

**Κεφ. 5.4. - Τράπεζα Θεμάτων 2022 - Γεωμετρία Α' Λυκείου****ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ & ΛΥΣΕΙΣ**

Η Τράπεζα Θεμάτων για τη Γεωμετρία Α' Λυκείου είναι μία μεγάλη «θάλασσα». Εμείς όμως έχουμε φροντίσει για εσένα, συγκεντρώνοντας εκείνα τα θέματα που αποτελούν τη «βάση» της γνώσης και για τα υπόλοιπα. Μελετώντας και κατανοώντας το μοτίβο σκέψης για τα συγκεκριμένα, μπορείς να λύσεις με επιτυχία και τα υπόλοιπα θέματα. Στην ιστοσελίδα μας [www.arnos.gr](http://www.arnos.gr) για το Course της Γεωμετρίας, μελετάς και προετοιμάζεσαι με την αναλυτική διδασκαλία σε ασκήσεις και θέματα, στο ύψος της Τράπεζας.

**Θέμα 2 - Κωδικοί:****1570, 1575, 1584, 1630, 1679, 1681, 1697, 13767, 13832, 13842****1. Θέμα 1570**

Θεωρούμε οξυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma$  και το ύψος του  $A\Delta$ . Προεκτείνουμε το  $A\Delta$  (προς το  $\Delta$ ) κατά τμήμα  $\Delta E = A\Delta$ . Έστω  $K$  το συμμετρικό του  $B$  ως προς το  $\Delta$ .

Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο  $ABK$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)
- β) Το τετράπλευρο  $ABEK$  είναι ρόμβος. (Μονάδες 13)

*Έξυπνα & εύκολα!*

**2. Θέμα 1575**

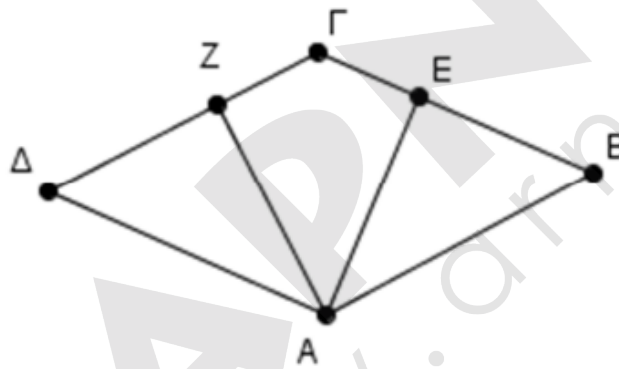
Το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  του σχήματος είναι παραλληλόγραμμο. Έστω ότι  $AE \perp B\Gamma$  και  $AZ \perp \Delta\Gamma$ .

Να αποδείξετε ότι:

α) Αν το παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  είναι ρόμβος, τότε  $AZ=AE$ . (Μονάδες 12)

β) Αν για το παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  ισχύει  $AZ=AE$ , τότε αυτό είναι ρόμβος.

(Μονάδες 13)


**3. Θέμα 1584**

Σε κύκλο κέντρου  $O$ , έστω  $OA$  μία ακτίνα του. Φέρουμε τη μεσοκάθετη της  $OA$  που τέμνει τον κύκλο στα σημεία  $B$  και  $\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο  $OBA$  είναι ισόπλευρο.

(Μονάδες 13)

β) Το τετράπλευρο  $OBA\Gamma$  είναι ρόμβος.

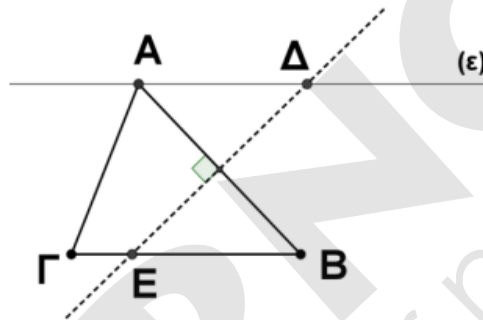
(Μονάδες 12)

Έξυπνα & εύκολα!

**4. Θέμα 1630**

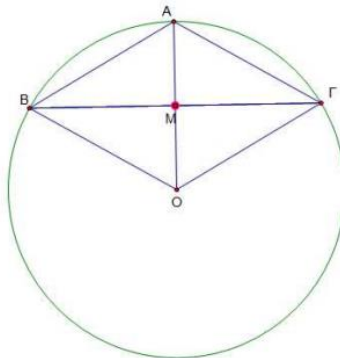
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΓΒ. Φέρουμε από τη κορυφή Α ευθεία (ε) παράλληλη στη ΒΓ. Η μεσοκάθετος της πλευράς ΑΒ τέμνει την (ε) στο Δ και την ΒΓ στο Ε.

- α) Να αποδείξετε ότι  $ΔΑ=ΔΒ$  και  $ΕΑ=ΕΒ$ . (Μονάδες 6)
- β) Αν Μ το μέσο του ΑΒ, να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΕΜΒ. (Μονάδες 10)
- γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΒΕ είναι ρόμβος. (Μονάδες 9)


**5. Θέμα 1679**

Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Θεωρούμε την ακτίνα ΟΑ και τη χορδή ΒΓ κάθετη στην ΟΑ στο μέσο της Μ.

- α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΓΟΒ είναι ρόμβος. (Μονάδες 10)
- β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΓΟΒ. (Μονάδες 15)



*Έξυπνα & εύκολα!*

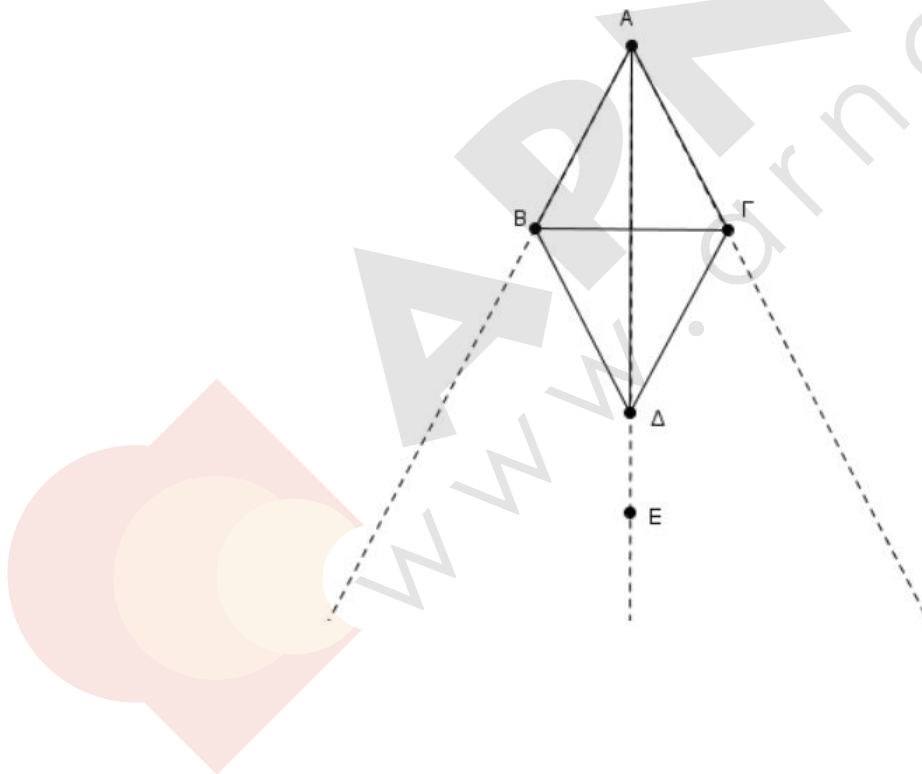
## 6. Θέμα 1681

Δίνεται ρόμβος  $AB\Delta\Gamma$ . Στην προέκταση της διαγωνίου  $A\Delta$  (προς το  $\Delta$ ) παίρνουμε τυχαίο σημείο  $E$ .

Να αποδείξετε ότι:

α) Το σημείο  $E$  ισαπέχει από τις προεκτάσεις των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$  (προς το μέρος των  $B$  και  $\Gamma$  αντίστοιχα). (Μονάδες 10)

β) Το σημείο  $E$  ισαπέχει από τα σημεία  $B$  και  $\Gamma$ . (Μονάδες 15)



Έξυπνα & εύκολα!

**7. Θέμα 1697**

Στο τραπέζιο του παρακάτω σχήματος έχουμε  $AB=AD=\frac{\Gamma\Delta}{2}$ ,  $\hat{\Delta} = 60^\circ$  και M το μέσο της πλευράς ΓΔ.

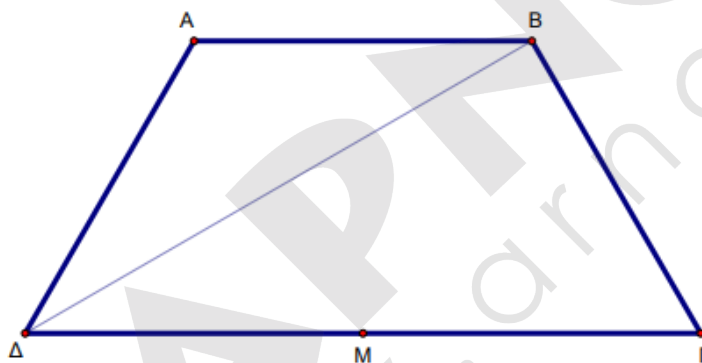
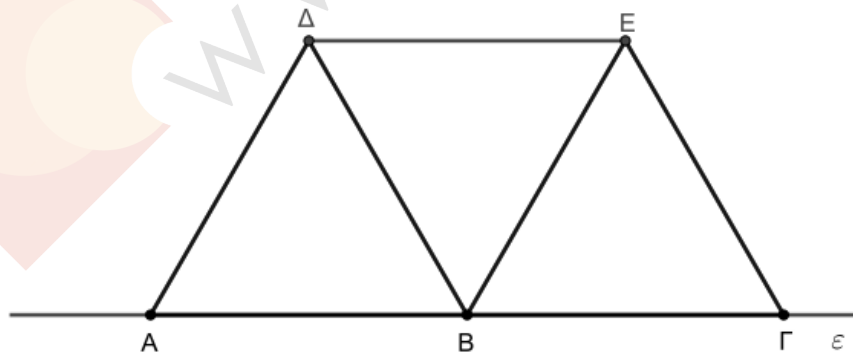
Να αποδείξετε ότι:

α) η ΔΒ είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{\Delta}$ ,

(Μονάδες 9)

β) η ΒΜ χωρίζει το τραπέζιο σε ένα ρόμβο και ένα ισόπλευρο τρίγωνο.

(Μονάδες 16)


**8. Θέμα 13767**


*Έξυπνα & εύκολα!*

Σε ευθεία  $\epsilon$  θεωρούμε τα διαδοχικά σημεία  $A$ ,  $B$  και  $\Gamma$  έτσι ώστε  $AB = B\Gamma$ . Στη συνέχεια, σχεδιάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα  $AB\Delta$  και  $B\Gamma E$  προς το ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία  $\epsilon$  όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία  $\Delta\hat{B}E$ .

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $B\Delta E$  είναι ισόπλευρο.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $A\Delta E B$  είναι ρόμβος.

(Μονάδες 8)

#### 9. Θέμα 13832

Στο σχήμα το  $M$  είναι μέσο των τμημάτων  $A\Gamma$  και  $B\Delta$ . Επίσης  $A\hat{M}B = \Gamma\hat{M}B$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Οι  $A\Gamma$  και  $B\Delta$  είναι κάθετες.

(Μονάδες 10)

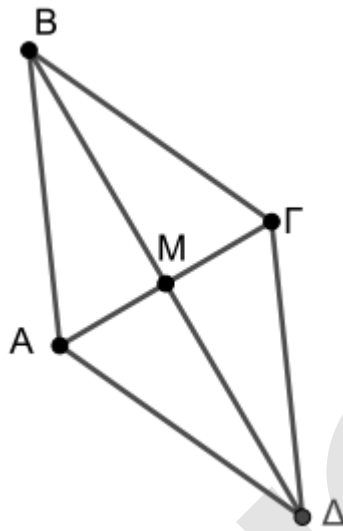
ii. Το  $AB\Gamma\Delta$  είναι ρόμβος.

(Μονάδες 8)

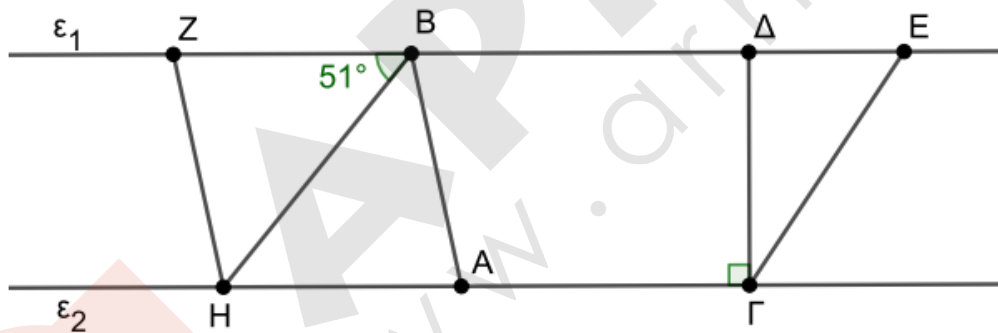
β) Το  $AB\Gamma\Delta$  είναι η κάτοψη ενός κήπου. Για να περιφράξουμε τον κήπο χρειαζόμαστε 30 μέτρα φράχτη. Αν αφήσουμε την πλευρά  $AB$  του κήπου χωρίς φράχτη πόσα μέτρα φράχτη θα χρειαστούμε για τις υπόλοιπες πλευρές;

(Μονάδες 7)

Έξυπνα & εύκολα!



## 10. Θέμα 13842



Στο παραπάνω σχήμα το τετράπλευρο  $ABZH$  είναι ρόμβος.

Επίσης δίνεται ότι  $\widehat{ZBH} = 51^\circ$  και ότι η  $A\hat{\Gamma}\Delta$  είναι ορθή.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία  $A\hat{B}H$ . (Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία  $A\hat{H}B$ . (Μονάδες 6)

γ) Αν η γωνία  $\hat{E}$  του τριγώνου  $\Gamma\Delta E$  είναι ίση με  $56^\circ$ , να υπολογίσετε τη γωνία  $\hat{\Gamma}$  του τριγώνου  $\Gamma\Delta E$ . (Μονάδες 10)

*Έξυπνα & εύκολα!*

**Θέμα 4 - Κωδικοί:****1740, 1755, 1767, 1823, 1860, 1853, 1869, 13539, 13857****11. Θέμα 1740**

Δίνονται οι ακόλουθες προτάσεις Π1 και Π2:

**Π1:** Αν ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, τότε οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του είναι ίσες.

**Π2:** Αν οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών ενός παραλληλογράμμου είναι ίσες, τότε το παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος.

α) Να εξετάσετε αν ισχύουν οι προτάσεις Π1 και Π2 αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 20)

β) Στην περίπτωση που και οι δύο προτάσεις ισχύουν, να τις διατυπώσετε ως μια ενιαία πρόταση. (Μονάδες 5)

**12. Θέμα 1755**

Σε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) είναι ΑΒ=ΑΔ.

α) Να αποδείξετε ότι η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ. (Μονάδες 7)

β) Να προσδιορίσετε τη θέση ενός σημείου Ε, ώστε το τετράπλευρο ΑΒΕΔ να είναι ρόμβος. (Μονάδες 10)

γ) Αν επιπλέον είναι γωνία ΒΑΔ=120° και οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται στο σημείο Ο, να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΕΟΒΓ. (Μονάδες 8)

*Έξυπνα & εύκολα!*

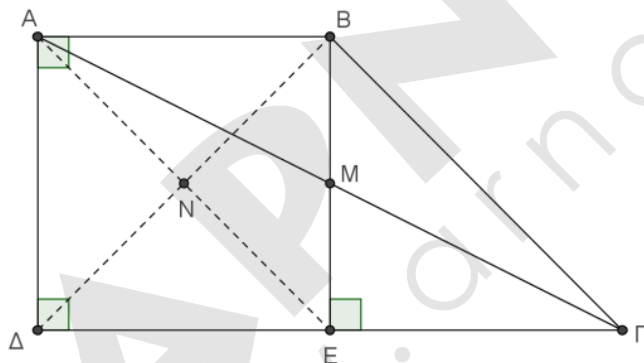


**13. Θέμα 1767**

Δίνεται τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ) με  $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ ,  $\Delta\Gamma = 2AB$  και  $\hat{B} = 3\hat{\Gamma}$ . Φέρνουμε  $BE \perp \Delta\Gamma$  που τέμνει τη διαγώνιο  $A\Gamma$  στο  $M$ . Φέρνουμε την  $AE$  που τέμνει τη διαγώνιο  $B\Delta$  στο  $N$ .

Να αποδείξετε ότι:

- α)  $\hat{\Gamma} = 45^\circ$ . (Μονάδες 7)
- β) Το τετράπλευρο  $AB\Gamma E$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)
- γ)  $AE \perp B\Delta$ . (Μονάδες 9)

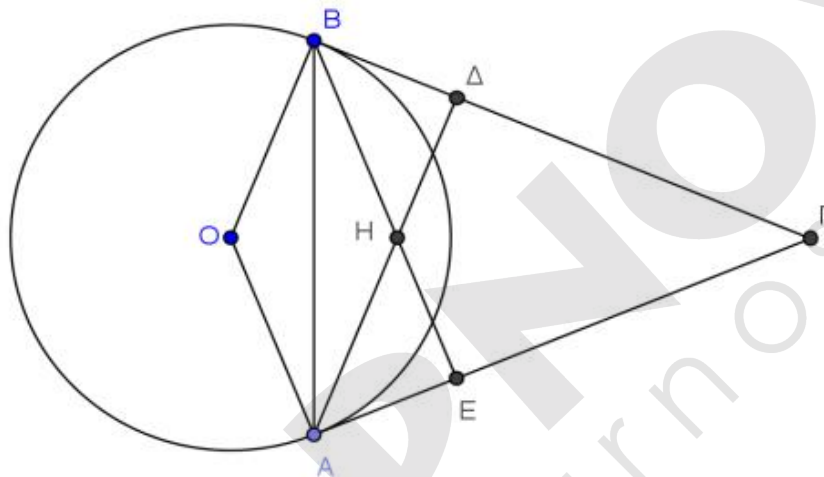

**14. Θέμα 1823**

Δίνεται κύκλος κέντρου  $O$  και δυο μη αντιδιαμετρικά σημεία του  $A$  και  $B$ . Φέρουμε τις εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία  $A$  και  $B$  οι οποίες τέμνονται στο σημείο  $\Gamma$ . Φέρουμε επίσης και τα ύψη  $A\Delta$  και  $BE$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  τα οποία τέμνονται στο σημείο  $H$ .

*Έξυπνα & εύκολα!*

Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο ΒΗΑ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)
- β) Το τετράπλευρο ΟΒΗΑ είναι ρόμβος. (Μονάδες 9)
- γ) Τα σημεία Ο, Η, Γ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 8)

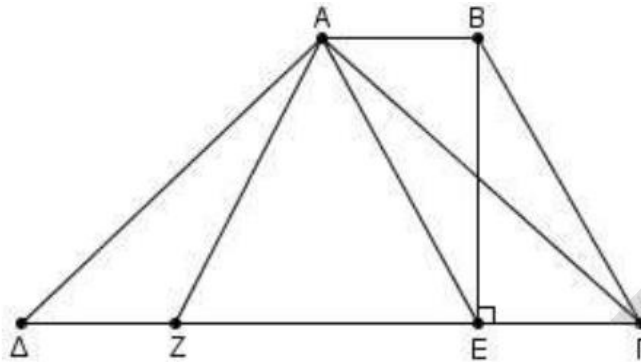


### 15. Θέμα 1860

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με  $AB \parallel \Gamma\Delta$ ,  $\Delta\Gamma = 4AB$  και  $B\Gamma = 2AB$ . Θεωρούμε σημείο Ζ εσωτερικό της ΓΔ, ώστε  $\Delta Z = AB$ . Αν η γωνία Γ είναι  $60^\circ$  και ΒΕ το ύψος του τραpezίου, να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)
- β) Το τρίγωνο ΖΑΕ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 8)
- γ) Τα τρίγωνα ΔΑΖ και ΓΑΕ είναι ίσα. (Μονάδες 9)

*Έξυπνα & εύκολα!*


**16. Θέμα 1853**

Έστω ισοσκελές τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB \parallel \Delta\Gamma$ ) με  $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$  και  $AB = B\Gamma = A\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2}$ .

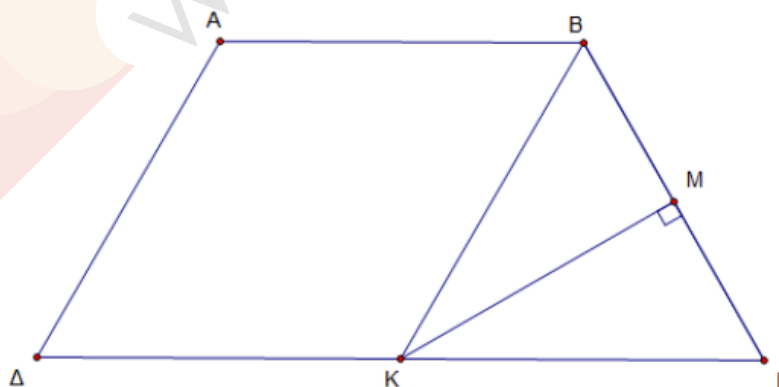
Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας  $\hat{B}$ , η οποία τέμνει το  $\Delta\Gamma$  στο  $K$  και η κάθετη από το  $K$  προς το  $B\Gamma$  το τέμνει στο  $M$ .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του  $AB\Gamma\Delta$ . (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο  $ABK\Delta$  είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)

ii. Το σημείο  $M$  είναι το μέσο του  $B\Gamma$ . (Μονάδες 7)

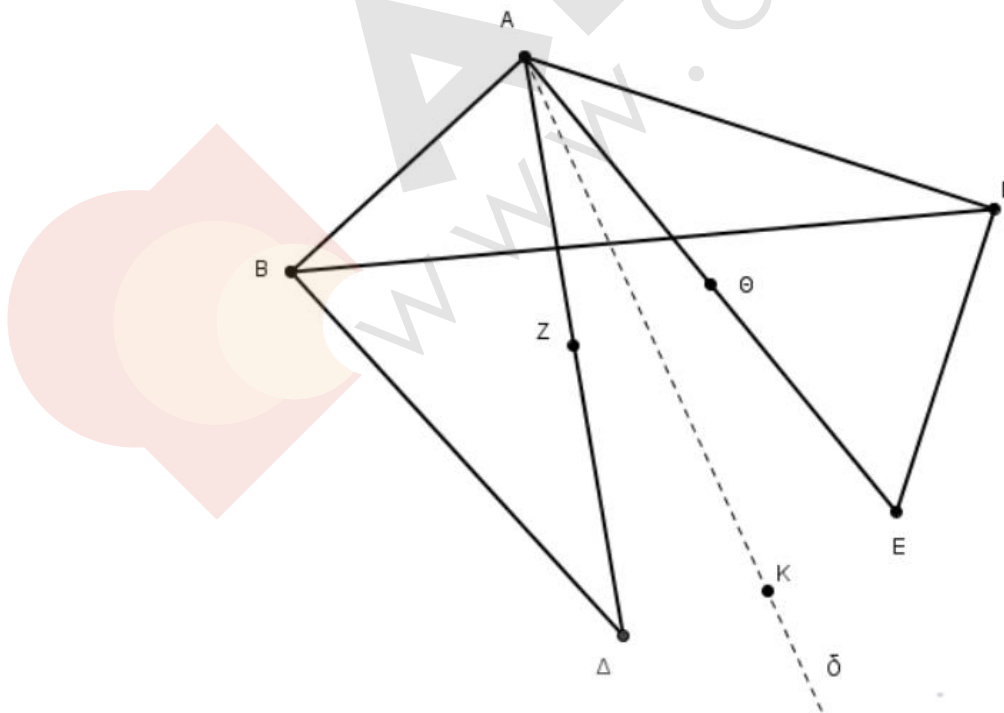


*Έξυπνα & εύκολα!*

## 17. Θέμα 1869

Δίνεται αμβλυγώνιο τρίγωνο  $\hat{A}B\Gamma$  με  $AB < AG$  και  $\hat{A} > 90^\circ$ . Φέρνουμε τμήμα  $B\Delta$  κάθετο στην  $AB$  και με  $B\Delta = AG$  και τμήμα  $GE$  κάθετο στην  $AG$  με  $GE = AB$ . Θεωρούμε τα μέσα  $Z$  και  $\Theta$  των  $A\Delta$  και  $AE$  καθώς και τη διχοτόμο  $A\delta$  της γωνίας  $\hat{\Delta A E}$ .

- α) Να αποδείξετε ότι  $A\Delta = AE$ . (Μονάδες 9)
- β) Αν  $K$  τυχαίο σημείο της διχοτόμου  $A\delta$ , να αποδείξετε ότι το  $K$  ισαπέχει από τα μέσα  $Z$  και  $\Theta$ . (Μονάδες 9)
- γ) Αν το  $K$  είναι σημείο της διχοτόμου  $A\delta$  τέτοιο ώστε  $KZ = AZ$ , να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $AZK\Theta$  είναι ρόμβος. (Μονάδες 7)



*Έξυπνα & εύκολα!*

**18. Θέμα 13539**

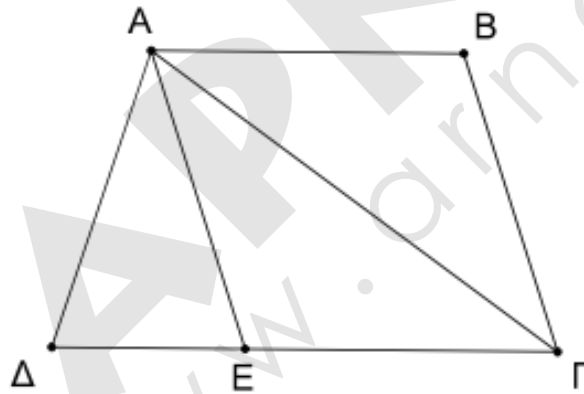
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ισοσκελές τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB \parallel \Gamma\Delta$  και  $\hat{A} = 108^\circ$ . Στη βάση  $\Gamma\Delta$  θεωρούμε σημείο  $E$ , ώστε οι  $A\Gamma$ ,  $AE$  να τριχοτομούν τη γωνία  $\hat{A}$ .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $A\Delta E$ . (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι:

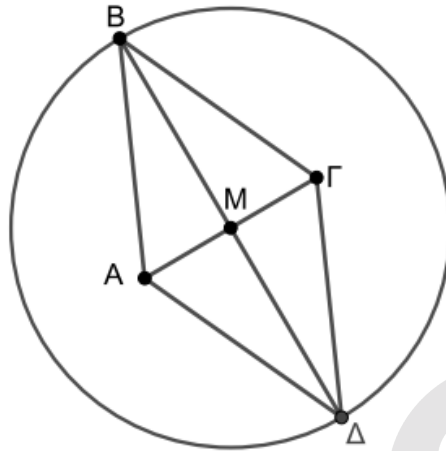
i. Το τρίγωνο  $A\Delta E$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 5)

ii. Το τετράπλευρο  $AB\Gamma E$  είναι ρόμβος. (Μονάδες 10)


**19. Θέμα 13857**

α) Στο σχήμα η  $B\Delta$  είναι μεσοκάθετος του τμήματος  $A\Gamma$  και διάμετρος του κύκλου με κέντρο  $M$ . Να αποδείξετε ότι το  $AB\Gamma\Delta$  είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)

*Έξυπνα & εύκολα!*



β) Χαρακτηρίστε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις ως αληθή ή ψευδή.

Πρόταση 1: «Αν η διαγώνιος ενός τυχαίου τετραπλεύρου είναι μεσοκάθετος της άλλης διαγωνίου και διάμετρος κύκλου με κέντρο το σημείο τομής των διαγωνίων, τότε το τετράπλευρο είναι ρόμβος».

Πρόταση 2: «Αν η διαγώνιος ενός τυχαίου τετραπλεύρου είναι κάθετη στην άλλη διαγώνιο και διάμετρος κύκλου με κέντρο το σημείο τομής των διαγωνίων, τότε το τετράπλευρο είναι ρόμβος».

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση.

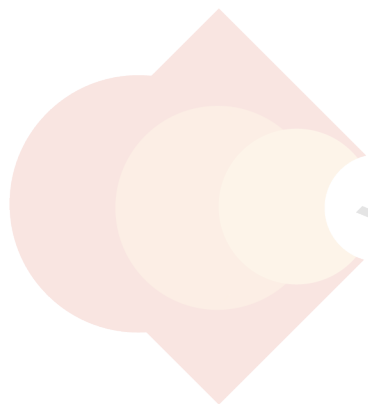
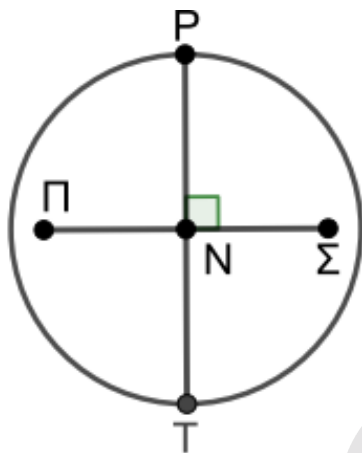
(Μονάδες 10)

γ) Στο παρακάτω σχήμα τα ευθύγραμμα τμήματα ΡΤ και ΠΣ τέμνονται κάθετα στο Ν και  $PN = NΣ$ . Επίσης η ΡΤ είναι διάμετρος του κύκλου με κέντρο το Ν.

Να αποδείξετε ότι  $PR = ΡΣ = ΣΤ = ΤΠ$ .

(Μονάδες 7)

Έξυπνα & εύκολα!



www.arnos.gr

Έξυπνα & εύκολα!