

Κεφ. 5.3. - Τράπεζα Θεμάτων 2022 - Γεωμετρία Α' Λυκείου

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

Η Τράπεζα Θεμάτων για τη Γεωμετρία Α' Λυκείου είναι μία μεγάλη «θάλασσα». Εμείς όμως έχουμε φροντίσει για εσένα, συγκεντρώνοντας εκείνα τα θέματα που αποτελούν τη «βάση» της γνώσης και για τα υπόλοιπα. Μελετώντας και κατανοώντας το μοτίβο σκέψης για τα συγκεκριμένα, μπορείς να λύσεις με επιτυχία και τα υπόλοιπα θέματα. Στην ιστοσελίδα μας www.arnos.gr για το Course της Γεωμετρίας, μελετάς και προετοιμάζεσαι με την αναλυτική διδασκαλία σε ασκήσεις και θέματα, στο ύψος της Τράπεζας.

Θέμα 2 - Κωδικοί:
1563, 1653, 1668, 1683

1. Θέμα 1563

Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$). Φέρουμε τα ύψη του AE και BZ .

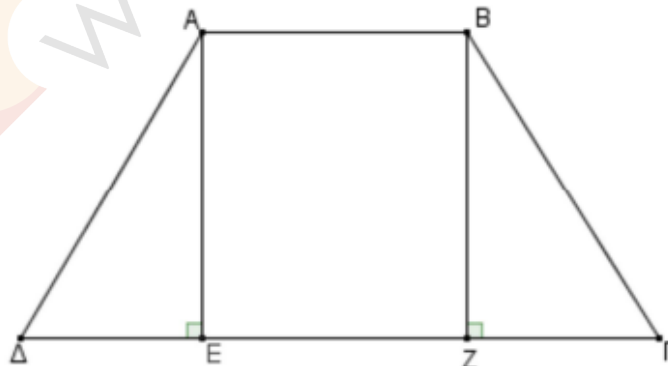
Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta E = \Gamma Z$.

(Μονάδες 12)

β) $AZ = BE$.

(Μονάδες 13)



Έξυπνα & εύκολα!

2. Θέμα 1653

Στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο $ABΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο και το $ΑΓΔΕ$ είναι ορθογώνιο.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το σημείο A είναι μέσο του BE .

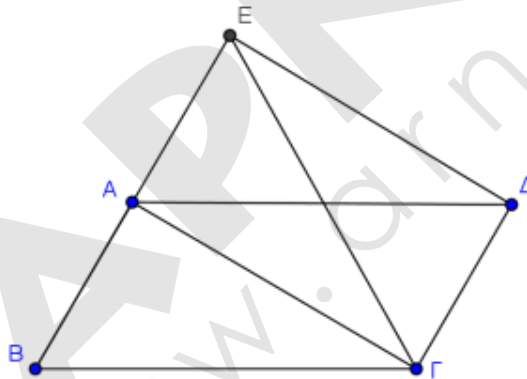
(Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο $ΒΕΓ$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 9)

γ) $\hat{B}\hat{\Gamma}A = \hat{A}\hat{\Delta}E$

(Μονάδες 8)


3. Θέμα 1668

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $ABΓ$ με $AB = AΓ$ και M το μέσο της πλευράς $BΓ$. Στα σημεία B και $Γ$ φέρουμε κάθετες στη $BΓ$ προς το ίδιο μέρος, και θεωρούμε σε αυτές σημεία Δ και E αντίστοιχα, τέτοια ώστε $M\Delta = ME$.

Να αποδείξετε ότι:

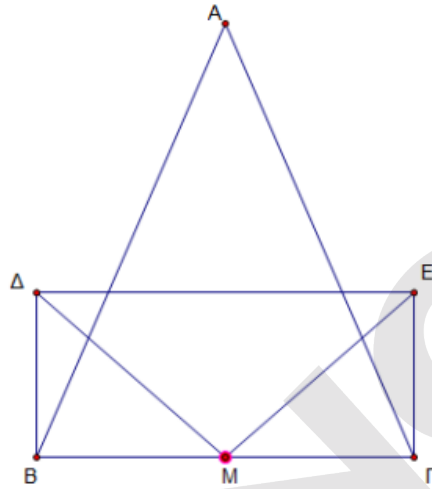
α) Τα τμήματα $B\Delta$ και $ΓE$ είναι ίσα.

(Μονάδες 13)

β) Το τετράπλευρο $BΔEΓ$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 12)

Έξυπνα & εύκολα!


4. Θέμα 1683

Σε κύκλο κέντρου O φέρουμε δυο διαμέτρους του AB και $\Gamma\Delta$.

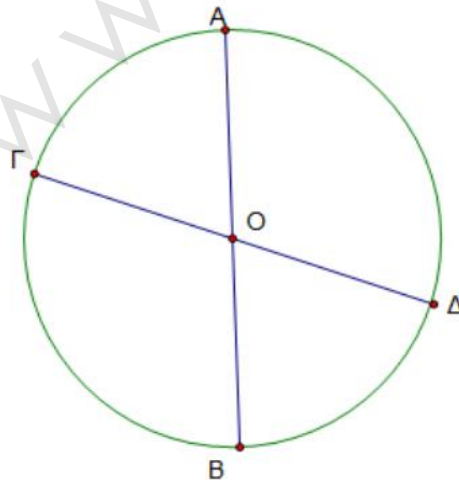
Να αποδείξετε ότι:

α) Οι χορδές $A\Gamma$ και $B\Delta$ του κύκλου είναι ίσες.

(Μονάδες 13)

β) Το τετράπλευρο $A\Gamma B\Delta$ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 12)



Έξυπνα & εύκολα!

Θέμα 4 - Κωδικοί:

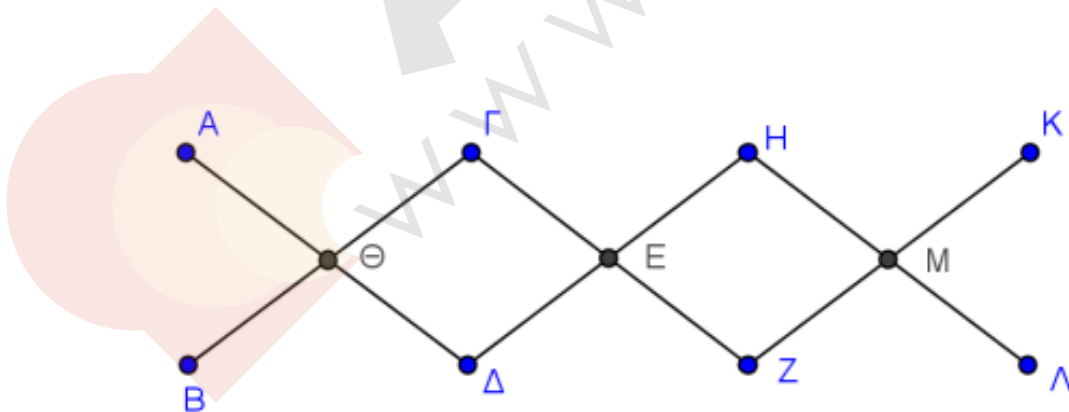
1714, 1715, 1729, 1733, 1735, 1757, 1758, 1800, 1816, 1829, 1833, 1844

1879, 13699, 13746, 14887

5. Θέμα 1714

Στην παρακάτω εικόνα φαίνεται μια κρεμάστρα τοίχου η οποία αποτελείται από έξι **ίσα** ευθύγραμμα κομμάτια ξύλου (ΑΔ, ΒΓ, ΓΖ, ΔΗ, ΖΚ, ΗΛ) που είναι στερεωμένα με έντεκα καρφιά (Α, Β, Γ, Δ, Θ, Ε, Μ, Η, Κ, Λ, Ζ). Αν το σημείο Θ, είναι **μέσο** των τμημάτων ΑΔ και ΒΓ ενώ το σημείο Ε είναι **μέσο** των τμημάτων ΓΖ και ΔΗ, να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο ΓΗΖΔ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 10)
- β) Τα σημεία Β, Δ, Ζ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 9)
- γ) Το τετράπλευρο ΑΓΖΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)



Έξυπνα & εύκολα!

6. Θέμα 1715

Δίνεται ευθεία (ϵ) και δυο σημεία A, B εκτός αυτής έτσι ώστε η ευθεία AB να μην είναι κάθετη στην (ϵ). Φέρουμε AD, BG κάθετες στην (ϵ) και M, N μέσα των AB και GD αντίστοιχα.

α) Αν τα A, B είναι στο ίδιο ημιεπίπεδο σε σχέση με την (ϵ)

i) να εξετάσετε αν το τετράπλευρο $ABGD$ είναι, παραλληλόγραμμο, τραπέζιο ή ορθογώνιο σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις, αιτιολογώντας την απάντησή σας:

1) $AD < BG$ (Μονάδες 4)

2) $AD = BG$. (Μονάδες 4)

ii) να εκφράσετε το τμήμα MN σε σχέση με τα τμήματα AD, BG στις δυο προηγούμενες περιπτώσεις. (Μονάδες 6)

β) Αν η ευθεία (ϵ) τέμνει το τμήμα AB στο μέσο του M να βρείτε το είδος του τετραπλεύρου $AGBD$ (παραλληλόγραμμο, τραπέζιο, ορθογώνιο) και να δείξετε ότι τα M, N ταυτίζονται. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9+2)

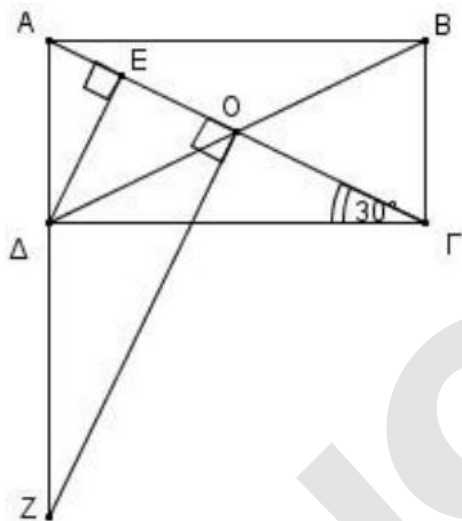
7. Θέμα 1729

Στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $ABGD$ είναι $\hat{\Delta GA} = 30^\circ$ και O το κέντρο του. Φέρουμε $DE \perp AG$.

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\hat{A\Delta G}$ χωρίζεται από τη DE και τη διαγώνιο DB σε τρεις ίσες γωνίες. (Μονάδες 13)

β) Φέρουμε κάθετη στην AG στο σημείο O η οποία τέμνει την προέκταση της AD στο Z . Να δείξετε ότι τα τρίγωνα AZO και ABG είναι ίσα. (Μονάδες 12)

Έξυπνα & εύκολα!


8. Θέμα 1733

Έστω $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ δυο κάθετες ευθείες που τέμνονται στο O και τυχαίο σημείο M του επιπέδου που δεν ανήκει στις ευθείες.

α) Αν M_1 είναι το συμμετρικό του M ως προς την ε_1 και M_2 το συμμετρικό του M_1 ως προς την ε_2 , να αποδείξετε ότι:

- I. $OM = OM_1$ (Μονάδες 6)
- II. Τα σημεία M, O και M_2 είναι συνευθειακά. (Μονάδες 8)
- III. Το τρίγωνο MM_1M_2 είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 6)

β) Αν M_3 είναι το συμμετρικό σημείο του M_2 ως προς την ε_1 , τι είδους παραλληλόγραμμο είναι το $MM_1M_2M_3$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

Έξυπνα & εύκολα!

9. Θέμα 1735

Θεωρούμε ευθεία (ϵ) και δυο σημεία A και B εκτός αυτής, τα οποία βρίσκονται στο ίδιο ημιπέδο σε σχέση με την (ϵ) έτσι ώστε, η ευθεία AB να μην είναι κάθετη στην (ϵ) . Έστω A' και B' τα συμμετρικά σημεία των A και B αντίστοιχα ως προς την ευθεία (ϵ) .

- α) Να αποδείξετε ότι $AA' \parallel BB'$. (Μονάδες 6)
- β) Αν η μεσοκάθετος του AB τέμνει την ευθεία (ϵ) στο σημείο K , να αποδείξετε ότι το K ανήκει και στη μεσοκάθετο του $A'B'$. (Μονάδες 10)
- γ) Να βρείτε τη σχέση της ευθείας AB με την ευθεία (ϵ) ώστε το τετράπλευρο $ABB'A'$ να είναι ορθογώνιο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

10. Θέμα 1757

Θεωρούμε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$, τέτοιο ώστε $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $AB = \frac{1}{4} \Delta\Gamma$ και $AB = \frac{1}{3} A\Delta$. Επιπλέον, φέρουμε $BE \perp \Delta\Gamma$.

- α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ABE\Delta$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 6)
- β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $BE\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. (Μονάδες 10)
- γ) Αν K , Λ είναι τα μέσα των BE και $A\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι η $A\Gamma$ διέρχεται από το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος BK . (Μονάδες 9)

Έξυπνα & εύκολα!

11. Θέμα 1758

Δίνεται κύκλος (O, R) με διάμετρο AB και ευθείες ϵ_1, ϵ_2 εφαπτόμενες του κύκλου στα άκρα της διαμέτρου AB . Θεωρούμε ευθεία ϵ εφαπτομένη του κύκλου σε σημείο του E , η οποία τέμνει τις ϵ_1 και ϵ_2 στα Δ και Γ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $\Gamma\Delta = A\Delta + B\Gamma$

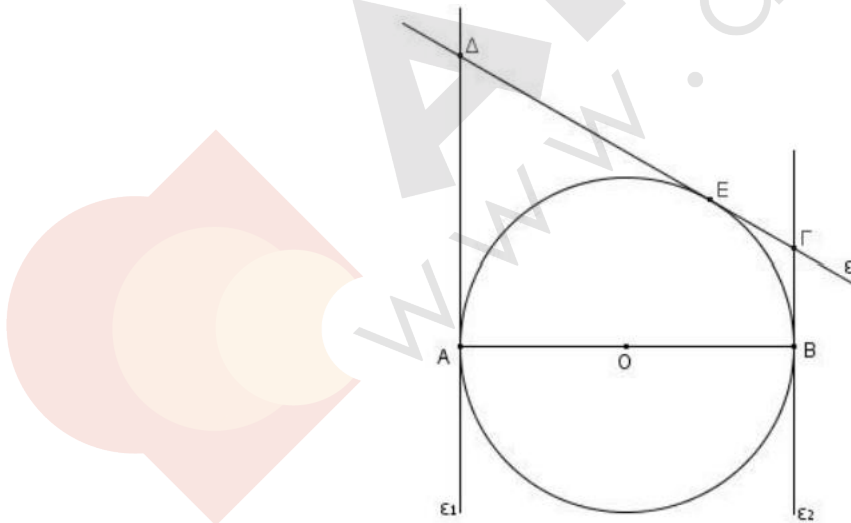
(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\Gamma O \Delta$ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 9)

γ) Να διερευνήσετε το είδος του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ ανάλογα με τη θέση του σημείου E στο ημικύκλιο AB .

(Μονάδες 7)



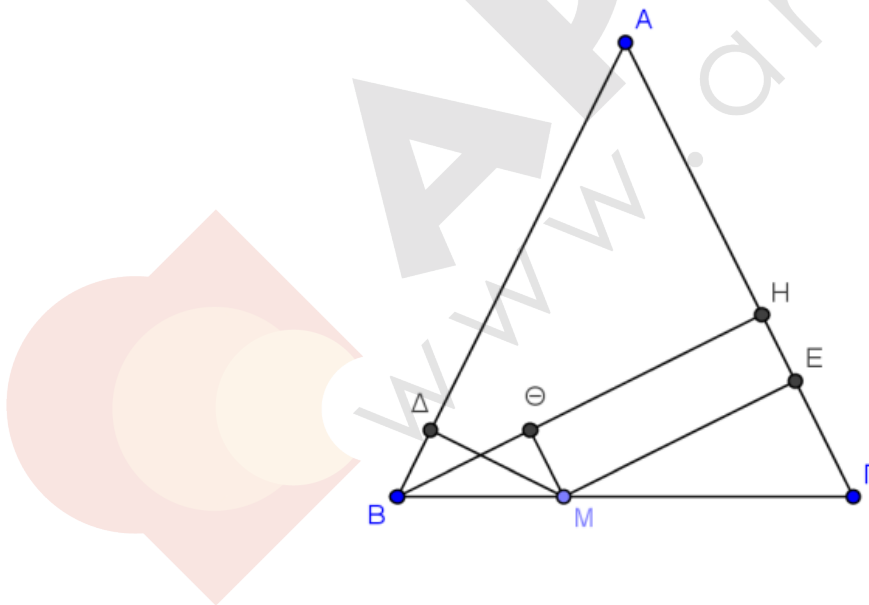
Έξυπνα & εύκολα!

12. Θέμα 1800

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$, τυχαίο σημείο M της βάσης του $B\Gamma$ και το ύψος του BH . Από το M φέρουμε κάθετες $M\Delta$, ME και $M\Theta$ στις AB , $A\Gamma$ και BH αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο $MEH\Theta$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 9)
- β) $B\Theta = \Delta M$ (Μονάδες 9)
- γ) Το άθροισμα $M\Delta + ME = BH$. (Μονάδες 7)



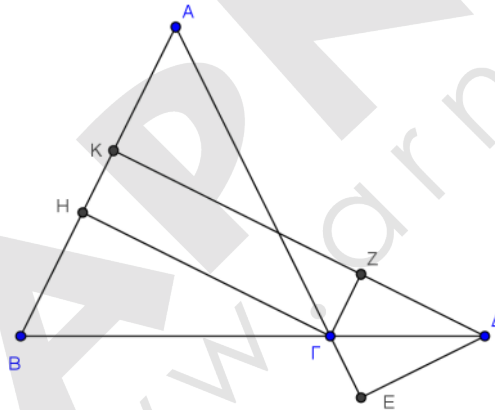
Έξυπνα & εύκολα!

13. Θέμα 1816

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και σημείο Δ στην προέκταση της $B\Gamma$. Από το Δ φέρουμε ΔK κάθετη στην AB και ΔE κάθετη στην προέκταση της $A\Gamma$. Από το σημείο Γ φέρουμε ΓH κάθετη στην AB και ΓZ κάθετη στην $K\Delta$.

Να αποδείξετε ότι:

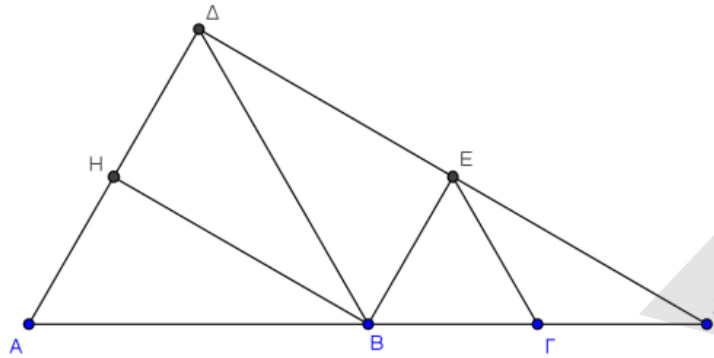
- α) Η γωνία $Z\Gamma\Delta$ είναι ίση με τη γωνία B . (Μονάδες 4)
 β) Η $\Gamma\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $Z\Gamma E$. (Μονάδες 4)
 γ) Το τρίγωνο ΔZE είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)
 δ) $\Delta K - \Delta E = H\Gamma$ (Μονάδες 8)


14. Θέμα 1829

Σε μια ευθεία (ϵ) θεωρούμε διαδοχικά τα σημεία A, B, Γ έτσι ώστε $AB = 2 B\Gamma$ και στο ίδιο ημιεπίπεδο θεωρούμε ισόπλευρα τρίγωνα $AB\Delta$ και $B\Gamma E$. Αν H είναι το μέσο του $A\Delta$ και η ευθεία ΔE τέμνει την ευθεία (ϵ) στο σημείο Z να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο $BH\Delta E$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 8)
 β) Το τρίγωνο ΓZE είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)
 γ) Το τετράπλευρο $HE\Gamma A$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)

Έξυπνα & εύκολα!


15. Θέμα 1833

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A=90^\circ$). Φέρουμε τη διάμεσο του AM την οποία προεκτείνουμε (προς το μέρος του M) κατά τμήμα $M\Delta = AM$. Θεωρούμε ευθεία ΔK κάθετη στη $B\Gamma$, η οποία τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας B στο E .

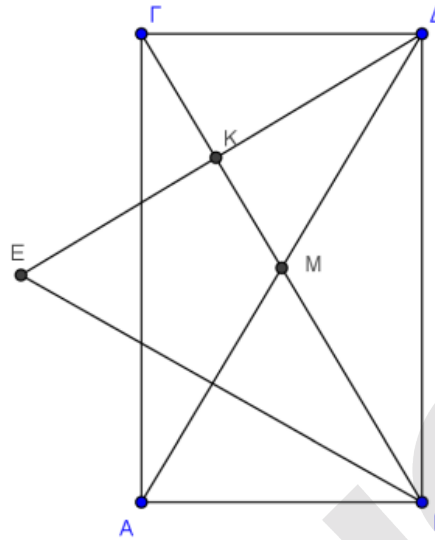
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $AB\Delta\Gamma$ είναι ορθογώνιο (Μονάδες 8)

α) $\widehat{KEB} = 90^\circ - \frac{\widehat{B}}{2}$ (Μονάδες 8)

β) $\Delta E = B\Delta$ (Μονάδες 9)

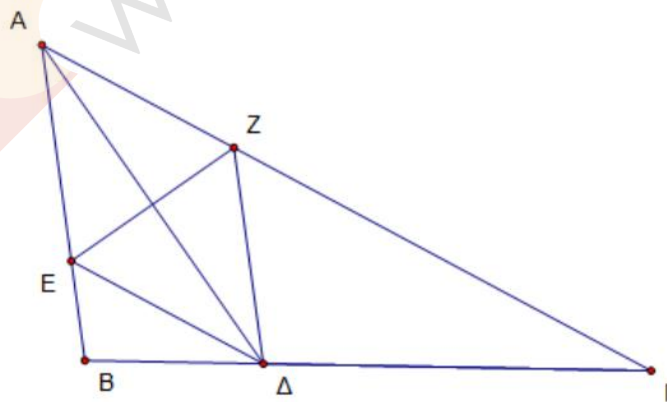
Έξυπνα & εύκολα!


16. Θέμα 1844

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και AD η διχοτόμος της γωνίας A , για την οποία ισχύει $AD = \Delta\Gamma$.
 Η DE είναι διχοτόμος της γωνίας $A\Delta B$ και η DZ παράλληλη στην AB .

Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τμήματα $E\Delta$ και $A\Gamma$ είναι παράλληλα. (Μονάδες 9)
- β) Το τρίγωνο EAD είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)
- γ) Τα τμήματα $A\Delta$ και EZ διχοτομούνται. (Μονάδες 8)



Έξυπνα & εύκολα!

17. Θέμα 1879

Έστω κύκλος με κέντρο O και διάμετρο AB . Φέρνουμε χορδή $\Gamma\Delta \parallel AB$ με K το μέσο της. Από το Δ φέρνουμε το τμήμα DE κάθετο στη $\Delta\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $KGOE$ είναι παραλληλόγραμμο.

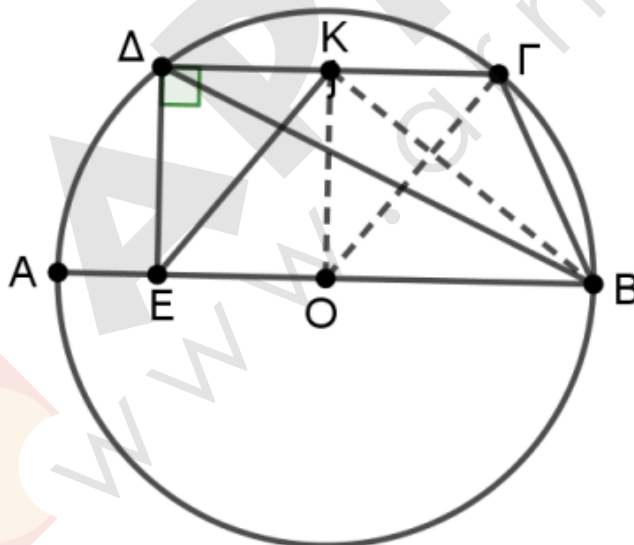
(Μονάδες 8)

β) $\hat{\Delta EK} = \frac{\hat{\Delta O\Gamma}}{2}$.

(Μονάδες 12)

γ) $KE < KB$.

(Μονάδες 5)



Έξυπνα & εύκολα!

18. Θέμα 13699

Δίνονται δυο κύκλοι (K, ρ_1) και (L, ρ_2) που εφάπτονται εξωτερικά σε σημείο A . Έστω ότι μια ευθεία (ϵ) εφάπτεται εξωτερικά στους δυο κύκλους σε σημεία τους B και Γ αντίστοιχα και ότι η εσωτερική εφαπτομένη (ζ) των κύκλων στο σημείο επαφής τους A τέμνει την ευθεία (ϵ) σε σημείο M .

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. οι ευθείες KB και LM τέμνονται σε σημείο, έστω Δ . (Μονάδες 10)
- ii. το τρίγωνο $\Delta K L$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

γ) Με ποια σχέση πρέπει να συνδέονται οι ακτίνες ρ_1 και ρ_2 των δύο κύκλων ώστε το ισοσκελές τρίγωνο $\Delta K L$ να είναι ορθογώνιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

19. Θέμα 13746

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διάμεσός του AD . Στην προέκταση της διαμέσου AD προς το Δ παίρνουμε σημείο E , έτσι ώστε $AD = DE$.

α) Να αποδείξετε ότι :

- i. Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $E\Gamma\Delta$ είναι ίσα. (Μονάδες 07)
- ii. Η διάμεσος AD είναι μικρότερη από το ημίθροισμα των πλευρών AB και $A\Gamma$ που την περιέχουν. (Μονάδες 08)

β) Αν στο τρίγωνο $AB\Gamma$ το διπλάσιο της διαμέσου AD ισούται με την πλευρά $B\Gamma$, να χαρακτηρίσετε το είδος του τετράπλευρου $ABE\Gamma$ και το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$ και να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

(Μονάδες 10)

Έξυπνα & εύκολα!

20. Θέμα 14887

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ABΓ$ ($AB = AΓ$), και τυχαίο σημείο M της πλευράς $BΓ$. Από το σημείο M φέρουμε ευθεία κάθετη στην πλευρά $BΓ$ που τέμνει τις ευθείες AB και $AΓ$ στα σημεία E και $Θ$ αντίστοιχα. Αν $AΔ$ και $AΗ$ τα ύψη των τριγώνων $ABΓ$ και $AΘE$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- α) $\widehat{ΔAΗ} = 90^\circ$. (Μονάδες 8)
- β) Το τρίγωνο $AΘE$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)
- γ) $MΘ + ME = 2AΔ$. (Μονάδες 9)

Έξυπνα & εύκολα!