ΔΕΒΖ είναι ρόμβος αφού έχει δυο διαδοχικές πλευρές του ίσες.

δ) Για να είναι το τετράπλευρο ΔΕΒΖ τετράγωνο, εφόσον είναι ρόμβος, πρέπει η γωνία $\widehat{B}$ να είναι ορθή. Όταν η γωνία $\widehat{B}$ είναι ορθή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Β.

14. Θέμα 13848

Στο παρακάτω σχήμα οι κύκλοι έχουν κέντρο Κ και οι ΑΓ και ΒΔ είναι διάμετροί τους.



α) Αν ισχύει ΑΓ>ΒΔ:

i. να σχεδιάσετε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ και να αποδείξετε ότι είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 8)

ii. να διατυπώσετε μια επιπλέον υπόθεση για τις ΑΓ και ΒΔ, ώστε το ΑΒΓΔ να είναι ρόμβος. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

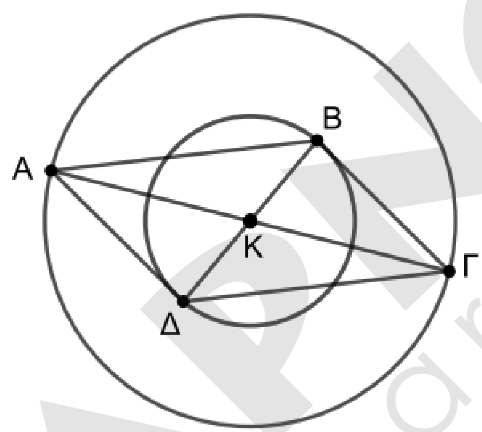
β) Αν οι δύο κύκλοι ταυτίζονται, τότε να εξετάσετε αν ο ακόλουθος ισχυρισμός είναι αληθής:

«Το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο».

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

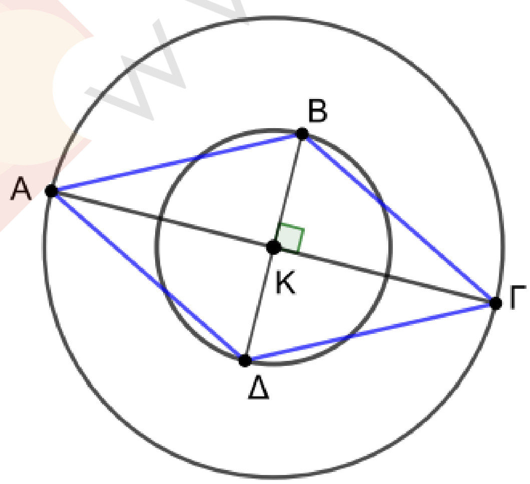
(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

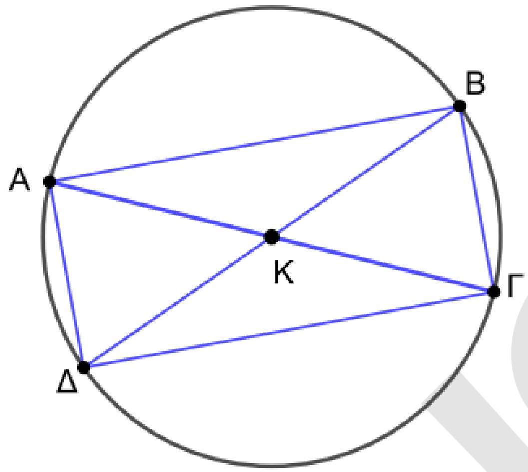


α) i. Ισχύει ότι ΒΚ = ΚΔ ως ακτίνες του ίδιου κύκλου (Κ, ΚΒ). Ομοίως ΑΚ = ΚΓ στον κύκλο με κέντρο Κ και ακτίνα ΑΓ.

Άρα οι διαγώνιοι του ΑΒΓΔ διχοτομούνται, επομένως είναι παραλληλόγραμμο.



ii. Αν οι ΑΓ και ΒΔ είναι κάθετες τότε το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ έχει κάθετες διαγωνίους. Συνεπώς είναι ρόμβος. Άρα η επιπλέον υπόθεση είναι ότι «οι ΑΓ και ΒΔ είναι κάθετες».



β) Αν οι κύκλοι ταυτίζονται, τότε ΑΓ = ΒΔ. Συνεπώς οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι ίσες. Επομένως το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο. Για να είναι τετράγωνο πρέπει επιπλέον οι ΑΓ και ΒΔ να είναι κάθετες, κάτι που δεν αναφέρεται στην υπόθεση του β).

Ο ισχυρισμός δεν είναι αληθής καθώς το ΑΒΓΔ δεν είναι αναγκαία τετράγωνο.

15. Θέμα 13850

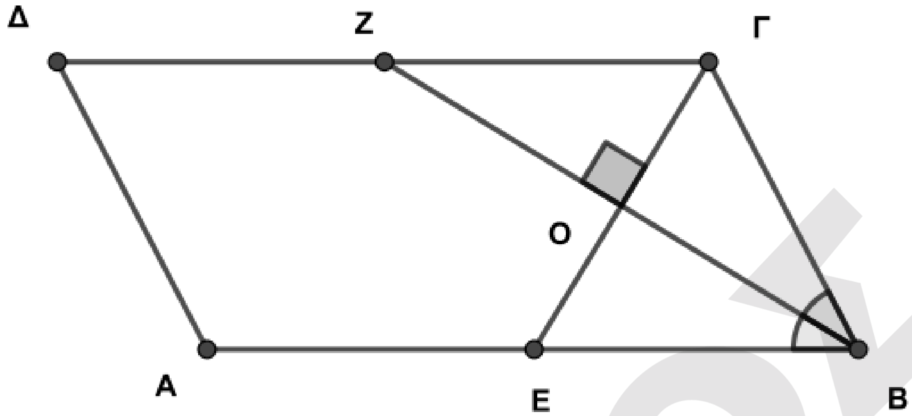
Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ του σχήματος και η ΒΖ διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B}$. Φέρουμε ΓΟ κάθετη στη ΒΖ και την προεκτείνουμε έτσι ώστε να τέμνει την ΑΒ στο σημείο Ε.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΖΓ και ΟΒΕ είναι ίσα. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΒΓΖ είναι ρόμβος (Μονάδες 6)

δ) Πόσο πρέπει να είναι το μέτρο της γωνίας $\widehat{B}$ ώστε το τετράπλευρο ΕΒΓΖ να είναι τετράγωνο; (Μονάδες 4)



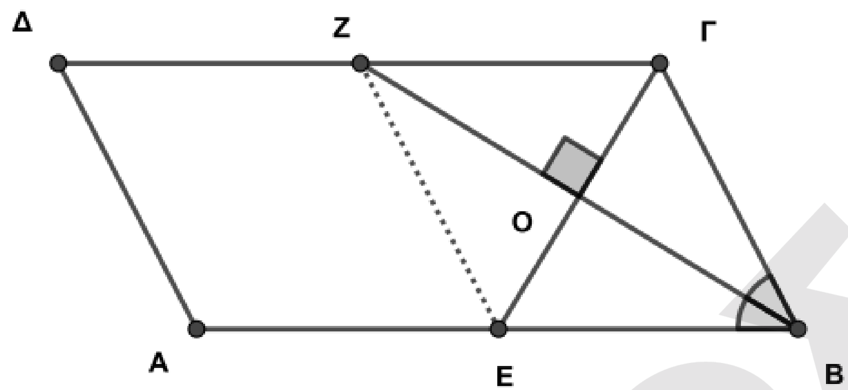
ΛΥΣΗ

α) Έχουμε ΒΖ διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B}$ και ΒΟ ⊥ ΓΕ από υπόθεση. Συνεπώς το τμήμα ΒΟ στο τρίγωνο ΕΒΓ είναι ύψος και διχοτόμος άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά ΕΓ.

β) Συγκρίνω τα τρίγωνα ΟΖΓ και ΟΒΕ τα οποία έχουν:

i. $Γ\widehat{O}Z=E\widehat{O}B=90^o$
ii. ΟΓ=ΟΕ (Ο μέσο της ΓΕ γιατί το ΒΟ είναι διχοτόμος άρα και διάμεσος του ισοσκελούς τριγώνου ΕΒΓ)
iii. $Z\widehat{Γ}O=B\widehat{E}O$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΒΕ, ΓΖ που τέμνονται από την ΓΕ)

Τα τρίγωνα ΟΖΓ, ΟΒΕ είναι ίσα γιατί είναι ορθογώνια, που έχουν μια κάθετη πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία ίσες μία προς μία.



γ) Από τη σύγκριση στο ερώτημα β) έχουμε ΟΖ=ΟΒ ως πλευρές των ίσων τριγώνων ΖΟΓ και ΒΟΕ απέναντι από τις ίσες γωνίες $Z\hat{\Gamma}O$ και $B\hat{E}O$ και ΟΓ=ΟΕ (Ο μέσο της ΓΕ γιατί το ΒΟ είναι διχοτόμος άρα και διάμεσος του ισοσκελούς τριγώνου ΕΒΓ). Το τετράπλευρο ΕΒΓΖ είναι παραλληλόγραμμο αφού οι διαγώνιοι ΓΕ και ΒΖ διχοτομούνται στο σημείο Ο και επειδή είναι και κάθετες από υπόθεση ($BZ \perp \Gamma E$) είναι ρόμβος.

δ) Για να είναι το τετράπλευρο ΕΒΓΖ τετράγωνο θα πρέπει να είναι εκτός από ρόμβος (ερώτημα γ)) και ορθογώνιο άρα θα πρέπει $\hat{B}=90^o$.