Κεφ. 5.4. - Τράπεζα Θεμάτων 2022 - Γεωμετρία Α' Λυκείου

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ & ΛΥΣΕΙΣ

Η Τράπεζα Θεμάτων για τη Γεωμετρία Α' Λυκείου είναι μία μεγάλη «θάλασσα». Εμείς όμως έχουμε φροντίσει για εσένα, συγκεντρώνοντας εκείνα τα θέματα που αποτελούν τη «βάση» της γνώσης και για τα υπόλοιπα. Μελετώντας και κατανοώντας το μοτίβο σκέψης για τα συγκεκριμένα, μπορείς να λύσεις με επιτυχία και τα υπόλοιπα θέματα. Στην ιστοσελίδα μας www.arnos.gr για το Course της Γεωμετρίας, μελετάς και προετοιμάζεσαι με την αναλυτική διδασκαλία σε ασκήσεις και θέματα, στο ύφος της Τράπεζας.

Θέμα 2 - Κωδικοί:

1570, 1575, 1584, 1630, 1679, 1681, 1697, 13767, 13832, 13842

1. Θέμα 1570

Θεωρούμε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ και το ύψος του ΑΔ. Προεκτείνουμε το ΑΔ (προς το Δ) κατά τμήμα ΔΕ=ΑΔ. Έστω Κ το συμμετρικό του Β ως προς το Δ.

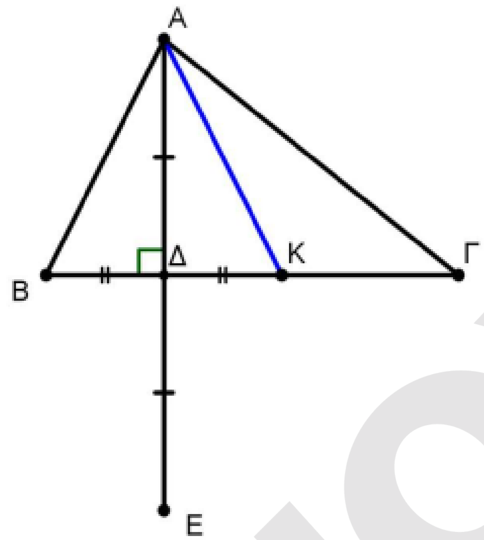
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΒΚ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)

β) Το τετράπλευρο ΑΒΕΚ είναι ρόμβος. (Μονάδες 13)

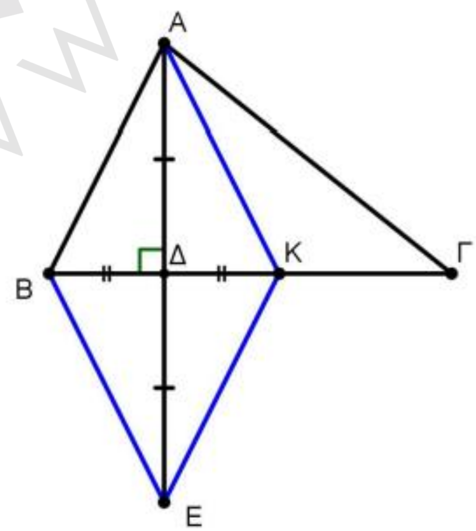
ΛΥΣΗ

α) Στο τρίγωνο ΑΒΚ το ΑΔ είναι ύψος και διάμεσος, άρα η ΑΔ είναι η μεσοκάθετος του ΒΚ. Οπότε το τρίγωνο ΑΒΚ είναι ισοσκελές.



Μια άλλη πορεία λύσης είναι να συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΚΔ για να συμπεράνουμε ότι ΑΒ=ΑΚ.

β) Ισχύει ότι $ΔΕ = ΑΔ$, $ΒΔ = ΔΚ$ και $ΑΕ \perp ΒΚ$. Άρα στο τετράπλευρο ΑΒΕΚ οι διαγώνιοί του διχοτομούνται και είναι κάθετες, επομένως είναι ρόμβος.



2. Θέμα 1575

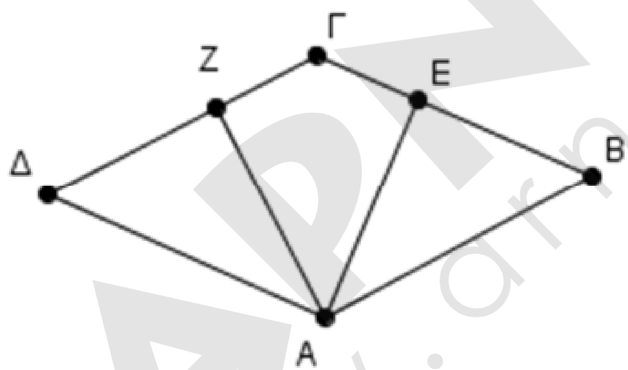
Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος είναι παραλληλόγραμμο. Έστω ότι $AE \perp B\Gamma$ και $AZ \perp \Delta\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Αν το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος, τότε ΑΖ=ΑΕ. (Μονάδες 12)

β) Αν για το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ ισχύει ΑΖ=ΑΕ, τότε αυτό είναι ρόμβος.

(Μονάδες 13)

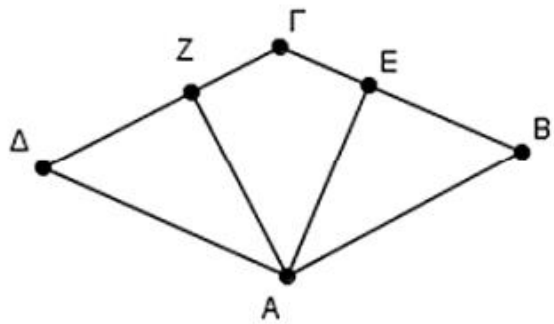


ΛΥΣΗ

α) Έστω ότι το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος. Τότε τα τρίγωνα ΑΖΔ και ΑΕΒ είναι ορθογώνια και έχουν:

- ΑΔ = ΑΒ ως πλευρές του ρόμβου
- $\widehat{\Delta} = \widehat{B}$, ως απέναντι γωνίες του ρόμβου

Οπότε έχουν την υποτείνουσα και μία οξεία γωνία ίσες μία προς μία. Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν ίσες και τις πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες οξείες γωνίες, δηλαδή ΑΖ = ΑΕ.



β) Έστω ότι στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ ισχύει ΑΖ = ΑΕ.

Τα τρίγωνα ΑΖΔ και ΑΕΒ είναι ορθογώνια και έχουν:

- ΑΖ = ΑΕ από υπόθεση
- $\widehat{\Delta} = \widehat{B}$, ως απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου

Επειδή τα τρίγωνα έχουν μία κάθετη πλευρά και μία οξεία γωνία ίσες μία προς μία, θα είναι ίσα. Οπότε θα έχουν και τις υποτείνουσες ίσες, δηλαδή ΑΔ = ΑΒ.

Επειδή στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες, είναι ρόμβος

3. Θέμα 1584

Σε κύκλο κέντρου Ο, έστω ΟΑ μία ακτίνα του. Φέρουμε τη μεσοκάθετη της ΟΑ που τέμνει τον κύκλο στα σημεία Β και Γ. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΟΒΑ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 13)

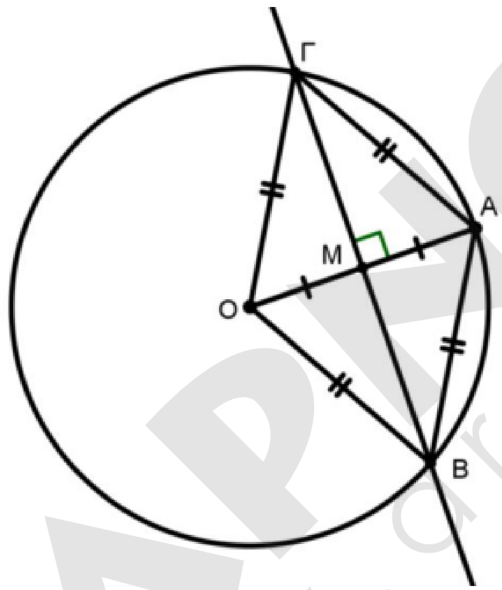
β) Το τετράπλευρο ΟΒΑΓ είναι ρόμβος. (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Αν ρ η ακτίνα του κύκλου, τότε ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ = ρ.

Στο τρίγωνο ΑΒΟ το ΒΜ είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές, οπότε ΑΒ = ΟΒ.

Στο τρίγωνο ΑΒΟ ισχύει ΑΒ = ΟΒ = ΟΑ = ρ, οπότε είναι ισόπλευρο.



β) Στο τρίγωνο ΓΑΟ το ΓΜ είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές, οπότε ΑΓ= ΟΓ = ρ. Τελικά, το τετράπλευρο ΟΒΑΓ έχει και τις τέσσερις πλευρές του ίσες με την ακτίνα του κύκλου, οπότε είναι ρόμβος.

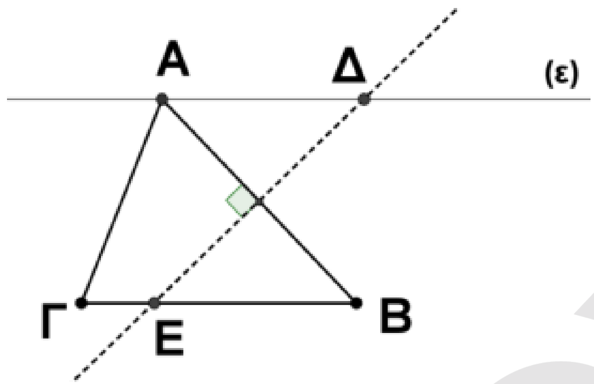
4. Θέμα 1630

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΓΒ. Φέρουμε από τη κορυφή Α ευθεία (ε) παράλληλη στη ΒΓ. Η μεσοκάθετος της πλευράς ΑΒ τέμνει την (ε) στο Δ και την ΒΓ στο Ε.

α) Να αποδείξετε ότι ΔΑ=ΔΒ και ΕΑ=ΕΒ. (Μονάδες 6)

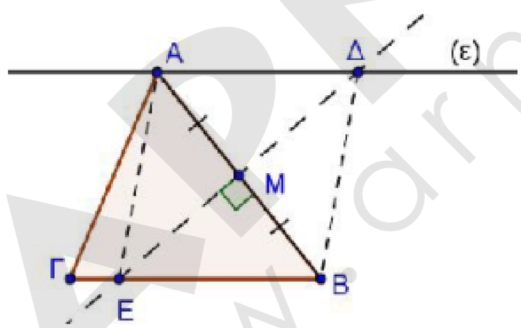
β) Αν Μ το μέσο του ΑΒ, να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΕΜΒ. (Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΒΕ είναι ρόμβος. (Μονάδες 9)



ΛΥΣΗ

α) Τα σημεία Ε, Δ ανήκουν στη μεσοκάθετο του ΑΒ άρα ισαπέχουν από τα σημεία Α και Β, ισχύει δηλαδή ΔΑ = ΔΒ και ΕΑ = ΕΒ.



β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΜΔ και ΕΜΒ έχουν:

ΑΜ = ΜΒ, διότι το Μ είναι μέσο του ΑΒ και

$M\widehat{A}\Delta = M\widehat{B}E$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων (ε), ΒΓ που τέμνονται από την ΑΒ.

Άρα τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΕΜΒ είναι ίσα επειδή έχουν τις υποτείνουσες ίσες και μια οξεία γωνία ίση μία προς μία.

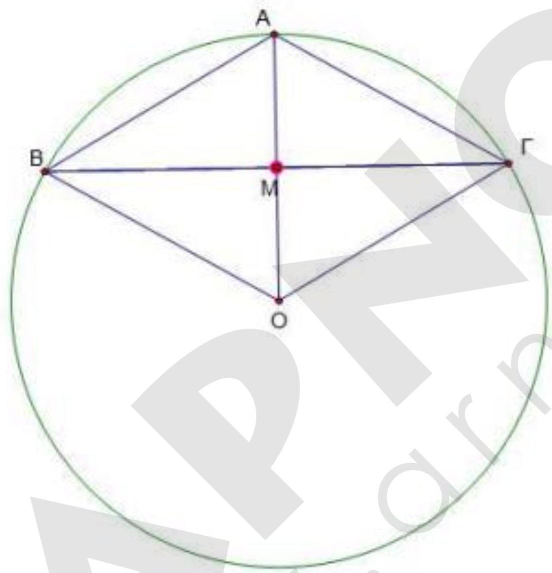
γ) Από την ισότητα των τριγώνων ΑΜΔ και ΜΕΒ, προκύπτει ότι ΜΔ = ΜΕ (απέναντι από τις ίσες γωνίες $M\widehat{A}\Delta$, $M\widehat{B}E$). Άρα, στο τετράπλευρο ΑΔΒΕ οι διαγώνιοί του διχοτομούνται κάθετα, οπότε είναι ρόμβος.

5. Θέμα 1679

Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Θεωρούμε την ακτίνα ΟΑ και τη χορδή ΒΓ κάθετη στην ΟΑ στο μέσο της Μ.

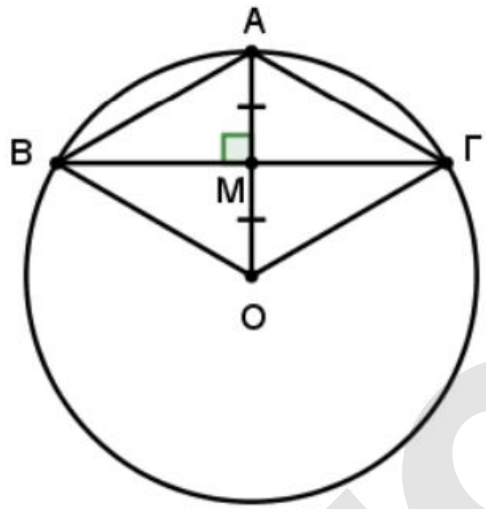
α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΓΟΒ είναι ρόμβος. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΓΟΒ. (Μονάδες 15)



ΛΥΣΗ

α) Επειδή ΟΜ ⊥ ΒΓ, το ΟΜ είναι απόστημα της χορδής ΒΓ, οπότε το Μ είναι μέσο της. Από υπόθεση το Μ είναι μέσο και της ΟΑ. Άρα τα τμήματα ΟΑ και ΒΓ του ΑΓΟΒ διχοτομούνται. Αυτό σημαίνει ότι το ΑΓΟΒ είναι παραλληλόγραμμο. Επιπλέον ΟΑ⊥ ΒΓ, δηλαδή οι διαγώνιες του παραλληλογράμμου ΑΓΟΒ είναι κάθετες. Άρα το ΑΓΟΒ είναι ρόμβος.



β) Στο τρίγωνο ΒΟΑ η ΒΜ είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές, οπότε ΒΟ = ΒΑ. Τότε ΟΑ = ΒΟ = ΒΑ = ρ, οπότε το τρίγωνο ΒΟΑ είναι ισόπλευρο και επομένως ισχύει $B\hat{O}A = B\hat{A}O = O\hat{B}A = 60^o$.

Όμοια, το ΓΜ είναι ύψος και διάμεσος του τριγώνου ΟΓΑ, οπότε αυτό είναι ισοσκελές με ΟΑ = ΟΓ= ρ. Τότε ΟΑ = ΟΓ = ΓΑ = ρ, οπότε το τρίγωνο ΓΟΑ είναι ισόπλευρο και επομένως ισχύει $\Gamma\hat{O}A = \Gamma\hat{A}O = O\hat{\Gamma}A = 60^o$.

Είναι $B\hat{O}\Gamma = 60^o + 60^o = 120^o = B\hat{A}\Gamma$.

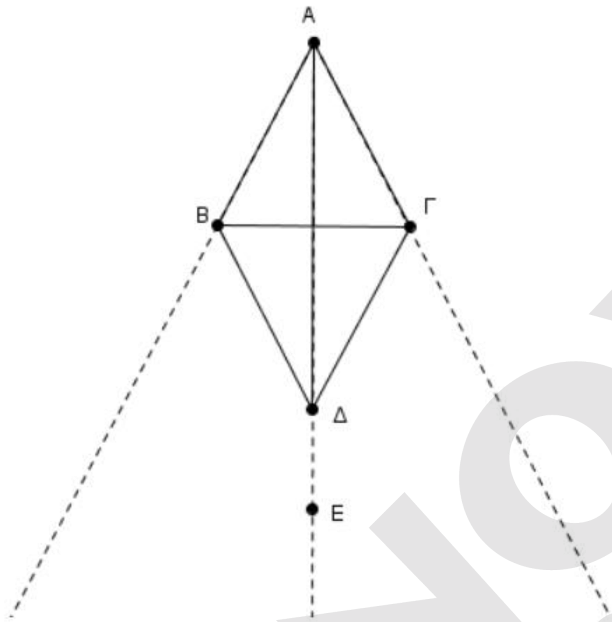
6. Θέμα 1681

Δίνεται ρόμβος ΑΒΔΓ. Στην προέκταση της διαγωνίου ΑΔ (προς το Δ) παίρνουμε τυχαίο σημείο Ε.

Να αποδείξετε ότι:

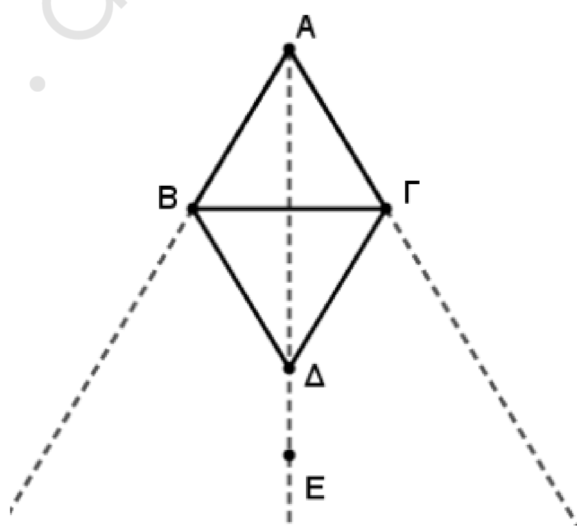
α) Το σημείο Ε ισαπέχει από τις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΓ (προς το μέρος των Β και Γ αντίστοιχα). (Μονάδες 10)

β) Το σημείο Ε ισαπέχει από τα σημεία Β και Γ. (Μονάδες 15)

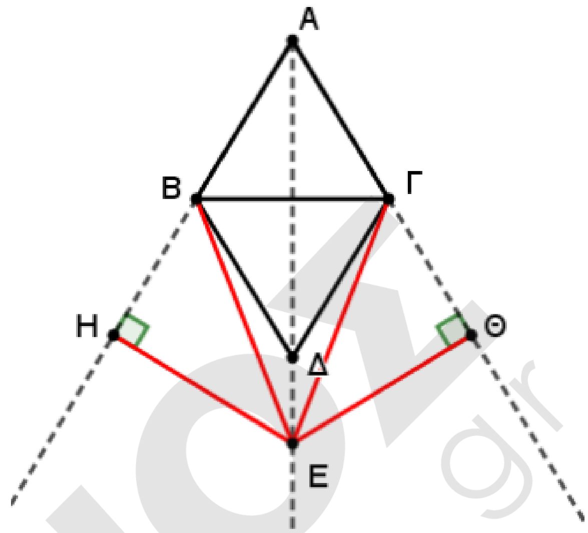


ΛΥΣΗ

α) Οι διαγώνιες του ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του οπότε η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$. Επειδή το Ε είναι σημείο της διχοτόμου της γωνίας Α, ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας, δηλαδή ισαπέχει από τις ΑΒ και ΑΓ.



β) Οι διαγώνιες του ρόμβου διχοτομούνται κάθετα, άρα η ΑΔ είναι μεσοκάθετος της ΒΓ. Επειδή το Ε ανήκει στη μεσοκάθετο του ΒΓ, ισαπέχει από τα Β και Γ.



7. Θέμα 1697

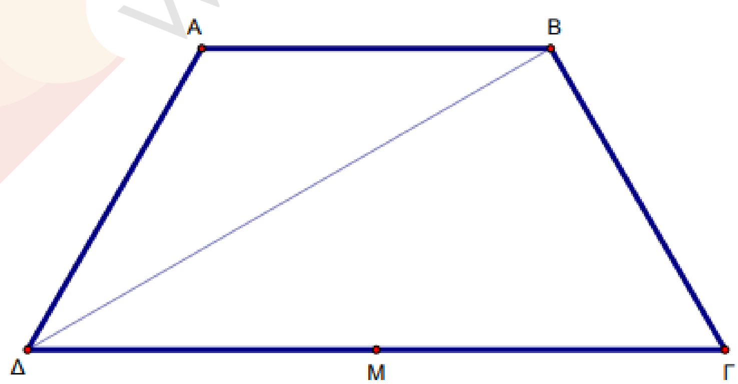
Στο τραπέζιο του παρακάτω σχήματος έχουμε ΑΒ=ΑΔ=$\frac{ΓΔ}{2}$, $\hat{Δ}=60°$ και Μ το μέσο της πλευράς ΓΔ.

Να αποδείξετε ότι:

α) η ΔΒ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{Δ}$, (Μονάδες 9)

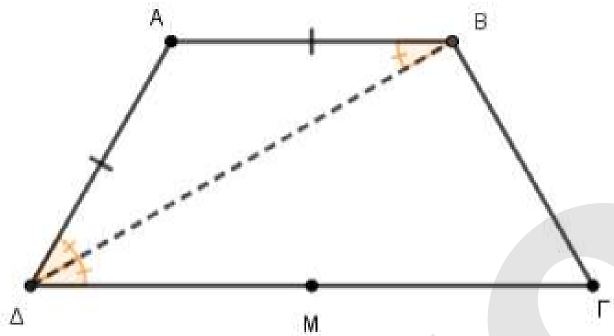
β) η ΒΜ χωρίζει το τραπέζιο σε ένα ρόμβο και ένα ισόπλευρο τρίγωνο.

(Μονάδες 16)



ΛΥΣΗ

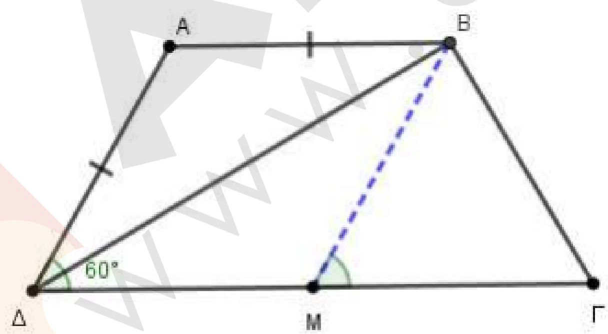
α)



Είναι $\Gamma\hat{\Delta}B = A\hat{B}\Delta$ (1) ως εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων ΑΒ και ΓΔ με τέμνουσα την ΒΔ. Επειδή είναι ΑΒ = ΑΔ, το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με βάση την ΒΔ, άρα $A\hat{\Delta}B = A\hat{B}\Delta$ (2).

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $A\hat{\Delta}B = \Gamma\hat{\Delta}B$, άρα η ΔΒ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta}$.

β)



Φέρνουμε το τμήμα ΒΜ. Επειδή ΑΒ // ΔΓ ως βάσεις του τραπεζίου ΑΒΓΔ, άρα ΑΒ // ΔΜ. Αφού είναι $AB = \frac{\Gamma\Delta}{2}$ και το Μ είναι μέσο του ΔΓ από την υπόθεση, άρα ΑΒ =ΔΜ.

Οπότε, το τετράπλευρο ΑΔΜΒ έχει τις απέναντι πλευρές του ΑΒ και ΔΜ παράλληλες και ίσες άρα είναι παραλληλόγραμμο. Επειδή είναι ΑΒ = ΑΔ από την υπόθεση άρα το παραλληλόγραμμο ΑΔΜΒ έχει δύο διαδοχικές πλευρές του ίσες, οπότε είναι ρόμβος. Επειδή το ΑΔΜΒ είναι ρόμβος, ισχύει ότι ΒΜ = ΔΜ. Και αφού ΔΜ = ΜΓ γιατί Μ είναι μέσο του ΔΒ, τότε θα είναι ΒΜ = ΜΓ. Οπότε το τρίγωνο ΒΜΓ είναι ισοσκελές.

Αφού $\widehat{\Delta} = 60^o$ τότε και $B\widehat{M}\Gamma = \widehat{\Delta} = 60^o$ ως γωνίες εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΔ και ΒΜ με τέμνουσα την ΔΓ.

Επειδή το ισοσκελές τρίγωνο ΒΜΓ έχει τη γωνία της κορυφής του ίση με 60^o θα είναι ισόπλευρο.

8. Θέμα 13767

Σε ευθεία ε θεωρούμε τα διαδοχικά σημεία Α, Β και Γ έτσι ώστε ΑΒ = ΒΓ. Στη συνέχεια, σχεδιάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΕ προς το ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ε όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\Delta\widehat{B}E$.

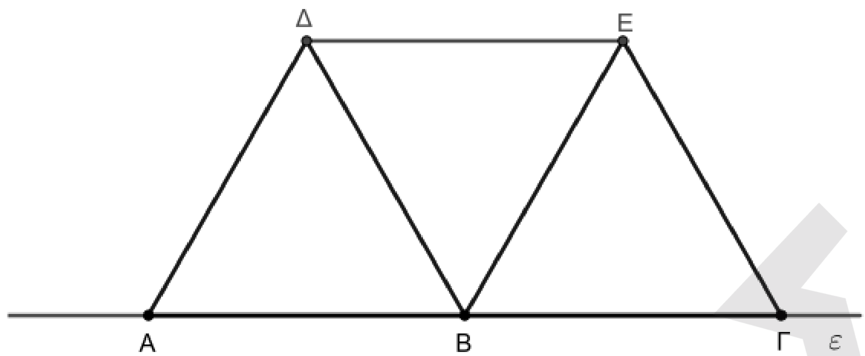
(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισόπλευρο.

(Μονάδες 10)

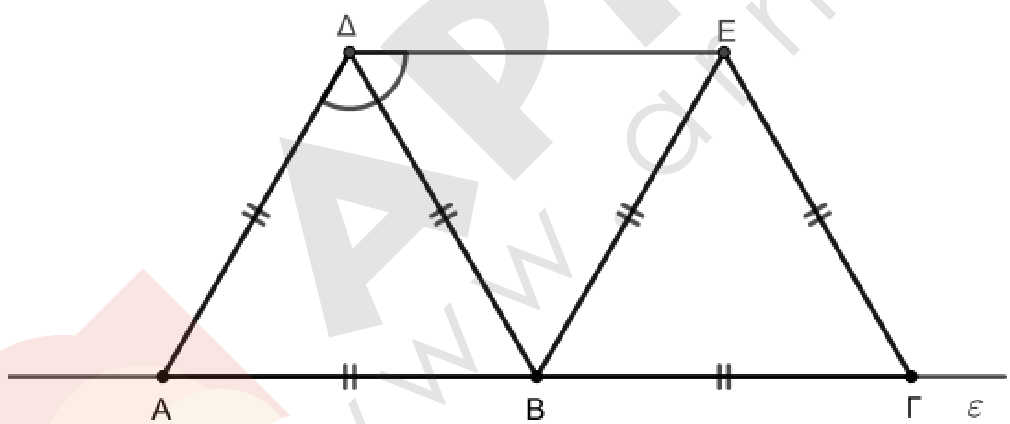
γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΕΒ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τα διαδοχικά σημεία Α, Β και Γ πάνω σε ευθεία ε έτσι ώστε ΑΒ = ΒΓ και κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΕ προς το ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ε.



α) Οι γωνίες των ισόπλευρων τριγώνων ΑΒΔ και ΒΓΕ είναι 60° καθεμιά.

Η γωνία $\hat{ΑΒΓ}$ είναι ευθεία, οπότε:

$Α\hat{Β}Δ + Δ\hat{Β}Ε + Ε\hat{Β}Γ = 180^\circ$ ή $60^\circ + Δ\hat{Β}Ε + 60^\circ = 180^\circ$

Άρα, $Δ\hat{Β}Ε = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$

β) Για τις πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΔ ισχύει:

$$ΑΒ = ΑΔ = ΒΔ \quad (1)$$

Για τις πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου ΒΓΕ ισχύει:

$$ΒΓ = ΒΕ = ΓΕ \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $ΒΔ = ΒΕ$, αφού $ΑΒ = ΒΓ$ από υπόθεση. Επομένως, το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές με βάση ΔΕ, οπότε οι γωνίες που είναι προσκείμενες στη βάση θα είναι ίσες. Συνεπώς, $Β\hat{Δ}Ε = Β\hat{Ε}Δ$ (3).

Στο τρίγωνο ΒΔΕ ισχύει:

$Β\hat{Δ}Ε + Β\hat{Ε}Δ + Δ\hat{Β}Ε = 180^\circ$ ή $Β\hat{Δ}Ε + Β\hat{Δ}Ε + 60^\circ = 180^\circ$ ή $2Β\hat{Δ}Ε = 120^\circ$

Άρα, $Β\hat{Δ}Ε = 60^\circ$ και $Β\hat{Ε}Δ = 60^\circ$ λόγω της σχέσης (3).

Αφού οι γωνίες του τριγώνου ΒΔΕ είναι ίσες με 60° καθεμιά, συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισόπλευρο.

γ) Για τις πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου ΒΔΕ ισχύει:

$$ΔΕ = ΒΕ = ΒΔ \quad (4)$$

Το τετράπλευρο ΑΔΕΒ έχει όλες τις πλευρές του ίσες, αφού $ΑΔ = ΑΒ = ΒΕ = ΔΕ$ από τις σχέσεις (1), (2) και (4), οπότε είναι ρόμβος.

9. Θέμα 13832

Στο σχήμα το Μ είναι μέσο των τμημάτων ΑΓ και ΒΔ. Επίσης $Α\widehat{Μ}Β = Γ\widehat{Μ}Β$.

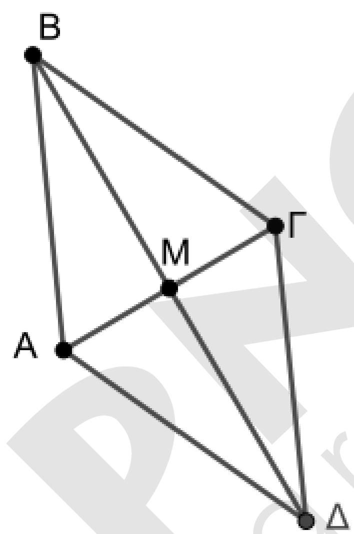
α) Να αποδείξετε ότι:

i. Οι ΑΓ και ΒΔ είναι κάθετες. (Μονάδες 10)

ii. Το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)

β) Το ΑΒΓΔ είναι η κάτοψη ενός κήπου. Για να περιφράξουμε τον κήπο χρειαζόμαστε 30 μέτρα φράχτη. Αν αφήσουμε την πλευρά ΑΒ του κήπου χωρίς φράχτη πόσα μέτρα φράχτη θα χρειαστούμε για τις υπόλοιπες πλευρές;

(Μονάδες 7)



ΛΥΣΗ

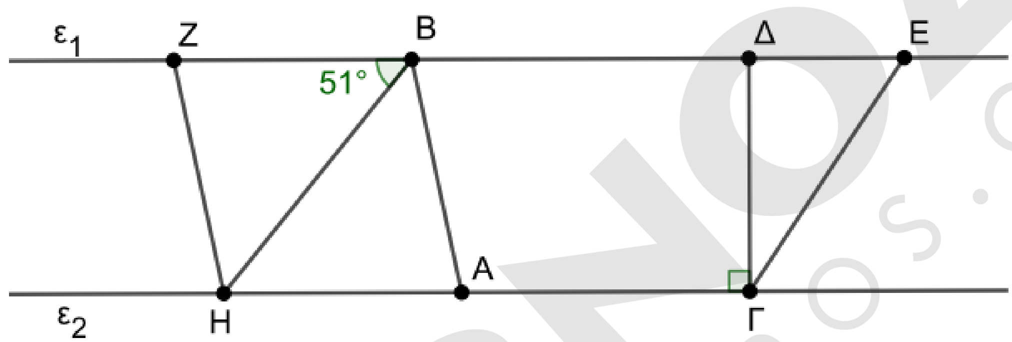
α) i. Οι γωνίες $A\widehat{M}B$ και $\Gamma\widehat{M}B$ είναι παραπληρωματικές. Όμως σύμφωνα με την υπόθεση είναι και ίσες. Άρα η κάθε μια είναι ορθή γωνία, δηλαδή $A\widehat{M}B = \Gamma\widehat{M}B = 90^o$. Επομένως οι ΒΔ και ΑΓ είναι κάθετες.

ii. Το Μ είναι μέσο των διαγωνίων του ΑΒΓΔ, άρα οι διαγώνιές του διχοτομούνται. Επομένως το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

Επιπλέον από το ερώτημα αi) οι ΑΓ και ΒΔ είναι κάθετες. Επομένως το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος, γιατί είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιες του ΑΓ και ΒΔ είναι κάθετες.

β) Το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος επομένως θα έχει όλες τις πλευρές του ίσες. Άρα κάθε πλευρά του κήπου χρειάζεται 7,5 μέτρα φράχτη. Συνεπώς, αν αφήσουμε την πλευρά ΑΒ χωρίς φράχτη, θα χρειαστούμε 30 – 7,5 = 22, 5 μέτρα φράχτη.

10. Θέμα 13842



Στο παραπάνω σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΖΗ είναι ρόμβος.

Επίσης δίνεται ότι $Z\hat{B}H = 51^o$ και ότι η $A\hat{\Gamma}\Delta$ είναι ορθή.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία $A\hat{B}H$. (Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $A\hat{H}B$. (Μονάδες 6)

γ) Αν η γωνία $\hat{E}$ του τριγώνου ΓΔΕ είναι ίση με 56°, να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΓΔΕ. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Εφόσον το ΑΒΖΗ είναι ρόμβος η διαγώνιός του ΒΗ διχοτομεί τη γωνία του $A\hat{B}Z$.

Επομένως $A\hat{B}H = Z\hat{B}H = 51^o$.

β) Οι ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες, γιατί οι ΒΖ και ΑΗ είναι παράλληλες, ως απέναντι πλευρές ρόμβου. Άρα οι $Z\hat{B}H$ και $A\hat{H}B$ είναι ίσες ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ε_1 και ε_2 με τέμνουσα την ΒΗ. Άρα $A\hat{H}B = 51^o$.

γ) Η ΓΔ τέμνει κάθετα την $ε_2$ από την υπόθεση (εφόσον η γωνία $Α\hat{Γ}Δ$ είναι ορθή), συνεπώς τέμνει κάθετα και την $ε_1$ που είναι παράλληλη της $ε_2$.

Άρα η γωνία $Γ\hat{Δ}Ε$ είναι ορθή και το τρίγωνο ΓΔΕ είναι ορθογώνιο. Άρα οι οξείες γωνίες του $\hat{Γ}$ και $\hat{Ε}$ είναι συμπληρωματικές. Επομένως $\hat{Γ} = 90^o - \hat{Ε} = 90^o - 56^o = 34^o$.

Θέμα 4 - Κωδικοί:
1740, 1755, 1767, 1823, 1860, 1853, 1869, 13539, 13857

11. Θέμα 1740

Δίνονται οι ακόλουθες προτάσεις Π1 και Π2:

Π1: Αν ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, τότε οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του είναι ίσες.

Π2: Αν οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών ενός παραλληλογράμμου είναι ίσες, τότε το παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος.

α) Να εξετάσετε αν ισχύουν οι προτάσεις Π1 και Π2 αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 20)

β) Στην περίπτωση που και οι δύο προτάσεις ισχύουν, να τις διατυπώσετε ως μια ενιαία πρόταση. (Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τις αποστάσεις των απέναντι πλευρών του ΒΕ, ΒΖ (δηλ. ΒΕ⊥ΑΔ και ΒΖ⊥ΓΔ).

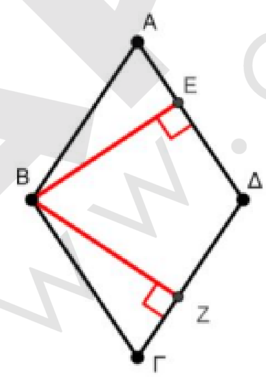
α) Απόδειξη πρότασης Π1:

Υποθέτουμε ότι το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.

Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΒΓΖ είναι ορθογώνια και έχουν:

- ΑΒ = ΒΓ, ως πλευρές του ρόμβου
- $\widehat{A} = \widehat{\Gamma}$, ως απέναντι γωνίες του ρόμβου.

Άρα τα τρίγωνα έχουνς την υποτείνουσα και μία οξεία γωνία ίσες μία προς μία, άρα είναι ίσα. Οπότε οι αντίστοιχες πλευρές τους ΒΕ και ΒΖ θα είναι ίσες (ΒΕ = ΒΖ). Δηλαδή οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του ρόμβου είναι ίσες.



Απόδειξη πρότασης Π2:

Υποθέτουμε ότι οι αποστάσεις ΒΕ, ΒΖ είναι ίσες.

Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΒΓΖ είναι ορθογώνια και έχουν:

- ΒΕ = ΒΖ, από υπόθεση
- $\widehat{A} = \widehat{\Gamma}$, ως απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα (μία κάθετη και μία οξεία γωνία ίσες μία προς μία). Οπότε θα είναι και οι υποτείνουσές τους ίσες, δηλαδή ΑΒ = ΒΓ.

Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες, οπότε είναι ρόμβος.

β) Ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, αν και μόνο αν, οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του είναι ίσες.

12. Θέμα 1755

Σε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) είναι ΑΒ=ΑΔ.

α) Να αποδείξετε ότι η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ. (Μονάδες 7)

β) Να προσδιορίσετε τη θέση ενός σημείου Ε, ώστε το τετράπλευρο ΑΒΕΔ να είναι ρόμβος. (Μονάδες 10)

γ) Αν επιπλέον είναι γωνία ΒΑΔ=120° και οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται στο σημείο Ο, να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΕΟΒΓ. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

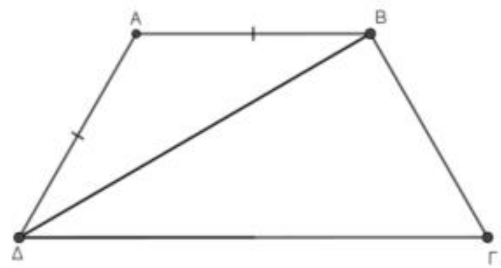
α) Επειδή ΑΒ = ΑΔ, το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές οπότε $A\hat{\Delta}B = A\hat{B}\Delta$

Όμως $A\hat{B}\Delta = B\hat{\Delta}\Gamma$

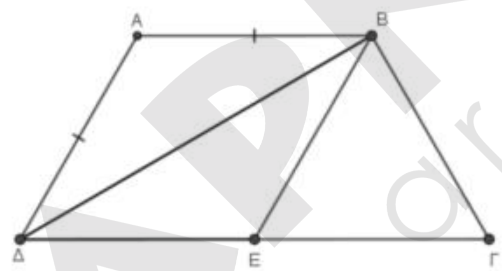
ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΒΔ.

Άρα $A\hat{\Delta}B = B\hat{\Delta}\Gamma$

Επομένως η ΒΔ διχοτομεί τη γωνία $\hat{\Delta}$.



β) Από το Β φέρουμε παράλληλη στην ΑΔ που τέμνει τη ΔΓ στο Ε. Το τετράπλευρο ΑΒΕΔ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες και δύο διαδοχικές πλευρές του ίσες (ΑΒ = ΑΔ), οπότε είναι ρόμβος.



γ) Οι διαγώνιες του ρόμβου τέμνονται κάθετα οπότε $B\hat{O}E = 90^o$.

Ισχύει ακόμη ότι:

- $B\hat{A}\Delta = A\hat{B}\Gamma = 120^o$, διότι είναι γωνίες βάσης ισοσκελούς τραπεζίου.
- $A\hat{B}\Gamma + B\hat{\Gamma}E = 180^o$, ως εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από τη ΒΓ.

Τότε:

$A\hat{B}\Gamma + B\hat{\Gamma}E = 180^o \Leftrightarrow 120^o + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 60^o$

Επειδή ΒΓ = ΒΕ = ΑΔ και $\hat{\Gamma} = 60^o$, το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ισόπλευρο, άρα

$E\hat{B}\Gamma = B\hat{E}\Gamma = 60^o$

Τότε:

$A\hat{B}E = A\hat{B}\Gamma - E\hat{B}\Gamma = 120^o - 60^o = 60^o$

Επίσης η ΒΔ είναι διαγώνιος του ρόμβου οπότε διχοτομεί τη γωνία $A\hat{B}E$.

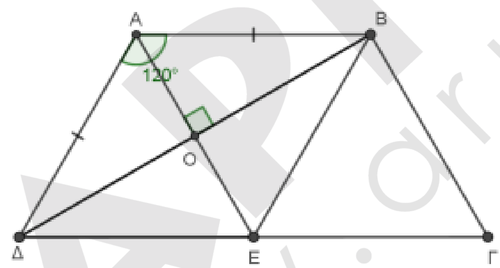
Άρα $O\hat{B}E = 30^o$

Τότε $O\hat{B}\Gamma = 30^o + 60^o = 90^o$

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΟΒΕ βρίσκουμε:

$O\hat{E}B + O\hat{B}E = 90^o \Leftrightarrow O\hat{E}B = 90^o - 30^o \Leftrightarrow O\hat{E}B = 60^o$ και

$O\hat{E}\Gamma = 60^o + 60^o = 120^o$



13. Θέμα 1767

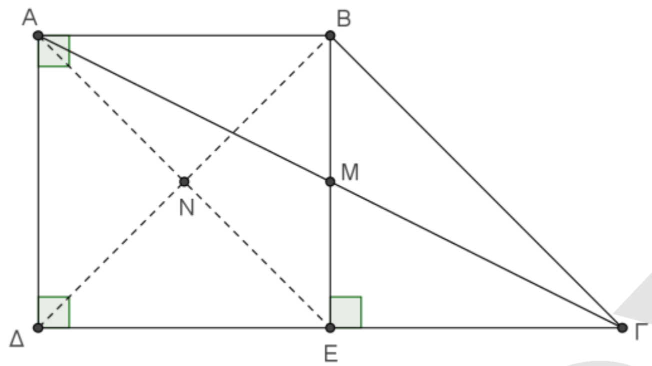
Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΓΔ) με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^o$, ΔΓ = 2ΑΒ και $\hat{B} = 3\hat{\Gamma}$. Φέρνουμε $BE \perp \Delta\Gamma$ που τέμνει τη διαγώνιο ΑΓ στο Μ. Φέρνουμε την ΑΕ που τέμνει τη διαγώνιο ΒΔ στο Ν.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{\Gamma} = 45^o$. (Μονάδες 7)

β) Το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)

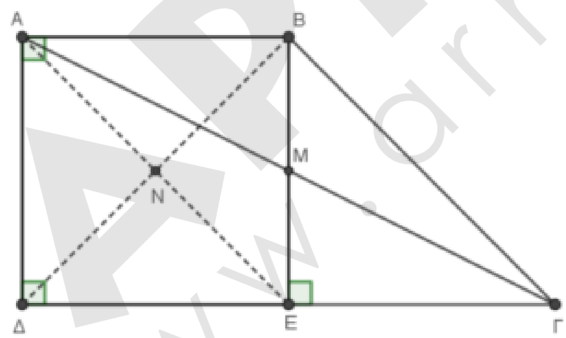
γ) $AE \perp B\Delta$. (Μονάδες 9)



ΛΥΣΗ

α) Οι γωνίες $\widehat{B}$, $\widehat{\Gamma}$ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΒΓ, άρα είναι παραπληρωματικές. Τότε:

$\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow 3\widehat{\Gamma} + \widehat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow 4\widehat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow \widehat{\Gamma} = 45^o$



β) Το τετράπλευρο ΑΒΕΔ έχει τρείς γωνίες ορθές οπότε είναι ορθογώνιο.

Άρα ΔΕ = ΑΒ (1) και ΑΒ // ΔΕ ή ΑΒ // ΕΓ. Τότε:

ΔΓ = ΔΕ + ΕΓ οπότε λόγω της (1) είναι

2ΑΒ = ΑΒ + ΕΓ $\Leftrightarrow$ ΑΒ = ΕΓ

Επειδή ΑΒ // = ΕΓ, το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Επειδή ΑΒ = ΒΕ = ΕΔ = ΑΔ, το ΑΒΕΔ είναι ρόμβος και αφού έχει ορθή γωνία είναι τετράγωνο, άρα οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα, δηλαδή ΑΕ $\perp$ ΒΔ.

14. Θέμα 1823

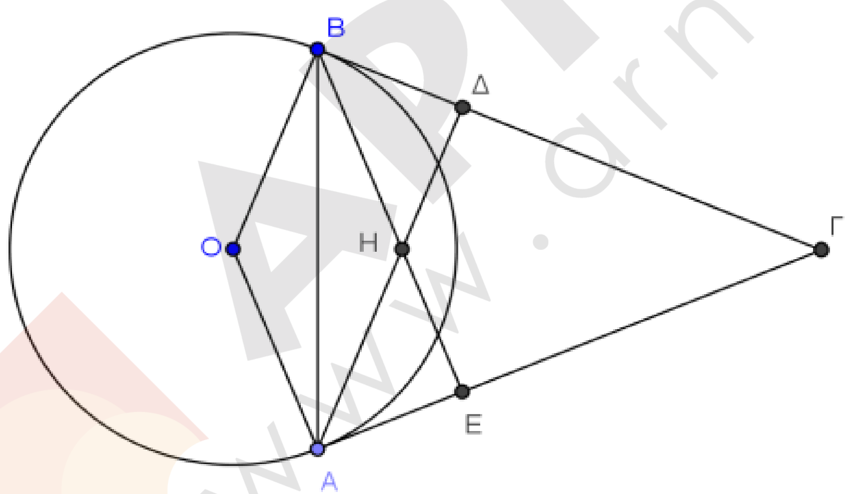
Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και δυο μη αντιδιαμετρικά σημεία του Α και Β. Φέρουμε τις εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία Α και Β οι οποίες τέμνονται στο σημείο Γ. Φέρουμε επίσης και τα ύψη ΑΔ και ΒΕ του τριγώνου ΑΒΓ τα οποία τέμνονται στο σημείο Η.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΒΗΑ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

β) Το τετράπλευρο ΟΒΗΑ είναι ρόμβος. (Μονάδες 9)

γ) Τα σημεία Ο, Η, Γ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ

α) Είναι ΑΓ = ΒΓ ως εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου που άγονται από το σημείο Γ. Άρα το τρίγωνα ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΒ.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΒΔ.

- Είναι ορθογώνια
- Έχουν ΑΒ κοινή πλευρά (υποτείνουσα)
- Έχουν $A\widehat{B}\Delta = B\widehat{A}E$, ως γωνίες προσκείμενες στη βάση ΑΒ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, ως ορθογώνια που έχουν τις υποτείνουσες και μια οξεία γωνία ίσες μία προς μία. Οπότε ισχύει και $A\widehat{B}E = B\widehat{A}\Delta$, άρα το τρίγωνο ΒΗΑ είναι ισοσκελές με βάση της ΑΒ.

β) Επειδή ΟΑ, ΟΒ ακτίνες του κύκλου, ισχύει ότι $OA \perp A\Gamma$ και $OB \perp B\Gamma$[1], δηλαδή είναι κάθετες στα αντίστοιχα εφαπτόμενα τμήματα. Όμως $BE \perp A\Gamma$ και $A\Delta \perp B\Gamma$.

Άρα ΟΑ // ΒΕ, γιατί είναι και οι δύο κάθετες στην ΑΓ και ΟΒ // ΑΔ, γιατί είναι και οι δύο κάθετες στην ΒΓ. Οπότε το τετράπλευρο ΟΒΗΑ είναι παραλληλόγραμμο. Επειδή ΟΑ = ΟΒ, ως ακτίνες του ίδιου κύκλου, το παραλληλόγραμμο ΟΒΗΑ έχει δύο διαδοχικές πλευρές του ίσες (τις ΟΑ και ΟΒ) οπότε είναι ρόμβος.

γ) Είναι $OH \perp AB$ διότι, ως διαγώνιοι του ρόμβου ΟΒΗΑ τέμνονται κάθετα.

Επίσης τα τμήματα ΓΑ και ΓΒ είναι εφαπτόμενα στον κύκλο οπότε η ΟΓ είναι μεσοκάθετος της χορδής ΑΒ. Επομένως $O\Gamma \perp AB$ (2). Όμως από το Ο διέρχεται μοναδική κάθετη στην ΑΒ άρα τα σημεία Ο, Η και Γ είναι συνευθειακά.

---

[1] το σύμβολο $\perp$ σημαίνει «κάθετες».

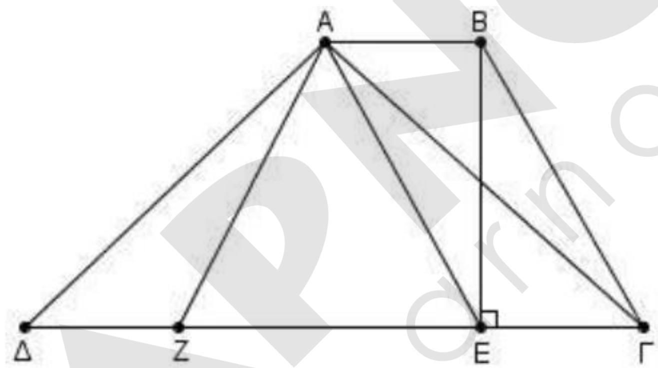
15. Θέμα 1860

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB//\Gamma\Delta$, $\Delta\Gamma = 4AB$ και $B\Gamma = 2AB$. Θεωρούμε σημείο Ζ εσωτερικό της ΓΔ, ώστε $\Delta Z = AB$. Αν η γωνία Γ είναι 60^0 και ΒΕ το ύψος του τραπεζίου, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΖΑΕ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 8)

γ) Τα τρίγωνα ΔΑΖ και ΓΑΕ είναι ίσα. (Μονάδες 9)



ΛΥΣΗ

α) Για τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου ΒΕΓ έχουμε:

$$E\hat{B}\Gamma + \hat{\Gamma} = 90^o \Leftrightarrow E\hat{B}\Gamma + 60^o = 90^o \Leftrightarrow E\hat{B}\Gamma = 30^o$$

Οπότε, στο τρίγωνο ΒΕΓ η απέναντι πλευρά από τη γωνία των 30^0 είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή ΕΓ = $\frac{B\Gamma}{2}$ = ΑΒ (1).

Επειδή είναι ΑΒ // ΔΓ και το σημείο Ε της ΔΓ είναι τέτοιο ώστε ΕΓ = ΑΒ τότε θα είναι ΑΒ // = ΕΓ, οπότε το τετράπλευρο ΑΕΓΒ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Είναι ΔΓ = ΔΖ + ΖΕ + ΕΓ (2). Επίσης ισχύουν:

- ΔΓ = 4 ΑΒ από υπόθεση
- ΔΖ = ΑΒ από υπόθεση
- ΕΓ =ΑΒ από σχέση (1)

Άρα η σχέση (2) γίνεται 4ΑΒ = ΑΒ + ΖΕ + ΑΒ $\Leftrightarrow$ ΖΕ = 2ΑΒ και επειδή 2ΑΒ = ΒΓ από υπόθεση, είναι ΖΕ = ΒΓ.

Επειδή είναι ΒΓ = ΑΕ, ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΕΓΒ, άρα ΖΕ = ΑΕ. Οπότε το τρίγωνο ΖΑΕ είναι ισοσκελές.

Επίσης $A\hat{E}Z = \hat{\Gamma} = 60^o$, ως γωνίες εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΕ, ΒΓ που τέμνονται από την ΓΔ, οπότε το ισοσκελές τρίγωνο ΖΑΕ έχει μια γωνία 60^0, άρα είναι ισόπλευρο.

γ) Τα τρίγωνα ΔΑΖ και ΓΑΕ έχουν:

- ΔΖ = ΓΕ, αφού είναι ΔΖ = ΑΒ (υπόθεση) και ΕΓ = ΑΒ (σχέση (1))
- ΑΖ = ΑΕ, διότι το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισόπλευρο (από β) ερώτημα)
- $A\hat{Z}\Delta = A\hat{E}\Gamma = 120^o$, ως παραπληρωματικές των γωνιών $A\hat{Z}E = A\hat{E}Z = 60^0$ του ισοπλεύρου τριγώνου ΖΑΕ.

Σύμφωνα με το κριτήριο Π – Γ – Π τα τρίγωνα ΔΑΖ και ΓΑΕ είναι ίσα.

16. Θέμα 1853

Έστω ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΔΓ) με $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ και $AB = B\Gamma = A\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2}$.

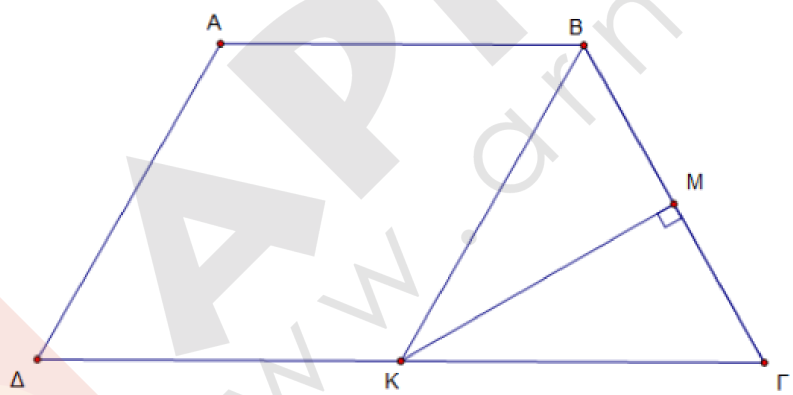
Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{B}$, η οποία τέμνει το ΔΓ στο Κ και η κάθετη από το Κ προς το ΒΓ το τέμνει στο Μ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του ΑΒΓΔ. (Μονάδες 10)

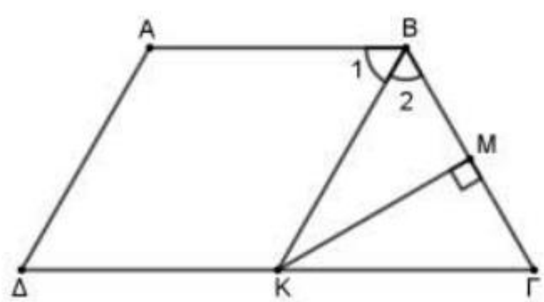
β) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο ΑΒΚΔ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)

ii. Το σημείο Μ είναι το μέσο του ΒΓ. (Μονάδες 7)



ΛΥΣΗ



α) Οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ είναι παραπληρωματικές ως εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από τη ΒΓ. Άρα $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o$.

Επειδή από την υπόθεση έχουμε ότι $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$, τότε $3\hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 60^o$. Άρα $\hat{B} = 120^o$. Το ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο οπότε οι γωνίες που είναι προσκείμενες σε κάθε του βάση είναι ίσες, άρα $\hat{A} = \hat{B} = 120^o$ και $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma} = 60^o$.

β) i. Επειδή η ΒΚ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$, είναι $A\hat{B}K = K\hat{B}\Gamma = 60^o$. Στο τρίγωνο ΒΚΓ δύο γωνίες του είναι ίσες με 60^o οπότε και $B\hat{K}\Gamma = 60^o$, δηλαδή το τρίγωνο είναι ισόπλευρο, επομένως ΚΒ = ΚΓ = ΒΓ.

Επειδή $B\Gamma = AB = A\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2}$ από υπόθεση θα είναι και ΔΚ = ΚΒ = ΑΒ = ΑΔ, οπότε το τετράπλευρο ΑΒΚΔ είναι ρόμβος γιατί έχει τις πλευρές του ίσες.

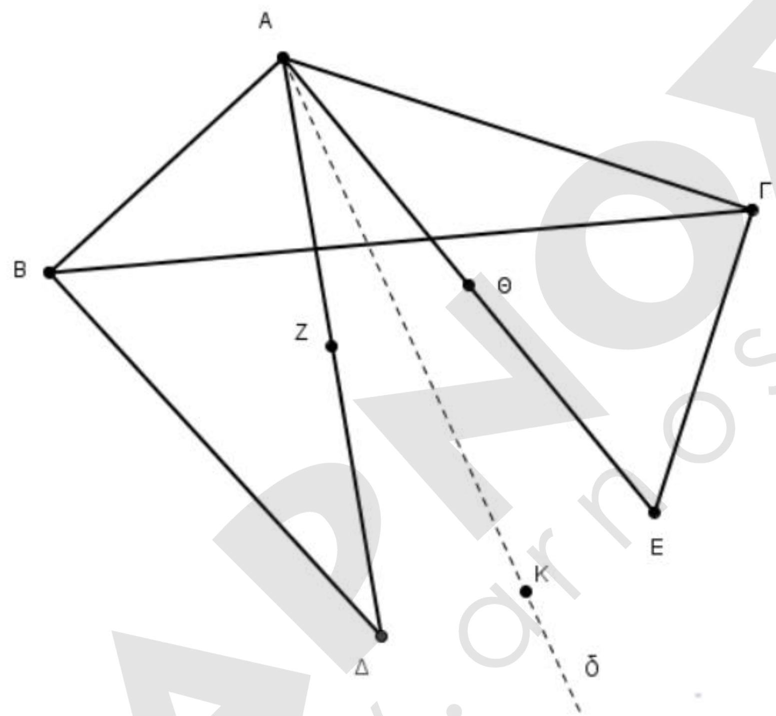
ii. Το τρίγωνο ΚΒΓ είναι ισόπλευρο και το ΚΜ είναι ύψος του αφού $KM \perp B\Gamma$, άρα θα είναι και διάμεσος της πλευράς ΒΓ, συνεπώς το Μ είναι μέσο του ΒΓ.

17. Θέμα 1869

Δίνεται αμβλυγώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ με ΑΒ<ΑΓ και $\hat{A} > 90^o$. Φέρνουμε τμήμα ΒΔ κάθετο στην ΑΒ και με $B\Delta = A\Gamma$ και τμήμα ΓΕ κάθετο στην ΑΓ με $\Gamma E = AB$. Θεωρούμε τα μέσα Ζ και Θ των ΑΔ και ΑΕ καθώς και τη διχοτόμο Αδ της γωνία $\Delta\hat{A}E$.

α) Να αποδείξετε ότι $A\Delta = AE$. (Μονάδες 9)

β) Αν Κ τυχαίο σημείο της διχοτόμου Αδ, να αποδείξετε ότι το Κ ισαπέχει από τα μέσα Ζ και Θ. (Μονάδες 9) γ) Αν το Κ είναι σημείο της διχοτόμου Αδ τέτοιο ώστε ΚΖ=ΑΖ, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΖΚΘ είναι ρόμβος. (Μονάδες 7)



ΛΥΣΗ

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ έχουν:

ΓΕ = ΑΒ, από υπόθεση

ΒΔ = ΑΓ, από υπόθεση

Άρα τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ έχουν δύο κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία οπότε είναι ίσα και ισχύει ότι ΑΔ = ΑΕ ως υποτείνουσες των ίσων ορθογωνίων τριγώνων ΑΒΔ και ΑΓΕ.

β) Τα τρίγωνα ΑΖΚ και ΑΘΚ έχουν:

ΑΖ = ΑΘ, ως μισά των ίσων πλευρών ΑΔ και ΑΕ

ΑΚ κοινή πλευρά

$Z\hat{A}K = K\hat{A}\Theta$, διότι Αδ διχοτόμος της $\Delta\hat{A}E$

Σύμφωνα με το κριτήριο ισότητας Π – Γ – Π τα τρίγωνα ΑΖΚ και ΑΘΚ είναι ίσα, οπότε έχουν και ΚΖ = ΚΘ. Δηλαδή το Κ ισαπέχει από τα μέσα Ζ και Θ.

γ) Το Κ ανήκει στην Αδ οπότε από το β ερώτημα προκύπτει ΚΖ = ΚΘ (1).

Από υπόθεση είναι ΚΖ = ΑΖ (2). Επίσης ΑΖ = ΑΘ (3) ως μισά των ίσων πλευρών ΑΔ και ΑΕ. Από τις (1), (2), (3) βρίσκουμε ΚΖ = ΚΘ = ΑΖ = ΑΘ. Δηλαδή το τετράπλευρο ΑΖΚΘ έχει όλες τις πλευρές του ίσες, οπότε είναι ρόμβος.

18. Θέμα 13539

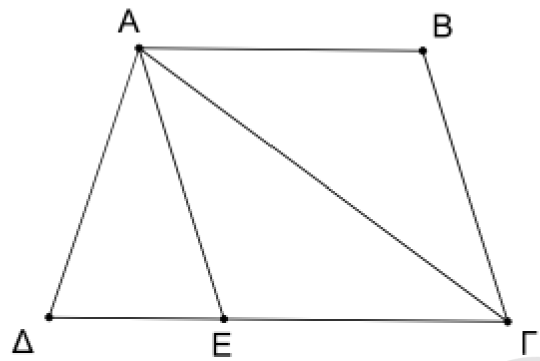
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ//ΓΔ και $\hat{A} = 108^o$. Στη βάση ΓΔ θεωρούμε σημείο Ε, ώστε οι ΑΓ, ΑΕ να τριχοτομούν τη γωνία $\hat{A}$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΔΕ. (Μονάδες 10)

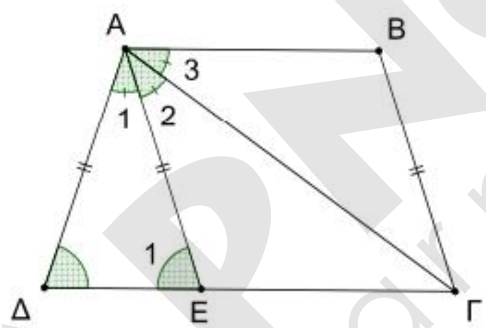
β) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 5)

ii. Το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι ρόμβος. (Μονάδες 10)



ΛΥΣΗ



α) Αφού τα τμήματα ΑΓ, ΑΕ να τριχοτομούν τη γωνία $\hat{A} = 108^o$, θα είναι

$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \hat{A}_3 = \frac{\hat{A}}{3} = \frac{108^o}{3} = 36^o$.

Οι γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Delta}$ του τραπεζίου είναι παραπληρωματικές, γιατί είναι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΑΔ. Άρα $\hat{\Delta} = 180^o - \hat{A} = 180^o - 108^o = 72^o$.

Είναι $\hat{E}_1 = B\hat{A}E$ ως εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΑΕ. Άρα $\hat{E}_1 = B\hat{A}E = \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 36^o + 36^o = 72^o$.

β) i. Από το ερώτημα α) έχουμε ότι $\hat{\Delta} = \hat{E}_1 = 72^o$ (1), συνεπώς το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές με ΑΔ = ΑΕ (2), γιατί έχει δύο γωνίες ίσες.

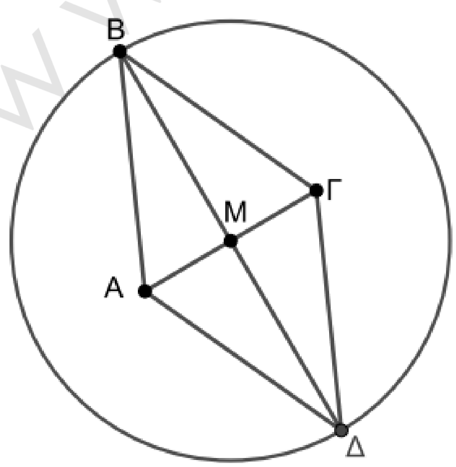
ii. Οι προσκείμενες γωνίες $B\hat{\Gamma}\Delta$ και $\hat{\Delta}$ στη βάση ΓΔ του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι ίσες, γιατί το τραπέζιο είναι ισοσκελές. Άρα $B\hat{\Gamma}\Delta = \hat{\Delta}$ (3).

Από τις ισότητες (1) και (3) προκύπτει ότι $B\hat{\Gamma}\Delta = \hat{E}_1$, οπότε οι ΑΕ, ΒΓ είναι παράλληλες, γιατί τεμνόμενες από τη ΓΔ σχηματίζουν τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες.

Είναι $A\Delta = B\Gamma$ (4), γιατί το τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές. Από τις ισότητες (2) και (4) προκύπτει ότι $AE = B\Gamma$. Το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί οι απέναντι πλευρές του ΑΕ, ΒΓ είναι ίσες και παράλληλες. Όμως η ΑΓ διχοτομεί τη γωνία $B\hat{A}E$, αφού από το ερώτημα α) έχουμε ότι $\hat{A}_2 = \hat{A}_3 = 36^o$. Συνεπώς το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι ρόμβος, γιατί είναι παραλληλόγραμμο και η διαγώνιος ΑΓ διχοτομεί τη γωνία του $B\hat{A}E$.

19. Θέμα 13857

α) Στο σχήμα η ΒΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΓ και διάμετρος του κύκλου με κέντρο Μ. Να αποδείξετε ότι το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)



β) Χαρακτηρίστε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις ως αληθή ή ψευδή.

Πρόταση 1: «Αν η διαγώνιος ενός τυχαίου τετραπλεύρου είναι μεσοκάθετος της άλλης διαγωνίου και διάμετρος κύκλου με κέντρο το σημείο τομής των διαγωνίων, τότε το τετράπλευρο είναι ρόμβος».

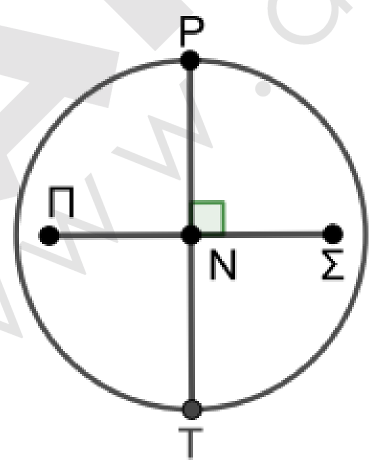
Πρόταση 2: «Αν η διαγώνιος ενός τυχαίου τετραπλεύρου είναι κάθετη στην άλλη διαγώνιο και διάμετρος κύκλου με κέντρο το σημείο τομής των διαγωνίων, τότε το τετράπλευρο είναι ρόμβος».

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση.

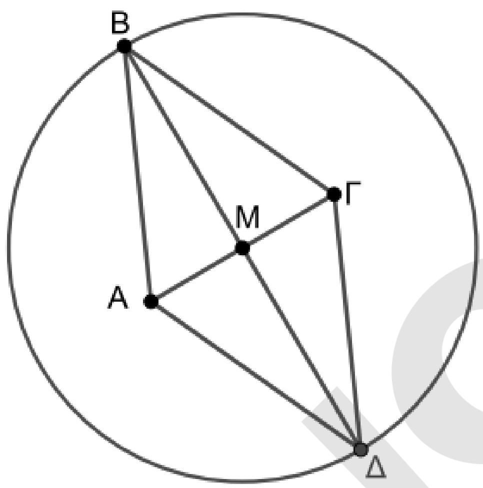
(Μονάδες 10)

γ) Στο παρακάτω σχήμα τα ευθύγραμμα τμήματα ΡΤ και ΠΣ τέμνονται κάθετα στο Ν και ΠΝ = ΝΣ. Επίσης η ΡΤ είναι διάμετρος του κύκλου με κέντρο το Ν.

Να αποδείξετε ότι ΠΡ = ΡΣ = ΣΤ = ΤΠ. (Μονάδες 7)



ΛΥΣΗ



α) Η ΒΔ είναι μεσοκάθετος της ΑΓ από την υπόθεση, άρα ισχύει ΑΜ = ΜΓ.

Επιπλέον ΒΜ = ΜΔ, γιατί από την υπόθεση το Μ είναι κέντρο του κύκλου με διάμετρο ΒΔ. Επομένως, οι διαγώνιοι του ΑΒΓΔ διχοτομούνται. Άρα το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

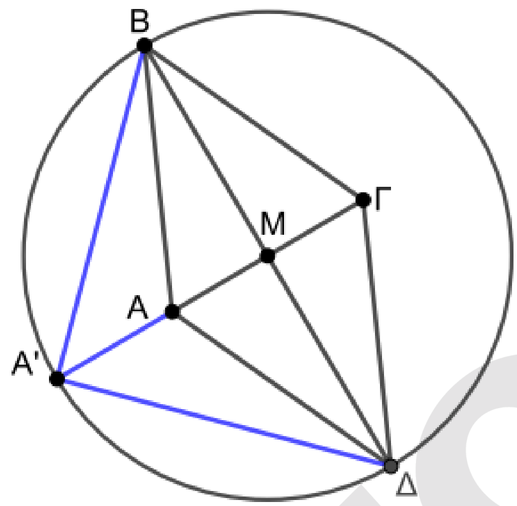
Ακόμα οι ΒΔ και ΑΓ είναι κάθετες, γιατί η ΒΔ είναι μεσοκάθετος της ΑΓ από την υπόθεση.

Εφόσον οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι κάθετες το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.

β) Η Πρόταση 1 έχει αποδειχθεί στο ερώτημα α), άρα είναι αληθής.

Η Πρόταση 2 είναι ψευδής.

Στο παραπάνω σχήμα προεκτείνουμε την ΑΓ προς το μέρος του Α κατά ΑΑ΄, ώστε το Α΄ να είναι σημείο του κύκλου.



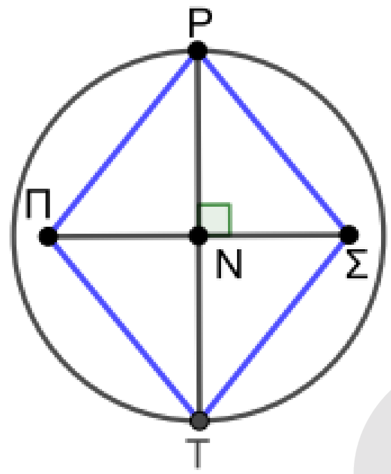
Το τετράπλευρο Α΄ΒΓΔ πληροί τις υποθέσεις της Πρότασης 2. Ωστόσο δεν είναι παραλληλόγραμμο καθώς οι διαγώνιοι του Α΄Γ και ΒΔ, οι οποίες τέμνονται στο Μ δε διχοτομούνται, γιατί Α΄Μ>ΜΓ (η Α΄Μ είναι διάμετρος του κύκλου, ενώ το Γ είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου). Αν ήταν παραλληλόγραμμο, τότε οι διαγώνιοί του θα διχοτομούνταν. Επομένως, εφόσον δεν είναι παραλληλόγραμμο, τότε δεν είναι και ρόμβος.

γ) Σχεδιάζουμε το τετράπλευρο ΠΡΣΤ.

Η διαγώνιος του ΡΤ είναι μεσοκάθετος της ΠΣ, εφόσον είναι κάθετες και ΠΝ = ΝΣ, από την υπόθεση.

Επίσης η ΡΤ είναι διάμετρος του κύκλου που έχει ως κέντρο το Ν, σημείο τομής των διαγωνίων του τετραπλεύρου.

Άρα από την Πρόταση 1 (του ερωτήματος β)) που αποδείχθηκε στο α) το ΠΡΣΤ είναι ρόμβος. Συνεπώς έχει όλες τις πλευρές του ίσες. Δηλαδή ΠΡ = ΡΣ = ΣΤ = ΤΠ.


Ρ
Π
Ν
Σ
Τ