Κεφ. 5.3. - Τράπεζα Θεμάτων 2022 - Γεωμετρία Α’ Λυκείου

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ & ΛΥΣΕΙΣ

Η Τράπεζα Θεμάτων για τη Γεωμετρία Α’ Λυκείου είναι μία μεγάλη «θάλασσα». Εμείς όμως έχουμε φροντίσει για εσένα, συγκεντρώνοντας εκείνα τα θέματα που αποτελούν τη «βάση» της γνώσης και για τα υπόλοιπα. Μελετώντας και κατανοώντας το μοτίβο σκέψης για τα συγκεκριμένα, μπορείς να λύσεις με επιτυχία και τα υπόλοιπα θέματα. Στην ιστοσελίδα μας www.arnos.gr για το Course της Γεωμετρίας, μελετάς και προετοιμάζεσαι με την αναλυτική διδασκαλία σε ασκήσεις και θέματα, στο ύφος της Τράπεζας.

Θέμα 2 - Κωδικοί:

1563, 1653, 1668, 1683

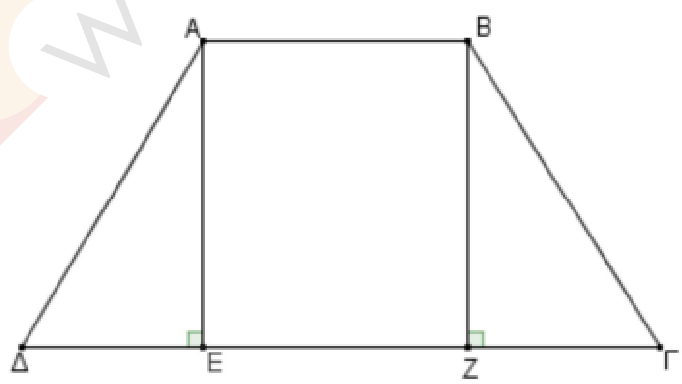
1. Θέμα 1563

Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ). Φέρουμε τα ύψη του ΑΕ και ΒΖ.

Να αποδείξετε ότι:

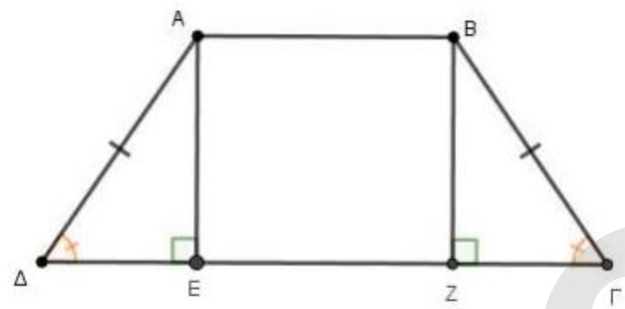
α) ΔΕ=ΓΖ. (Μονάδες 12)

β) ΑΖ=ΒΕ. (Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ

α)

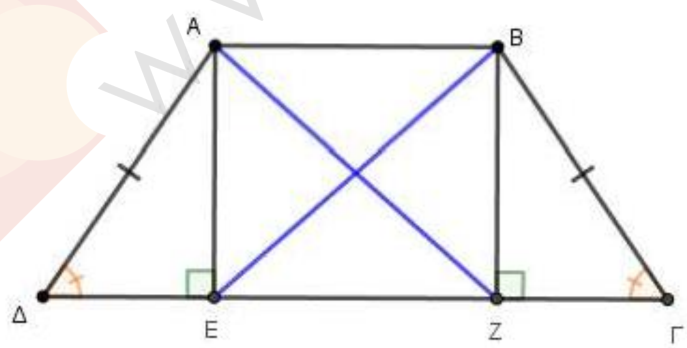


Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΖΓ έχουν:

- $A\widehat{E}\Delta = B\widehat{Z}\Gamma = 90^0$, αφού τα ΑΕ και ΒΖ είναι ύψη του τραπεζίου ΑΒΓΔ
- ΑΔ = ΒΓ, ως οι ίσες μη παράλληλες πλευρές του ισοσκελούς τραπεζίου ΑΒΓΔ.
- $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Delta}$, ως γωνίες βάσης ισοσκελούς τραπεζίου ΑΒΓΔ.

Άρα, τα τρίγωνα είναι ίσα ως ορθογώνια που έχουν τις υποτείνουσές τους και μια οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία. Επομένως, θα έχουν και τις τρίτες γωνίες τους $\Delta\widehat{A}E$ και $Z\widehat{B}\Gamma$ ίσες, οπότε και οι απέναντί τους κάθετες πλευρές θα είναι ίσες, δηλαδή ΔΕ = ΓΖ.

β)



Αφού το ΑΕ είναι ύψος του τραπεζίου ΑΒΓΔ τότε θα είναι ΑΕ $\perp$ ΑΒ οπότε θα είναι $E\hat{A}B = 90^o$. Άρα, το τετράπλευρο ΑΕΖΒ είναι ορθογώνιο γιατί έχει τρείς γωνίες ορθές ($E\hat{A}B = A\hat{E}Z = E\hat{Z}B = 90^0$). Επειδή οι ΑΖ και ΒΕ είναι διαγώνιοι του ορθογωνίου θα ισχύει ότι ΑΖ = ΒΕ.

2. Θέμα 1653

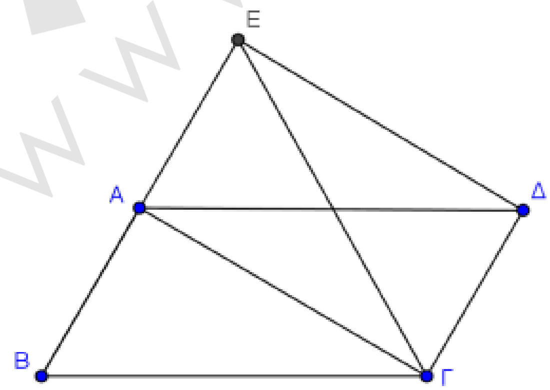
Στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο και το ΑΓΔΕ είναι ορθογώνιο.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το σημείο Α είναι μέσο του ΒΕ. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

γ) $B\hat{\Gamma}A = A\hat{\Delta}E$ (Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ

α) Είναι ΑΒ = ΓΔ (1) και ΑΒ // ΓΔ (2) ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

Επίσης ΑΕ = ΓΔ (3) και ΑΕ // ΓΔ (4) ως απέναντι πλευρές του ορθογωνίου ΑΓΔΕ.

Άρα από (2), (4) προκύπτει ότι ΑΒ // ΑΕ άρα τα Β, Α και Ε είναι συνευθειακά

και επειδή ΑΒ = ΑΕ, λόγω των (1), (3), το σημείο Α είναι μέσο του ΒΕ.

β) Είναι ΑΔ = ΒΓ (5) διότι είναι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Επίσης ΑΔ = ΓΕ (6) διότι οι διαγώνιες του ορθογωνίου είναι ίσες. Άρα από (5), (6) βρίσκουμε ΒΓ = ΓΕ, οπότε το τρίγωνο ΒΓΕ είναι ισοσκελές.

γ) Είναι $B\hat{\Gamma}A = \Gamma\hat{A}\Delta$ (7), ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΔ, ΒΓ που τέμνονται από την ΑΓ και $A\hat{\Delta}E = \Gamma\hat{A}\Delta$ (8) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΓ, ΔΕ που τέμνονται από την ΑΔ. Άρα από (7), (8) ισχύει $B\hat{\Gamma}A = A\hat{\Delta}E$.

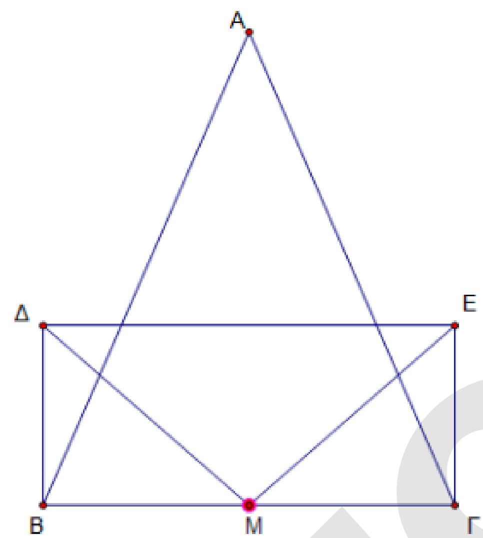
3. Θέμα 1668

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$ και Μ το μέσο της πλευράς ΒΓ. Στα σημεία Β και Γ φέρουμε κάθετες στη ΒΓ προς το ίδιο μέρος, και θεωρούμε σε αυτές σημεία Δ και Ε αντίστοιχα, τέτοια ώστε $M\Delta = ME$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) Το τετράπλευρο ΒΔΕΓ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 12)



ΛΥΣΗ

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΔΜ και ΜΓΕ έχουν:

- ΜΒ = ΜΓ, διότι το Μ είναι μέσο του ΒΓ
- ΜΔ = ΜΕ, από υπόθεση.

Άρα τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΜΓΕ είναι ίσα. Επομένως ΒΔ = ΓΕ αφού οι άλλες δύο πλευρές των ίσων τριγώνων είναι ίσες μία προς μία.

β)Είναι ΒΔ $\perp$ ΒΓ και ΓΕ $\perp$ ΒΓ άρα ΒΔ // ΓΕ. Ισχύει ακόμη ΒΔ = ΓΕ, διότι τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΜΓΕ είναι ίσα. Άρα στο τετράπλευρο ΒΔΕΓ δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επειδή $\Delta\hat{B}\Gamma = 90^o$, τότε το τετράπλευρο ΔΒΓΕ είναι ορθογώνιο.

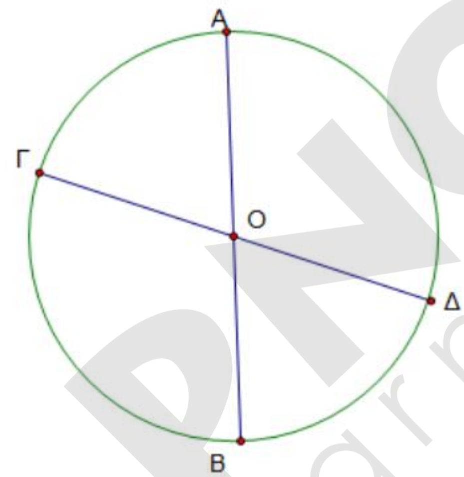
4. Θέμα 1683

Σε κύκλο κέντρου Ο φέρουμε δυο διαμέτρους του ΑΒ και ΓΔ.

Να αποδείξετε ότι:

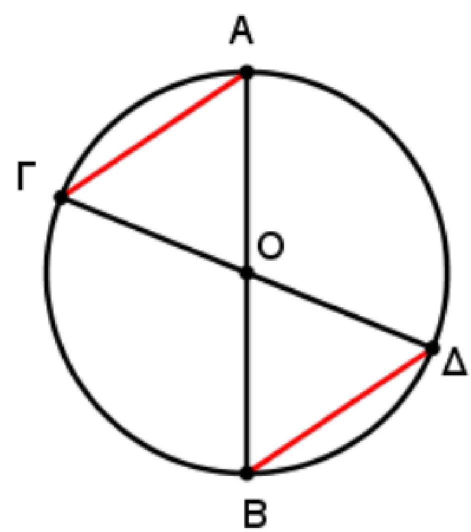
α) Οι χορδές ΑΓ και ΒΔ του κύκλου είναι ίσες. (Μονάδες 13)

β) Το τετράπλευρο ΑΓΒΔ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 12)



ΛΥΣΗ

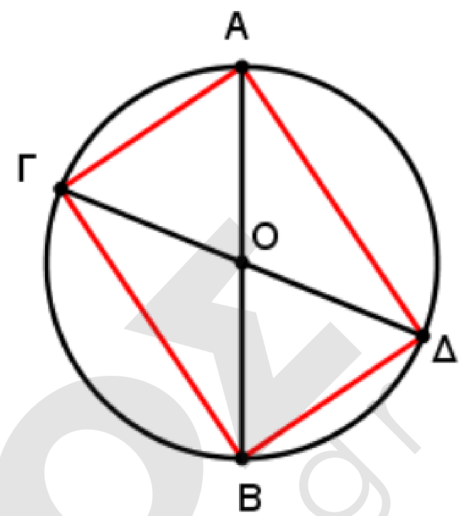
α) Έστω ρ η ακτίνα του κύκλου. Τα τρίγωνα ΟΑΓ και ΟΒΔ έχουν:



- ΟΑ = ΟΒ = ρ
- ΟΓ= ΟΔ= ρ
- $A\hat{O}\Gamma = B\hat{O}\Delta$ ως κατακορυφήν.

Σύμφωνα με το κριτήριο Π – Γ – Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και ΑΓ= ΒΔ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $A\hat{O}\Gamma$ και $B\hat{O}\Delta$.

β) Επειδή ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ= ΟΔ = ρ, οι διαγώνιες ΑΒ, ΓΔ του τετραπλεύρου ΑΓΒΔ διχοτομούνται και είναι ίσες, άρα το τετράπλευρο είναι ορθογώνιο.



Θέμα 4 - Κωδικοί:

1714, 1715, 1729, 1733, 1735, 1757, 1758, 1800, 1816, 1829, 1833, 1844 1879, 13699, 13746, 14887

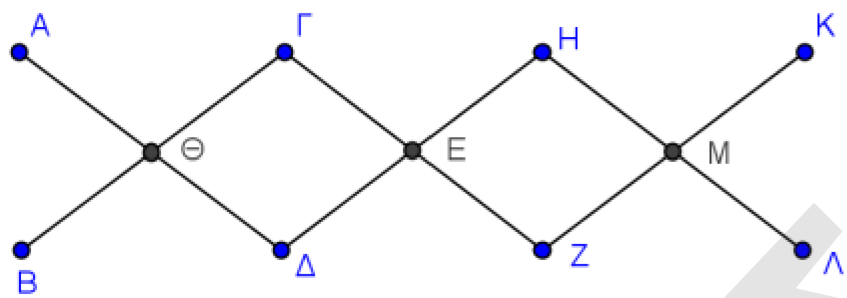
5. Θέμα 1714

Στην παρακάτω εικόνα φαίνεται μια κρεμάστρα τοίχου η οποία αποτελείται από έξι **ίσα** ευθύγραμμα κομμάτια ξύλου (ΑΔ, ΒΓ, ΓΖ, ΔΗ, ΖΚ, ΗΛ) που είναι στερεωμένα με έντεκα καρφιά (Α, Β, Γ, Δ, Θ, Ε, Μ, Η, Κ, Λ, Ζ). Αν το σημείο Θ, είναι **μέσο** των τμημάτων ΑΔ και ΒΓ ενώ το σημείο Ε είναι **μέσο** των τμημάτων ΓΖ και ΔΗ, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΓΗΖΔ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 10)

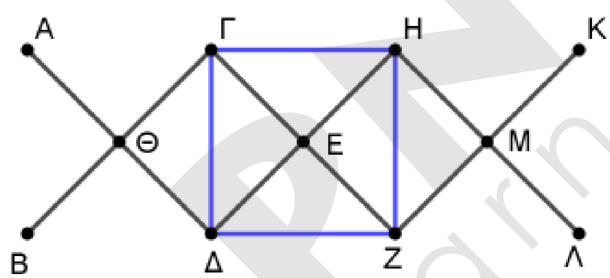
β) Τα σημεία Β, Δ, Ζ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 9)

γ) Το τετράπλευρο ΑΓΖΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)



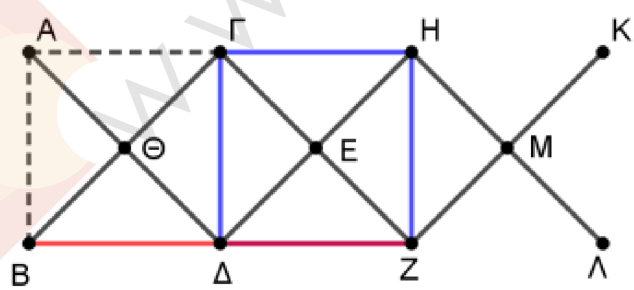
ΛΥΣΗ

α)



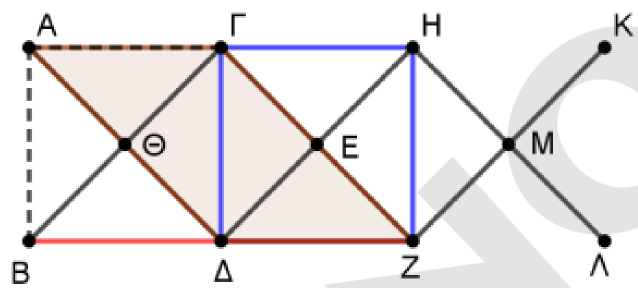
Επειδή ΓΕ = ΕΖ και ΕΗ = ΔΕ, αφού Ε μέσο των ΓΖ και ΔΗ, στο τετράπλευρο ΓΗΖΔ οι διαγώνιες του διχοτομούνται και είναι ίσες, άρα είναι ορθογώνιο.

β)



Επειδή ΘΑ = ΘΔ και ΘΓ = ΘΒ, αφού Θ μέσο των ΑΔ και ΒΓ, στο τετράπλευρο ΑΒΔΓ οι διαγώνιες του διχοτομούνται και είναι ίσες, άρα είναι ορθογώνιο, οπότε $B\hat{\Delta}\Gamma = 90^o$. Επίσης το ΓΗΖΔ είναι ορθογώνιο από το α) ερώτημα, οπότε $\Gamma\hat{\Delta}Z = 90^o$. Τότε $B\hat{\Delta}Z = B\hat{\Delta}\Gamma + \Gamma\hat{\Delta}Z = 180^o$, οπότε τα σημεία Β, Δ, Ζ είναι συνευθειακά.

γ)



Από το ορθογώνιο ΑΓΔΒ συμπεραίνουμε ότι ΑΓ//ΒΔ οπότε και ΑΓ//ΔΖ αφού Β, Δ, Ζ συνευθειακά σημεία (**β)** ερώτημα). Τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΓΔΖ έχουν:

- $A\hat{\Gamma}\Delta = \Gamma\hat{\Delta}Z = 90^o$ (ΑΒΔΓ και ΓΗΖΔ ορθογώνια παραλληλόγραμμα)
- ΓΔ κοινή πλευρά,
- ΑΔ = ΓΖ, από υπόθεση

Άρα τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΓΔΖ είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία κάθετη πλευρά ίση. Οπότε και οι άλλες κάθετες πλευρές τους θα είναι ίσες, δηλαδή ΑΓ = ΔΖ. Τελικά, το ΑΓΖΔ έχει τις απέναντι πλευρές του ΑΓ και ΔΖ ίσες και παράλληλες οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

6. Θέμα 1715

Δίνεται ευθεία (ε) και δυο σημεία Α, Β εκτός αυτής έτσι ώστε η ευθεία ΑΒ να μην είναι κάθετη στην (ε). Φέρουμε ΑΔ, ΒΓ κάθετες στην (ε) και Μ, Ν μέσα των ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα.

α) Αν τα Α, Β είναι στο ίδιο ημιεπίπεδο σε σχέση με την (ε)

i) να εξετάσετε αν το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι, παραλληλόγραμμο, τραπέζιο ή ορθογώνιο σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις, αιτιολογώντας την απάντησή σας:

1) ΑΔ < ΒΓ (Μονάδες 4)

2) ΑΔ = ΒΓ. (Μονάδες 4)

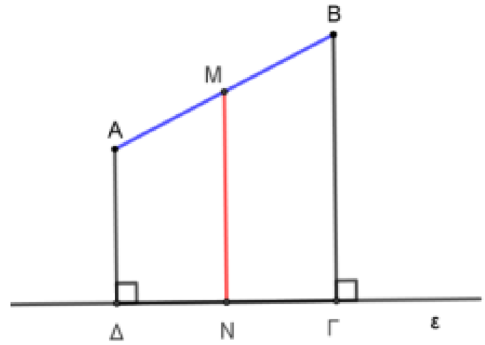
ii) να εκφράσετε το τμήμα ΜΝ σε σχέση με τα τμήματα ΑΔ, ΒΓ στις δυο προηγούμενες περιπτώσεις. (Μονάδες 6)

β) Αν η ευθεία (ε) τέμνει το τμήμα ΑΒ στο μέσο του Μ να βρείτε το είδος του τετραπλεύρου ΑΓΒΔ (παραλληλόγραμμο, τραπέζιο, ορθογώνιο) και να δείξετε ότι τα Μ, Ν ταυτίζονται. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9+2)

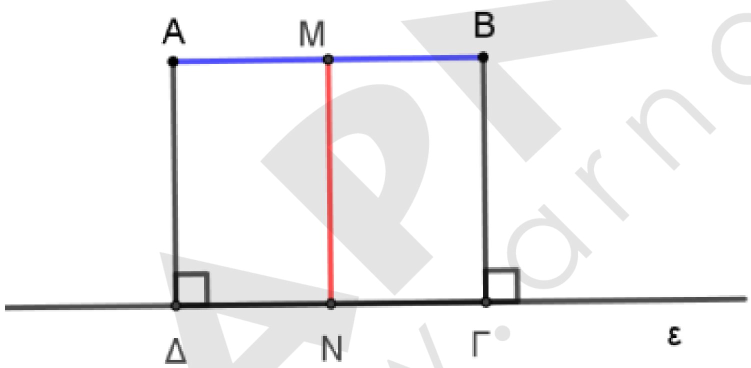
ΛΥΣΗ

α) Επειδή ΑΔ $\perp$ ε και ΒΓ $\perp$ ε, τα τμήματα ΑΔ και ΒΓ είναι κάθετα στην ίδια ευθεία οπότε είναι μεταξύ τους παράλληλα. Δηλαδή ΑΔ // ΒΓ .

i) 1) Αν ΑΔ < ΒΓ, τότε ΑΔ $\neq$ ΒΓ άρα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ δεν είναι παραλληλόγραμμο οπότε έχει μόνο δύο πλευρές παράλληλες και είναι τραπέζιο.



2) Αν ΑΔ = ΒΓ, τότε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επειδή $\widehat{\Delta} = 90^{o}$ (ΑΔ⊥ε), είναι τελικά ορθογώνιο.

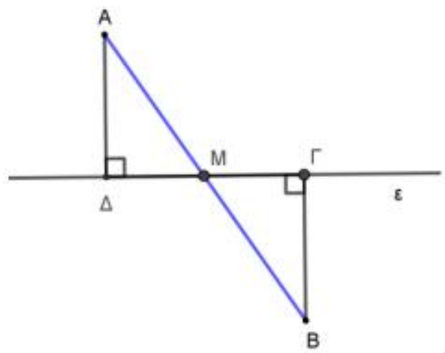


ii) 1) Όταν το ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο, τότε το ΜΝ είναι διάμεσός του, άρα

ΜΝ = $\frac{ΑΔ+ΒΓ}{2}$.

2) Όταν το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο, τότε και τα ΑΜΝΔ, ΜΝΓΒ είναι ορθογώνια. Γιατί ΑΜ=ΔΝ ίσα και παράλληλα ως μισά των ίσων πλευρών ΑΒ και ΔΓ. Ομοίως ΜΒ=//ΝΓ και τότε ΜΝ = ΑΔ = ΒΓ.

β) Αν η (ε) τέμνει το ΑΒ στο μέσο του Μ, τότε:



Τα τρίγωνα ΑΔΜ και ΜΒΓ έχουν:

- $\widehat{\Delta} = \widehat{\Gamma} = 90°$
- ΑΜ = ΜΒ, διότι Μ μέσο της ΑΒ
- $A\widehat{M}\Delta = B\widehat{M}\Gamma$, ως κατακορυφήν.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία οξεία γωνία ίση. Οπότε θα έχουν ίσες και τις άλλες κάθετες πλευρές τους, δηλαδή ΑΔ=ΒΓ. Τότε το τετράπλευρο ΑΓΒΔ θα είναι παραλληλόγραμμο αφού δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες.

Επειδή ΑΜ > ΜΔ

και ΜΒ > ΜΓ θα είναι

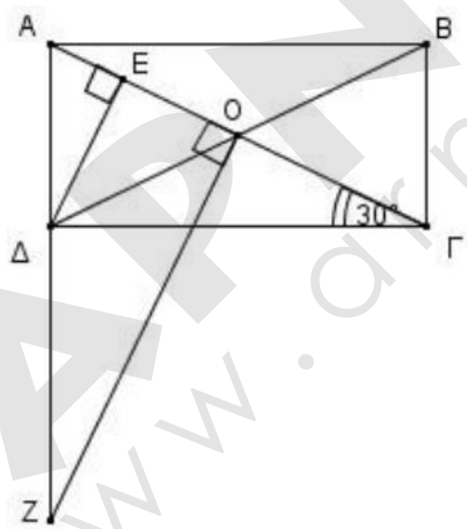
ΑΜ+ΜΒ>ΜΔ+ΜΓ ⇔ ΑΒ > ΓΔ. Άρα το ΑΓΒΔ δεν έχει ίσες διαγώνιες οπότε δεν είναι ορθογώνιο. Επειδή οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου διχοτομούνται, τα μέσα Μ και Ν των ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα ταυτίζονται.

7. Θέμα 1729

Στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι $\Delta\hat{\Gamma}A = 30^\circ$ και Ο το κέντρο του. Φέρουμε ΔΕ $\perp$ ΑΓ.

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία $A\hat{\Delta}\Gamma$ χωρίζεται από τη ΔΕ και τη διαγώνιο ΔΒ σε τρεις ίσες γωνίες. (Μονάδες 13)

β) Φέρουμε κάθετη στην ΑΓ στο σημείο Ο η οποία τέμνει την προέκταση της ΑΔ στο Ζ. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΖΟ και ΑΒΓ είναι ίσα. (Μονάδες 12)



ΛΥΣΗ

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ οι οξείες γωνίες του $\Delta\hat{A}\Gamma$ και $\Delta\hat{\Gamma}A$ είναι συμπληρωματικές, οπότε αφού $\Delta\hat{\Gamma}A = 30^o$, τότε $\Delta\hat{A}\Gamma = 60^o$ (1). Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΑΕ οι οξείες γωνίες του $\Delta\hat{A}\Gamma$ και $A\hat{\Delta}E$ είναι συμπληρωματικές, οπότε αφού $\Delta\hat{A}\Gamma = 60^o$, τότε $A\hat{\Delta}E = 30^o$ (2).

Οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι ίσες και διχοτομούνται, άρα

ΟΓ = $\frac{\mathrm{A\Gamma}}{2} = \frac{\mathrm{B\Delta}}{2}$ = ΟΔ.

Επομένως το τρίγωνο ΟΓΔ είναι ισοσκελές με βάση ΔΓ, οπότε $O\hat{\Delta}\Gamma = O\hat{\Gamma}\Delta = 30^o$ (3).

Ισχύει ακόμη ότι: $A\hat{\Delta}E + E\hat{\Delta}O + O\hat{\Delta}\Gamma = 90^o$. Δηλαδή· $30^o + E\hat{\Delta}O + 30^o = 90^o$.

Άρα $E\hat{\Delta}O = 30^o$ (4).

Από τις (2), (3) και (4) έχουμε ότι $A\hat{\Delta}E = E\hat{\Delta}O = O\hat{\Delta}\Gamma = 30^o$.

Άρα η γωνία $A\hat{\Delta}\Gamma$ χωρίζεται από τις ΔΕ και ΔΒ σε τρείς ίσες γωνίες.

β) Το τρίγωνο ΟΑΔ είναι ισοσκελές με ΟΑ=ΟΔ ως μισά των ίσων διαγωνίων ΑΓ, ΒΔ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ. Αφού $\Delta\hat{A}\Gamma = 60^o$ από(1) θα είναι $\Delta\hat{A}E = 60^o$. Άρα το ισοσκελές τρίγωνο ΟΑΔ είναι ισόπλευρο με ΟΑ = ΟΔ = ΑΔ. Όμως ΑΔ=ΒΓ ως απέναντι πλευρές του ορθογωνίου. Άρα τα τρίγωνα ΑΖΟ και ΑΒΓ έχουν:

- $\hat{O} = \hat{B} = 90^o$ (ΖΟ⊥ΑΓ στο σημείο Ο)
- ΟΑ = ΒΓ
- $A\hat{\Gamma}B = 90^o - 30^o = 60^o = Z\hat{A}O$.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με μία κάθετη πλευρά ίση και την προσκείμενη οξεία γωνία ίση.

8. Θέμα 1733

Έστω ε_1, ε_2 δυο κάθετες ευθείες που τέμνονται στο Ο και τυχαίο σημείο Μ του επιπέδου που δεν ανήκει στις ευθείες.

α) Αν M_1 είναι το συμμετρικό του Μ ως προς την ε_1 και M_2 το συμμετρικό του M_1 ως προς την ε_2, να αποδείξετε ότι:

I. $OM = OM_1$ (Μονάδες 6)

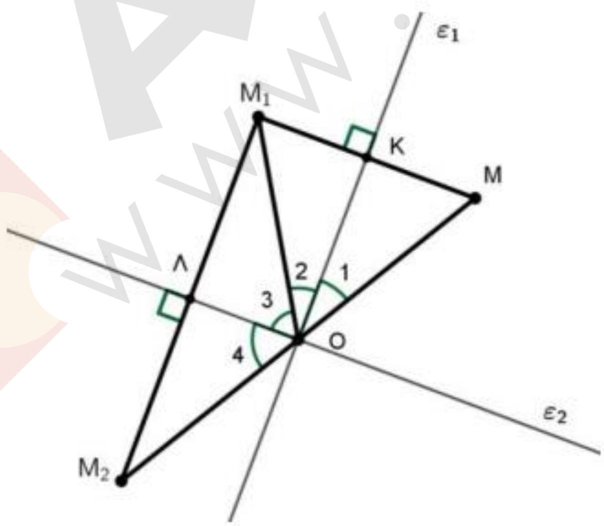
II. Τα σημεία Μ, Ο και M_2 είναι συνευθειακά. (Μονάδες 8)

III. Το τρίγωνο MM_1M_2 είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 6)

Β) Αν M_3 είναι το συμμετρικό σημείο του M_2 ως προς την ε_1, τι είδους παραλληλόγραμμο είναι το $MM_1M_2M_3$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) i. Επειδή το σημείο M_1 είναι το συμμετρικό του Μ ως προς την ε_1, η ε_1 είναι μεσοκάθετος του MM_1. Το Ο ανήκει στη μεσοκάθετο του MM_1, οπότε ισαπέχει από τα Μ και M_1, δηλαδή $OM = OM_1$.



ii. Στο ισοσκελές τρίγωνο OMM_1 η διάμεσος ΟΚ είναι και διχοτόμος, άρα $M\hat{O}M_1 = 2\hat{O}_2$.

Επειδή στο τρίγωνο M_1OM_2 η ΟΛ είναι διάμεσος και ύψος το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Άρα η ΟΛ είναι και διχοτόμος και ισχύει $M_1\hat{O}M_2 = 2\hat{O}_3$.

Τότε: $M\hat{O}M_2 = M\hat{O}M_1 + M_1\hat{O}M_2 = 2\hat{O}_2 + 2\hat{O}_3 = 2(\hat{O}_2 + \hat{O}_3) = 2 \cdot 90^o = 180^o$.

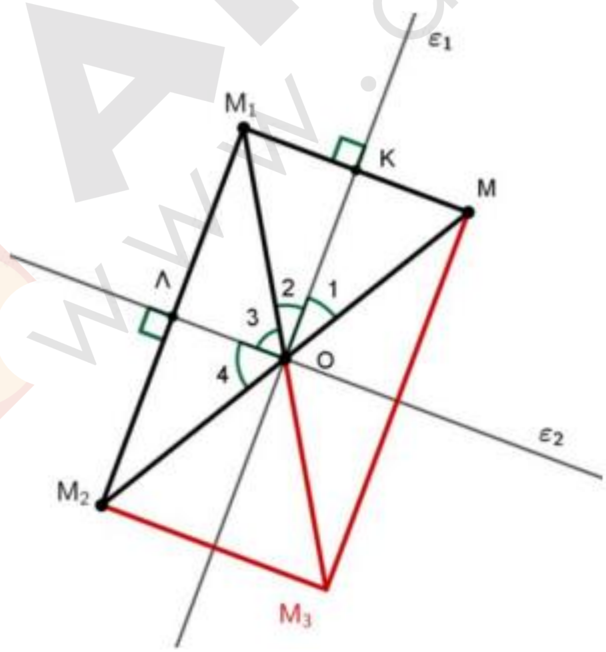
Αφού η γωνία $M\hat{O}M_2$ είναι ευθεία γωνία, τα σημεία Μ, Ο και M_2 είναι συνευθειακά.

iii. Το τετράπλευρο $KM_1ΛO$ έχει 3 γωνίες ορθές, άρα είναι ορθογώνιο. Συνεπώς $K\hat{M}_1Λ = 90^o$. Άρα το τρίγωνο MM_1M_2 είναι ορθογώνιο με $M\hat{M}_1M_2=90^\circ$.

β) Όμοια με το ερώτημα (α) βρίσκουμε:

$OM_3 = OM_2$ οπότε $OM_3 = OM_1 = OM_2 = OM$ και τα σημεία M_1, Ο, M_3 είναι συνευθειακά.

Τελικά στο $MM_1M_2M_3$ οι διαγώνιοι MM_2 και M_1M_3 τέμνονται στο Ο, είναι ίσες και διχοτομούνται, οπότε το $MM_1M_2M_3$ είναι ορθογώνιο.



9. Θέμα 1735

Θεωρούμε ευθεία (ε) και δυο σημεία Α και Β εκτός αυτής, τα οποία βρίσκονται στο ίδιο ημεπίπεδο σε σχέση με την (ε) έτσι ώστε, η ευθεία ΑΒ να μην είναι κάθετη στην (ε). Έστω Α΄ και Β΄ τα συμμετρικά σημεία των Α και Β αντίστοιχα ως προς την ευθεία (ε).

α) Να αποδείξετε ότι ΑΑ' // ΒΒ'. (Μονάδες 6)

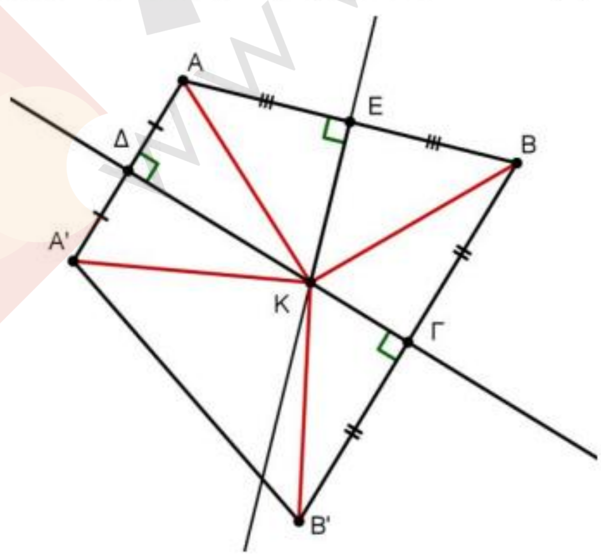
β) Αν η μεσοκάθετος του ΑΒ τέμνει την ευθεία (ε) στο σημείο Κ , να αποδείξετε ότι το Κ ανήκει και στη μεσοκάθετο του Α΄Β΄. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τη σχέση της ευθείας ΑΒ με την ευθεία (ε) ώστε το τετράπλευρο ΑΒΒ΄Α΄ να είναι ορθογώνιο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Επειδή ΑΑ΄ $\perp$ ε και ΒΒ΄ $\perp$ ε, είναι ΑΑ΄ // ΒΒ΄.

β) Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου του ΑΒ ισαπέχει από τα Α και Β. Αφού λοιπόν το σημείο Κ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΒ, ισχύει ότι ΚΑ = ΚΒ (1).



Έξυπνα & εύκολα!

Επειδή το Α΄ είναι το συμμετρικό του Α ως προς την (ε), η (ε) είναι μεσοκάθετος του ΑΑ΄, άρα ΚΑ = ΚΑ΄ (2).

Επειδή το Β΄ είναι το συμμετρικό του Β ως προς την (ε), η (ε) είναι μεσοκάθετος του ΒΒ΄, άρα ΚΒ = ΚΒ΄ (3).

Από τις (1), (2), (3) προκύπτει ότι ΚΑ΄= ΚΒ΄, δηλαδή ότι το Κ ισαπέχει από τα άκρα του Α'Β', άρα το Κ ανήκει στη μεσοκάθετο του Α΄Β΄.

γ) Αν το ΑΒΒ΄Α΄ είναι ορθογώνιο, τότε οι γωνίες του είναι ορθές. Τότε είναι $AB \perp AA'$ και $\varepsilon \perp AA'$, άρα $AB // \varepsilon$. Δηλαδή, αν το ΑΒΒ΄Α΄ είναι ορθογώνιο, τότε οι ΑΒ και ε είναι παράλληλες.

Αντίστροφα, αν $AB // \varepsilon$, αφού $\varepsilon \perp AA'$, θα είναι και $AB \perp AA'$ και ομοίως $A'B' \perp AA'$, άρα το ΑΒΒ΄Α΄ είναι ορθογώνιο.

10. Θέμα 1757

Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ, τέτοιο ώστε $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $AB = \frac{1}{4}\Delta\Gamma$ και $AB = \frac{1}{3}A\Delta$. Επιπλέον, φέρουμε $BE \perp \Delta\Gamma$.

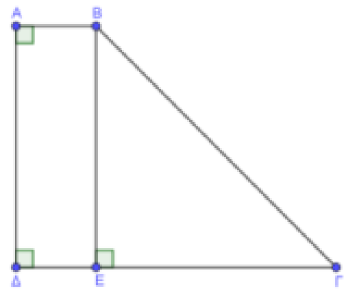
α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΕΔ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. (Μονάδες 10)

γ) Αν Κ, Λ είναι τα μέσα των ΒΕ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι η ΑΓ διέρχεται από το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΒΚ. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Το τετράπλευρο ΑΒΕΔ έχει τρείς γωνίες ορθές, άρα είναι ορθογώνιο.



β) Είναι:

ΔΕ = ΑΒ και ΒΕ = ΑΔ

ως απέναντι πλευρές του ορθογωνίου ΑΒΕΔ και ΒΕ = ΑΔ = 3ΑΒ (1), από υπόθεση.

Τότε:

ΕΓ = ΓΔ – ΔΕ = 4ΑΒ – ΑΒ = 3ΑΒ (2)

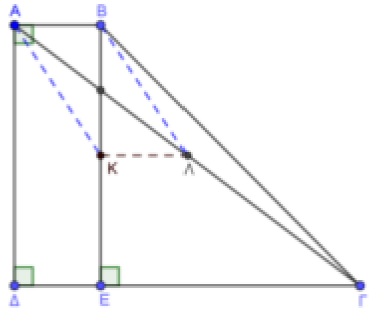
Από (1), (2) βρίσκουμε ΒΕ = ΕΓ.

Επιπλέον είναι $B\hat{E}\Gamma = 90^o$, οπότε το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

γ) Το ΚΛ ενώνει τα μέσα των διαγωνίων του τραπεζίου ΑΕΓΒ, άρα ΚΛ // ΑΒ και επιπλέον ισχύει ότι:

$$K\Lambda = \frac{\Gamma E - AB}{2} = \frac{3AB - AB}{2} = \frac{2AB}{2} = AB$$

Οπότε το τετράπλευρο ΑΚΛΒ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες άρα είναι παραλληλόγραμμο. Οι ΑΛ, ΒΚ είναι διαγώνιες του παραλληλογράμμου και διχοτομούνται, άρα η ΑΓ τέμνει το τμήμα ΒΚ στο μέσον του.



11. Θέμα 1758

Δίνεται κύκλος (Ο, R) με διάμετρο ΑΒ και ευθείες $ε_1$, $ε_2$ εφαπτόμενες του κύκλου στα άκρα της διαμέτρου ΑΒ. Θεωρούμε ευθεία ε εφαπτομένη του κύκλου σε σημείο του Ε, η οποία τέμνει τις $ε_1$ και $ε_2$ στα Δ και Γ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι ΓΔ = ΑΔ + ΒΓ

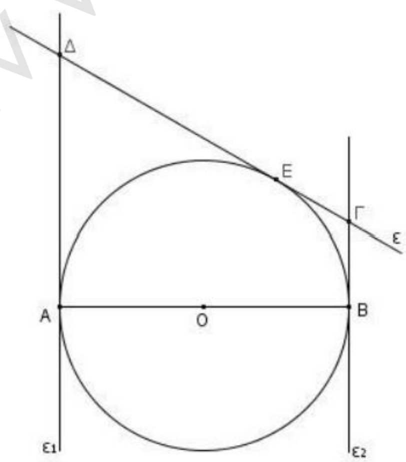
(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΓΟΔ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 9)

γ) Να διερευνήσετε το είδος του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ανάλογα με τη θέση του σημείου Ε στο ημικύκλιο ΑΒ.

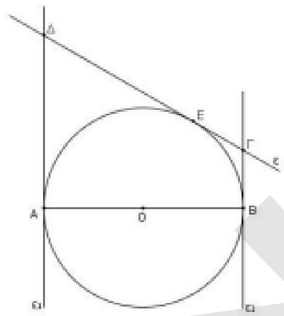
(Μονάδες 7)



ΛΥΣΗ

α) Ισχύει ΓΕ = ΒΓ (2) ως εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από το σημείο Γ προς τον κύκλο. Όμοια, ισχύει ότι ΕΔ = ΑΔ (3). Τότε ΓΔ = ΓΕ + ΕΔ

οπότε λόγω των (2), (3) βρίσκουμε ΓΔ = ΑΔ + ΒΓ.

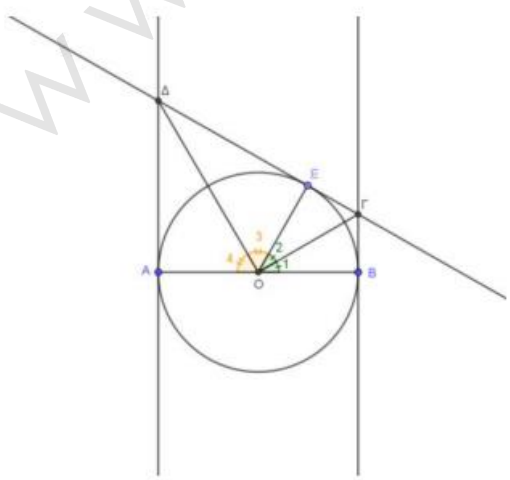


β) Τα ΓΕ, ΓΒ είναι εφαπτόμενα τμήματα οπότε το Γ ισαπέχει από τα σημεία Ε και Β, άρα η ΓΟ είναι διχοτόμος της γωνίας $E\widehat{O}B$. Όμοια, η ΔΟ διχοτομεί τη γωνία $A\widehat{O}E$. Άρα $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 = \omega$ και $\widehat{O}_3 = \widehat{O}_4 = \phi$

Είναι

$\widehat{O}_1 + \widehat{O}_2 + \widehat{O}_3 + \widehat{O}_4 = 180^o \Leftrightarrow 2\omega + 2\phi = 180^o \Leftrightarrow \omega + \phi = 90^o$

Άρα $\Gamma\widehat{O}\Delta = \omega + \phi = 90^o$ οπότε το τρίγωνο ΓΟΔ είναι ορθογώνιο στο Ο.



γ) Επειδή τα ΑΔ, ΒΓ είναι εφαπτόμενες του κύκλου, ισχύει ότι $ΑΔ \perp ΑΒ$ και $ΒΓ \perp ΑΒ$

Άρα ΑΔ // ΒΓ.

- Αν το σημείο Ε δεν είναι μέσο του ημικυκλίου ΑΒ τότε οι ΓΔ και ΑΒ δεν είναι παράλληλες οπότε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο.
- Αν το Ε είναι μέσο του ημικυκλίου ΑΒ, τότε $B\widehat{O}E = 90^o$ (επίκεντρη γωνία που βαίνει σε τεταρτοκύκλιο) και $ΕΓ \perp ΟΕ$, άρα ΕΓ//ΑΒ. Οπότε ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο και αφού έχει μια ορθή γωνία, είναι ορθογώνιο.

12. Θέμα 1800

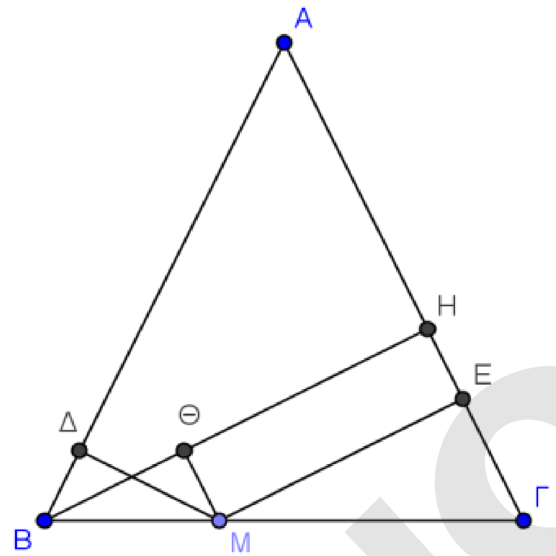
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ , τυχαίο σημείο Μ της βάσης του ΒΓ και το ύψος του ΒΗ. Από το Μ φέρουμε κάθετες ΜΔ, ΜΕ και ΜΘ στις ΑΒ, ΑΓ και ΒΗ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΜΕΗΘ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 9)

β) ΒΘ = ΔΜ (Μονάδες 9)

γ) Το άθροισμα ΜΔ+ΜΕ=ΒΗ. (Μονάδες 7)



ΛΥΣΗ

α) Το τετράπλευρο ΜΕΗΘ έχει τρείς ορθές γωνίες άρα είναι ορθογώνιο.

β) Είναι ΜΘ ⊥ ΒΗ και ΓΗ ⊥ ΒΗ οπότε ΜΘ // ΓΗ. Τότε ισχύει $B\widehat{M}\Theta = \hat{\Gamma}$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΜΘ και ΓΗ που τέμνονται από τη ΒΓ.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΔΜ και ΒΘΜ έχουν:

- $\Delta\hat{B}M = B\widehat{M}\Theta$, διότι $\Delta\hat{B}M = \hat{\Gamma}$ (ως γωνίες προσκείμενες στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ) και $B\widehat{M}\Theta = \hat{\Gamma}$.
- ΜΒ κοινή πλευρά

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και ΒΘ=ΔΜ διότι βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $B\widehat{M}\Theta$, $\Delta\hat{B}M$ αντίστοιχα.

γ) Από το ορθογώνιο ΜΕΗΘ ισχύει ΜΕ = ΘΗ. Έχουμε:

$M\Delta + ME = B\Theta + \Theta H \Leftrightarrow M\Delta + ME = BH$

13. Θέμα 1816

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και σημείο Δ στην προέκταση της ΒΓ. Από το Δ φέρουμε ΔΚ κάθετη στην ΑΒ και ΔΕ κάθετη στην προέκταση της ΑΓ. Από το σημείο Γ φέρουμε ΓΗ κάθετη στην ΑΒ και ΓΖ κάθετη στην ΚΔ.

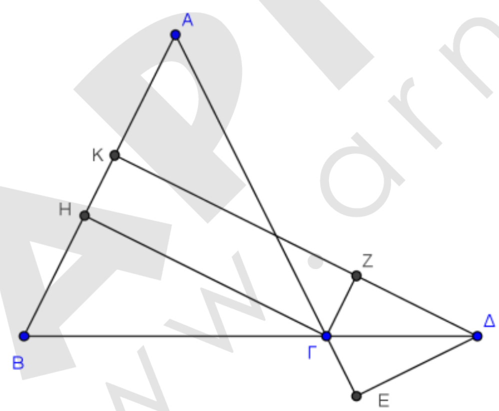
Να αποδείξετε ότι:

α) Η γωνία ΖΓΔ είναι ίση με τη γωνία Β. (Μονάδες 4)

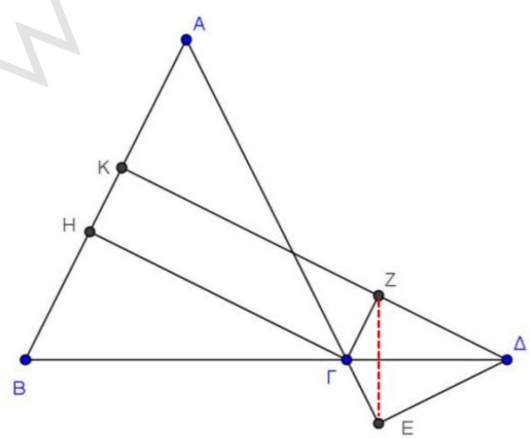
β) Η ΓΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΖΓΕ. (Μονάδες 4)

γ) Το τρίγωνο ΔΖΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

δ) ΔΚ – ΔΕ = ΗΓ (Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ



α) Επειδή ΓΖ ⊥ ΔΚ και ΒΑ ⊥ ΔΚ, είναι ΓΖ // ΑΒ. Επομένως $Z\hat{Γ}Δ = \hat{B}$ (1), ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ, ΓΖ που τέμνονται από την ΒΔ.

β) Είναι $Α\hat{Γ}Β = \hat{B}$ (2) ως γωνίες βάσης ισοσκελούς τριγώνου. Ακόμη $Δ\hat{Γ}Ε = Α\hat{Γ}Β$ (3) ως κατακορυφήν. Τελικά από τις (1), (2) και (3) προκύπτει $Δ\hat{Γ}Ε = Ζ\hat{Γ}Δ$, οπότε η ΓΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $Ζ\hat{Γ}Ε$.

γ) Τα τρίγωνα ΖΓΔ και ΔΓΕ:

- Είναι ορθογώνια
- Έχουν ΔΓ κοινή πλευρά
- Έχουν $Ε\hat{Γ}Δ = Ζ\hat{Γ}Δ$

Άρα έχουν ίσες υποτείνουσες και οξείες γωνίες μία προς μία ίσες. Επομένως είναι ίσα και έχουν ΔΖ = ΔΕ (απέναντι από τις ίσες γωνίες $Ε\hat{Γ}Δ$ και $Ζ\hat{Γ}Δ$), οπότε το τρίγωνο ΔΖΕ είναι ισοσκελές.

δ) Το τετράπλευρο ΚΗΓΖ έχει τρεις γωνίες ορθές οπότε είναι ορθογώνιο. Οι ΚΖ, ΗΓ είναι απέναντι πλευρές του ορθογωνίου οπότε ΚΖ = ΗΓ. Τότε:

ΔΚ – ΔΕ = ΔΚ – ΔΖ = ΖΚ = ΗΓ.

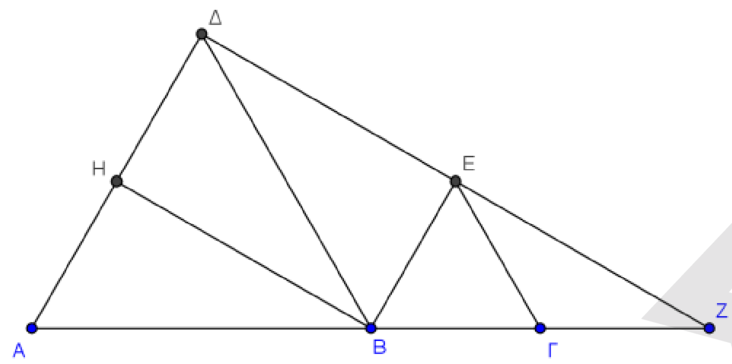
14. Θέμα 1829

Σε μια ευθεία (ε) θεωρούμε διαδοχικά τα σημεία Α, Β, Γ έτσι ώστε ΑΒ = 2 ΒΓ και στο ίδιο ημιεπίπεδο θεωρούμε ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΕ. Αν Η είναι το μέσο του ΑΔ και η ευθεία ΔΕ τέμνει την ευθεία (ε) στο σημείο Ζ να αποδείξετε ότι:

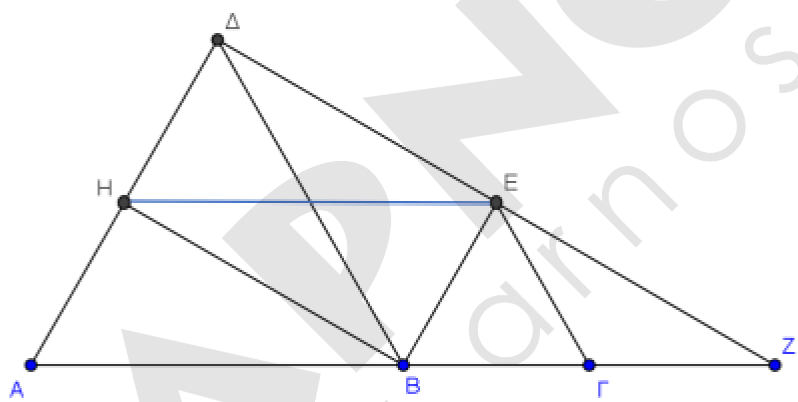
α) Το τετράπλευρο ΒΗΔΕ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΓΖΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο ΗΕΓΑ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)



ΛΥΣΗ



α) Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΕ είναι ισόπλευρα, ισχύει ότι $\Delta\widehat{A}B = E\widehat{B}\Gamma = 60^o$. Άρα οι ευθείες ΑΔ και ΒΕ, που τέμνονται από την ΑΖ έχουν δύο εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες ίσες. Συνεπώς είναι παράλληλες. Άρα ΔΗ // ΒΕ.

Επίσης, ΔΗ = $\frac{A\Delta}{2}$, επειδή το Η είναι μέσο του ΑΔ από την υπόθεση.

Όμως ΑΔ = ΑΒ, ως πλευρές του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΔ. Άρα, ΔΗ = $\frac{AB}{2}$.

Αλλά από την υπόθεση έχουμε και ότι ΒΓ = $\frac{AB}{2}$. Άρα, ΔΗ = ΒΓ.

Όμως ΒΕ = ΒΓ, ως πλευρές του ισοπλεύρου ΒΓΕ. Άρα, ΔΗ = ΒΕ.

Τελικά το τετράπλευρο ΒΗΔΕ έχει ΔΗ // ΒΕ και ΔΗ = ΒΕ, δηλαδή δύο πλευρές παράλληλες και ίσες. Επομένως είναι παραλληλόγραμμο.

Επιπλέον, στο ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΔ το ΒΗ είναι διάμεσος, άρα και ύψος, οπότε η γωνία $B\hat{H}\Delta$ είναι ορθή. Άρα, το παραλληλόγραμμο ΒΗΔΕ έχει μία ορθή γωνία, επομένως είναι ορθογώνιο.

β) Λόγω του ορθογωνίου ΒΗΔΕ είναι ΒΗ // ΔΕ. Άρα, στο τρίγωνο ΑΔΖ, η ΗΒ διέρχεται από το μέσο Η της πλευράς ΑΔ και είναι παράλληλη στην ΔΖ. Επομένως, θα διέρχεται από το μέσο της ΑΖ, άρα το Β είναι μέσο της ΑΖ.

Άρα, ΑΒ = ΒΖ.

Όμως ΑΒ = 2ΒΓ από την υπόθεση, άρα ΒΖ = 2ΒΓ, δηλαδή το Γ είναι μέσο της ΒΖ. Επομένως ΒΓ = ΓΖ.

Όμως από το ισόπλευρο τρίγωνο ΒΓΕ είναι ΒΓ = ΓΕ. Άρα ΓΕ = ΓΖ, δηλαδή το ΓΖΕ είναι ισοσκελές.

γ) Προκύπτει ότι το Ε είναι μέσο της ΔΖ: Πράγματι, στο τρίγωνο ΑΔΖ, το ΒΕ διέρχεται από το μέσο Β της ΑΖ και είναι παράλληλο στην ΑΔ. Άρα, θα διέρχεται από το μέσο της ΔΖ.

Παραμένοντας στο τρίγωνο ΑΔΖ, ισχύει ότι τα Η και Ε είναι μέσα των πλευρών ΑΔ και ΔΖ, αντίστοιχα. Άρα, η ΕΗ είναι παράλληλη στην ΑΖ (ή αλλιώς στην ΑΓ).

Επίσης, $H\hat{A}B = E\hat{\Gamma}B = 60^o$, λόγω των ισοπλεύρων τριγώνων ΑΒΔ και ΒΓΕ.

Άρα:

- Εφόσον $H\hat{A}B + E\hat{\Gamma}B < 180^o$, οι ευθείες ΑΗ και ΓΕ τέμνονται στο ημιεπίπεδο που χωρίζεται από το ΑΖ και προς το μέρος του Δ και άρα δεν είναι παράλληλες. Αυτό σημαίνει ότι λόγω της παραλληλίας των ΕΗ και ΑΓ το ΗΕΓΑ είναι τραπέζιο.

- Επειδή οι γωνίες της βάσης του ΗΕΓΑ είναι ίσες, αυτό είναι ισοσκελές τραπέζιο.

15. Θέμα 1833

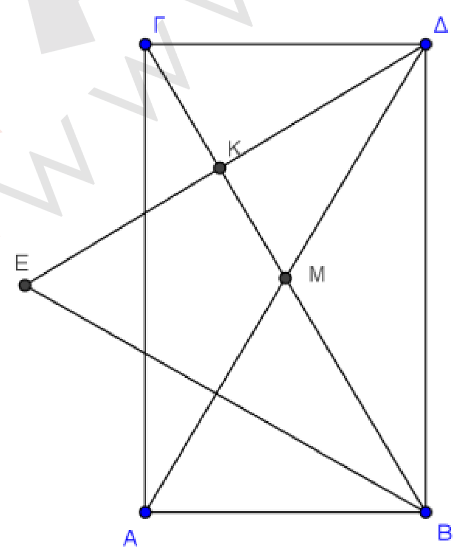
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($A=90^o$). Φέρουμε τη διάμεσο του ΑΜ την οποία προεκτείνουμε (προς το μέρος του Μ) κατά τμήμα ΜΔ = ΑΜ. Θεωρούμε ευθεία ΔΚ κάθετη στη ΒΓ, η οποία τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας Β στο Ε.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΒΔΓ είναι ορθογώνιο (Μονάδες 8)

α) $K\hat{E}B = 90^o - \frac{\hat{B}}{2}$ (Μονάδες 8)

β) ΔΕ = ΒΔ (Μονάδες 9)



ΛΥΣΗ

α) Είναι ΑΜ = ΜΔ και ΒΜ = ΜΓ. Δηλαδή οι διαγώνιες του τετράπλευρου ΑΒΔΓ διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επίσης έχει $B\hat{A}\Gamma = 90^o$, άρα το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο.

β) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΚΕΒ βρίσκουμε:

$K\hat{E}B + E\hat{B}K = 90^o \Leftrightarrow K\hat{E}B = 90^o - E\hat{B}K \Leftrightarrow K\hat{E}B = 90^o - \frac{\hat{B}}{2}$

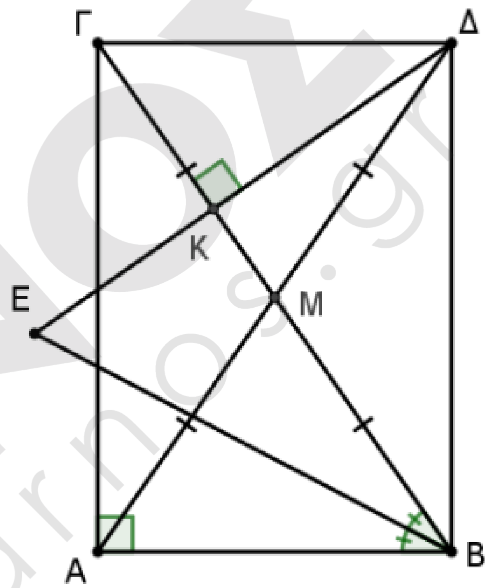
(1)

γ) Είναι $A\hat{B}\Delta = A\hat{B}E + E\hat{B}\Delta \Leftrightarrow 90^o = \frac{\hat{B}}{2} + E\hat{B}\Delta \Leftrightarrow E\hat{B}\Delta =$

$90^o - \frac{\hat{B}}{2}$ (2)

Από τις (1), (2) προκύπτει: $K\hat{E}B = E\hat{B}\Delta$

Άρα το τρίγωνο ΔΒΕ είναι ισοσκελές με ΔΕ = ΒΔ.



16. Θέμα 1844

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας Α, για την οποία ισχύει $A\Delta = \Delta\Gamma$.

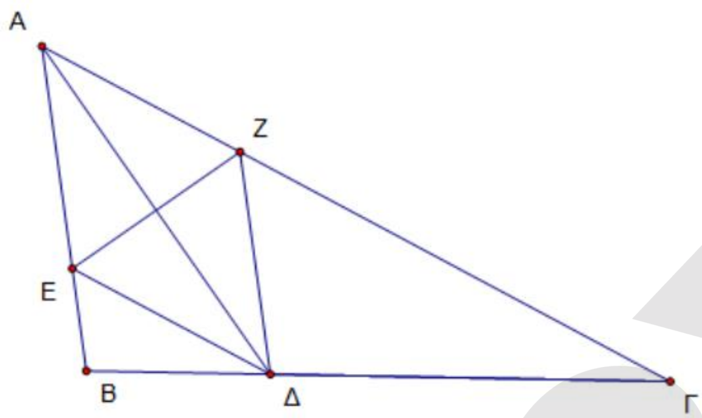
Η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΔΒ και η ΔΖ παράλληλη στην ΑΒ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τμήματα ΕΔ και ΑΓ είναι παράλληλα. (Μονάδες 9)

β) Το τρίγωνο ΕΑΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

γ) Τα τμήματα ΑΔ και ΕΖ διχοτομούνται. (Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ

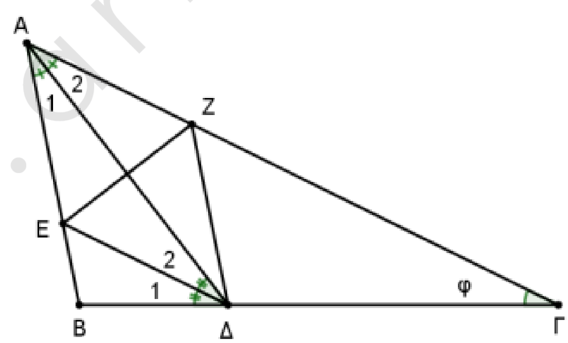
α) Επειδή ΑΔ=ΔΓ, το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΓ, άρα $\widehat{A}_2 = \widehat{\Gamma} = \widehat{\varphi}$

Η γωνία $B\widehat{\Delta}A$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΔΓ, άρα

$B\widehat{\Delta}A = \widehat{A}_2 + \widehat{\Gamma} = 2\,\widehat{\varphi}$.

Είναι $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta}_2 = \dfrac{B\widehat{\Delta}A}{2} = \dfrac{2\widehat{\varphi}}{2} = \widehat{\varphi}$

Είναι $\widehat{\Delta}_2 = \widehat{A}_2$. Δηλαδή δύο εντός εναλλάξ γωνίες που σχηματίζονται από τις ΔΕ, ΑΓ και την ΑΔ, είναι ίσες. Άρα ΔΕ // ΑΓ.



β) Είναι $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ αφού η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$ και $\widehat{\Delta}_2 = \widehat{A}_2$, οπότε το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΔ.

γ) Επειδή ΔΖ // ΑΒ και ΔΕ //ΑΖ, το τετράπλευρο ΑΕΔΖ είναι παραλληλόγραμμο. Τα ΑΔ και ΕΖ είναι διαγώνιες παραλληλογράμμου, οπότε διχοτομούνται.

17. Θέμα 1879

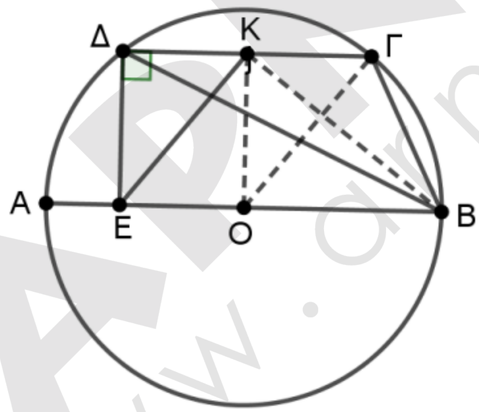
Έστω κύκλος με κέντρο Ο και διάμετρο ΑΒ. Φέρνουμε χορδή $\Gamma\Delta // AB$ με Κ το μέσο της. Από το Δ φέρνουμε το τμήμα ΔΕ κάθετο στη ΔΓ.

Να αποδείξετε ότι:

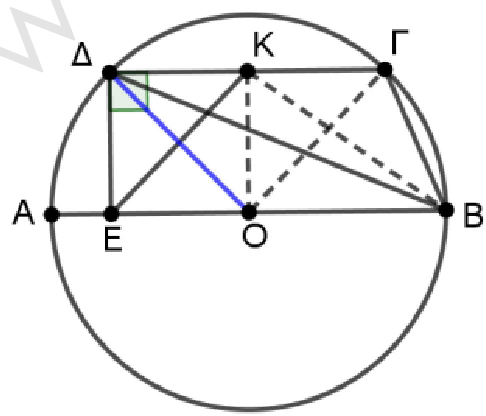
α) Το τετράπλευρο ΚΓΟΕ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

β) $\Delta\hat{E}K = \dfrac{\Delta\hat{O}\Gamma}{2}$. (Μονάδες 12)

γ) $KE < KB$. (Μονάδες 5)



ΛΥΣΗ



α) Επειδή ΔΕ ⊥ ΓΔ και ΓΔ // ΑΒ είναι και ΔΕ ⊥ ΑΒ.

Το ΟΓΔ είναι ισοσκελές, καθώς οι ΟΔ και ΟΓ είναι ακτίνες του κύκλου. Το Κ είναι μέσο της χορδής ΔΓ. Συνεπώς η ΟΚ είναι διάμεσος της βάσης ΓΔ επομένως είναι και ύψος του τριγώνου, δηλαδή είναι ΟΚ ⊥ ΓΔ.

Τελικά, το τετράπλευρο ΔΕΟΚ έχει τρείς γωνίες ορθές, άρα είναι ορθογώνιο. Επομένως ΔΚ = ΟΕ.

Όμως, από υπόθεση, ΔΚ = ΚΓ, άρα ΟΕ = ΚΓ.

Επιπλέον ΟΕ // ΚΓ, οπότε το ΚΓΟΕ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΔΕΚ και ΔΟΚ:

- Είναι ορθογώνια, με $E\hat{\Delta}K$, $\Delta\hat{K}O$ ορθές.
- Έχουν ΔΚ κοινή πλευρά και
- ΔΕ = ΟΚ, ως απέναντι πλευρές του ορθογωνίου ΔΕΟΚ.

Άρα τα τρίγωνα ΔΕΚ και ΔΟΚ είναι ίσα, ως ορθογώνια με δύο κάθετες πλευρές ίσες, μία προς μία και άρα έχουν $\Delta\hat{E}K = \Delta\hat{O}K$ (1), ως απέναντι γωνίες της κοινής πλευράς τους, ΔΚ.

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΟΓΔ η ΟΚ είναι διχοτόμος της $\Delta\hat{O}\Gamma$ (εφόσον είναι και διάμεσος της ΓΔ).

Άρα $\Delta\hat{O}\Gamma = 2\Delta\hat{O}K$. Από (1) έχουμε $\Delta\hat{E}K = \Delta\hat{O}K$, επομένως:

$\Delta\hat{O}\Gamma = 2\Delta\hat{E}K \Leftrightarrow \Delta\hat{E}K = \frac{\Delta\hat{O}\Gamma}{2}$.

γ) Είναι ΚΕ = ΟΔ, ως διαγώνιοι του ορθογωνίου ΔΕΟΚ και ΟΔ = ΟΒ, ως ακτίνες του κύκλου. Άρα ΚΕ = ΟΒ.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΒΚ, η ΚΒ είναι υποτείνουσά του, άρα ισχύει ΟΒ < ΚΒ , άρα ΚΕ < ΚΒ.

18. Θέμα 13699

Δίνονται δυο κύκλοι (Κ, ρ_1) και (Λ, ρ_2) που εφάπτονται εξωτερικά σε σημείο Α. Έστω ότι μια ευθεία (ε) εφάπτεται εξωτερικά στους δυο κύκλους σε σημεία τους Β και Γ αντίστοιχα και ότι η εσωτερική εφαπτομένη (ζ) των κύκλων στο σημείο επαφής τους Α τέμνει την ευθεία (ε) σε σημείο Μ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. οι ευθείες ΚΒ και ΛΜ τέμνονται σε σημείο, έστω Δ. (Μονάδες 10)

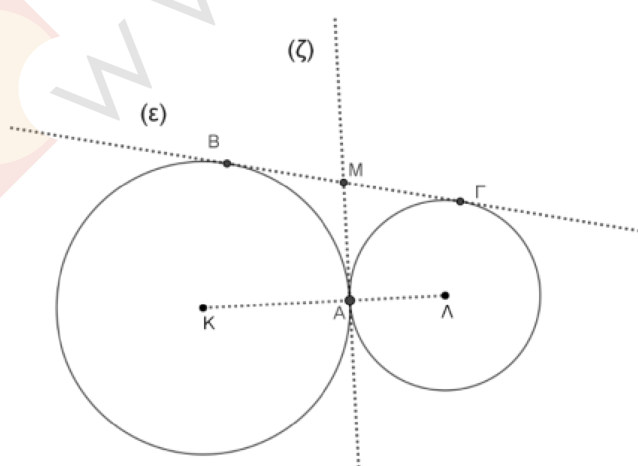
ii. το τρίγωνο ΔΚΛ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

γ) Με ποια σχέση πρέπει να συνδέονται οι ακτίνες ρ_1 και ρ_2 των δύο κύκλων ώστε το ισοσκελές τρίγωνο ΔΚΛ να είναι ορθογώνιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

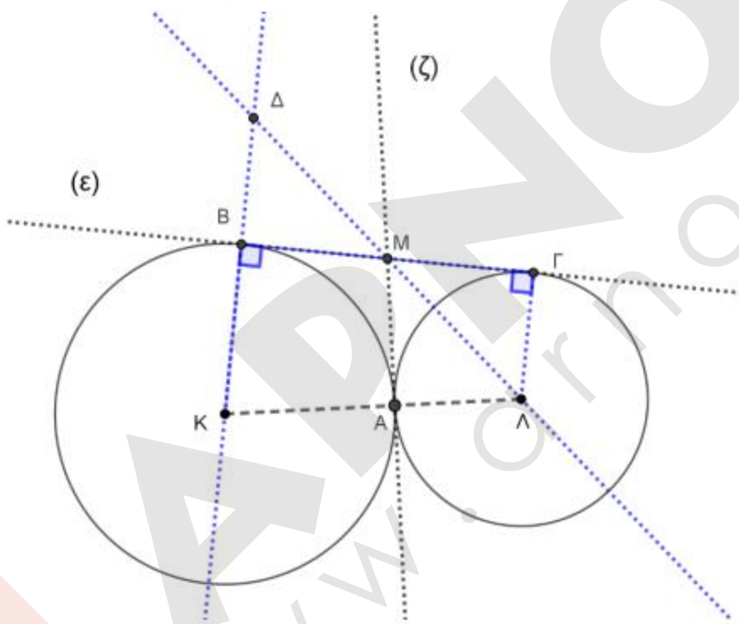
ΛΥΣΗ

Έστω οι κύκλοι (Κ, ρ_1) και (Λ, ρ_2) οι οποίοι εφάπτονται εξωτερικά σε σημείο Α, (ε) η ευθεία η οποία εφάπτεται εξωτερικά στους δυο κύκλους σε σημεία τους Β και Γ αντίστοιχα. Έστω (ζ) η κοινή εσωτερική εφαπτομένη των κύκλων στο σημείο επαφής τους Α και Μ το σημείο τομής της με την ευθεία (ε).



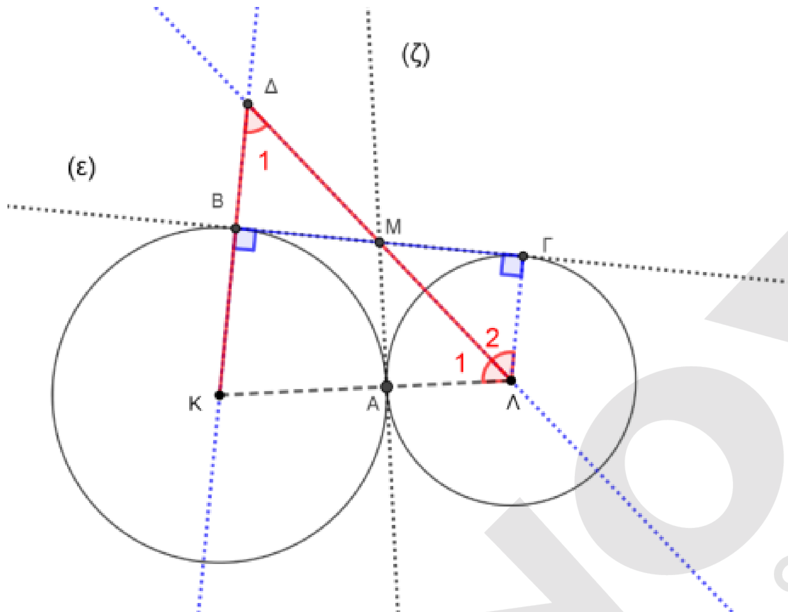
α) Έστω ΚΒ και ΛΓ οι ακτίνες των δυο κύκλων (Κ, ρ_1) και (Λ, ρ_2) στα σημεία επαφής Β και Γ αντίστοιχα. Τότε τα ΚΒ και ΛΓ θα είναι κάθετα στην (ε), οπότε θα είναι ΚΒ // ΛΓ ως κάθετες στην ίδια ευθεία (ε).

Η ΛΜ δεν είναι κάθετη στην (ε), γιατί αν η ΛΜ ήταν κάθετη στη (ε) τότε από το σημείο Λ θα άγονταν δυο κάθετες στην (ε), η ΛΜ και η ΛΓ ως ακτίνα στο σημείο επαφής Γ του κύκλου (Λ, ρ_2) με την ευθεία (ε), που είναι άτοπο, και αφού η ΛΜ τέμνει την ΛΓ στο Λ θα τέμνει και την παράλληλή της την ΚΒ έστω σε σημείο Δ.



β) Είναι ΚΔ // ΛΓ και τις τέμνει η ΛΔ, οπότε $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Lambda}_2$ (1) ως γωνίες εντός εναλλάξ.

Η ΔΛ είναι διακεντρική ευθεία του σημείου Μ στον κύκλο (Λ, ρ_2), οπότε θα διχοτομεί τη γωνία $\Gamma\widehat{\Lambda}A$ των ακτίνων στα σημεία επαφής Γ και Α, δηλαδή είναι $\widehat{\Lambda}_2 = \widehat{\Lambda}_1$ (2). Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Lambda}_1$. Οπότε το τρίγωνο ΔΚΛ έχει δυο γωνίες ίσες, άρα θα είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές τις ΚΛ και ΚΔ που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{\Delta}_1$ και $\widehat{\Lambda}_1$ αντίστοιχα.



γ) Το ισοσκελές τρίγωνο ΔΚΛ με ίσες πλευρές τις ΚΛ, ΚΒ θα είναι ορθογώνιο όταν $\Delta\hat{K}\Lambda = 90^0$

Αν $\Delta\hat{K}\Lambda = 90^0$ τότε η ΚΛ είναι κάθετη στην ΚΔ. Αν η ΚΛ είναι κάθετη στην ΚΔ, τότε η ΚΛ θα είναι παράλληλη με την ευθεία (ε) ως κάθετες στην ίδια ευθεία ΚΔ, οπότε και το τετράπλευρο ΚΛΓΒ θα είναι ορθογώνιο γιατί θα είχε τρεις ορθές γωνίας, τις $\Delta\hat{K}\Lambda$, $K\hat{B}\Gamma$ και $\Lambda\hat{\Gamma}B$. Αν το ΚΛΓΒ είναι ορθογώνιο τότε θα ισχύει ΚΒ = ΛΓ ή $\rho_1 = \rho_2$. Επομένως, αν οι κύκλοι είναι ίσοι, τότε το ισοσκελές τρίγωνο ΔΚΛ θα είναι ορθογώνιο.

19. Θέμα 13746

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΔ. Στην προέκταση της διαμέσου ΑΔ προς το Δ παίρνουμε σημείο Ε, έτσι ώστε ΑΔ = ΔΕ.

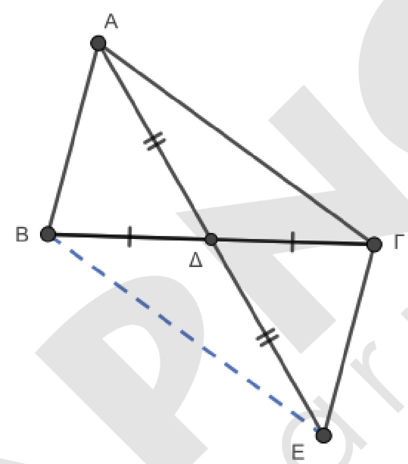
α) Να αποδείξετε ότι :

i. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΕΓΔ είναι ίσα. (Μονάδες 07)

ii. Η διάμεσος ΑΔ είναι μικρότερη από το ημιάθροισμα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ που την περιέχουν. (Μονάδες 08) β) Αν στο τρίγωνο ΑΒΓ το διπλάσιο της διαμέσου ΑΔ ισούται με την πλευρά ΒΓ, να χαρακτηρίσετε το είδος του τετράπλευρου ΑΒΕΓ και το είδος του τριγώνου ΑΒΓ και να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ



α)

i. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΕΓΔ έχουν:

- ΑΔ = ΔΕ, από υπόθεση
- ΒΔ = ΔΓ, διότι Δ μέσο της ΒΓ
- $A\widehat{\Delta}B = E\widehat{\Delta}\Gamma$ ως κατακορυφήν γωνίες

Άρα τα τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες και τις περιεχόμενες γωνίες στις πλευρές αυτές, ίσες, οπότε από το κριτήριο ΠΓΠ είναι ίσα. Επομένως θα έχουν και τις τρίτες πλευρές τους ίσες, δηλαδή ΑΒ=ΓΕ (1).

i. Εφαρμόζοντας την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο ΑΓΕ έχουμε : ΑΕ <ΑΓ + ΓΕ και με τη βοήθεια της σχέσης (1) προκύπτει ΑΕ < ΑΓ + ΑΒ. Όμως ΑΕ = 2ΑΔ, οπότε έχουμε ότι 2ΑΔ < ΑΒ + ΑΓ ή $ΑΔ < \frac{ΑΒ+ΑΓ}{2}$.

Δηλαδή η διάμεσος ΑΔ είναι μικρότερη από το ημιάθροισμα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ που την περιέχουν.

β) Δίνεται ότι 2ΑΔ = ΒΓ ή ΑΕ = ΒΓ. Δηλαδή στο τετράπλευρο ΑΒΕΓ οι διαγώνιές του είναι ίσες. Επιπλέον έχουμε ότι ΑΔ = ΔΕ από την κατασκευή και ότι ΒΔ = ΔΓ, αφού Δ μέσο της ΒΓ. Δηλαδή οι διαγώνιες του τετράπλευρου ΑΒΕΓ διχοτομούνται, οπότε αυτό είναι παραλληλόγραμμο και επιπλέον είναι ίσες, άρα το τετράπλευρο ΑΒΕΓ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Τότε στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A} = 90^o$, αφού το ΑΒΕΓ ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, άρα το ΑΒΓ είναι ορθογώνιο τρίγωνο.

20. Θέμα 14887

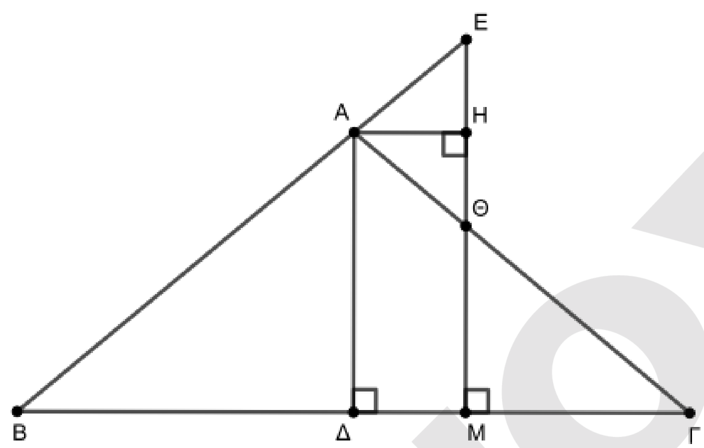
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ), και τυχαίο σημείο Μ της πλευράς ΒΓ. Από το σημείο Μ φέρουμε ευθεία κάθετη στην πλευρά ΒΓ που τέμνει τις ευθείες ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Θ αντίστοιχα. Αν ΑΔ και ΑΗ τα ύψη των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΘΕ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) $Δ\hat{A}Η = 90^o$. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΑΘΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

γ) ΜΘ+ΜΕ = 2ΑΔ. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ



α) Το τετράπλευρο ΔΜΗΑ έχει τρείς ορθές γωνίες οπότε είναι ορθογώνιο. Άρα $Δ\hat{A}Η = 90^o$.

β) Το τμήμα ΑΗ είναι παράλληλο στην ΒΓ, καθώς και τα δύο είναι κάθετα στην ΕΜ. Ισχύει ότι $Γ\hat{A}Η = Α\hat{Γ}Β$ ως γωνίες εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΗ και ΒΓ που τέμνονται από την ΑΓ. Επίσης, $Α\hat{B}Γ = Ε\hat{A}Η$ ως γωνίες εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΗ και ΒΓ που τέμνονται από την ΒΕ. Όμως, λόγω του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ, με βάση ΒΓ, είναι $Α\hat{B}Γ = Α\hat{Γ}Β$. Άρα τελικά $Γ\hat{A}Η = Ε\hat{A}Η$ και η ΑΗ είναι διχοτόμος στο τρίγωνο ΑΘΕ. Επιπλέον το ΑΗ είναι και ύψος, οπότε το τρίγωνο ΑΘΕ είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές τις ΑΘ και ΘΕ.

γ) Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΘΕ το ύψος ΑΗ θα είναι και διάμεσος, άρα ΘΗ = ΗΕ και ΘΕ = 2ΘΗ.

Για το τμήμα ΜΕ έχουμε: ΜΕ = ΜΘ + ΘΕ = ΜΘ + 2ΘΗ (1).

Άρα λόγω της (1) έχουμε: ΜΘ + ΜΕ = ΜΘ + ΜΘ + 2ΘΗ = 2ΜΘ + 2ΘΗ = 2(ΜΘ + ΘΗ) = 2ΜΗ.

Επιπλέον είναι ΑΔ = ΜΗ διότι είναι απέναντι πλευρές του ορθογωνίου ΔΜΗΑ από το α) ερώτημα, επομένως ΜΘ + ΜΕ = 2ΑΔ.