Κεφ. 5.2. - Τράπεζα Θεμάτων 2022 - Γεωμετρία Α' Λυκείου

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ & ΛΥΣΕΙΣ

Η Τράπεζα Θεμάτων για τη Γεωμετρία Α' Λυκείου είναι μία μεγάλη «θάλασσα». Εμείς όμως έχουμε φροντίσει για εσένα, συγκεντρώνοντας εκείνα τα θέματα που αποτελούν τη «βάση» της γνώσης και για τα υπόλοιπα. Μελετώντας και κατανοώντας το μοτίβο σκέψης για τα συγκεκριμένα, μπορείς να λύσεις με επιτυχία και τα υπόλοιπα θέματα. Στην ιστοσελίδα μας www.arnos.gr για το Course της Γεωμετρίας, μελετάς και προετοιμάζεσαι με την αναλυτική διδασκαλία σε ασκήσεις και θέματα, στο ύφος της Τράπεζας.

Θέμα 2 - Κωδικοί:

1531, 1533, 1534, 1535, 1538, 1539, 1557, 1559, 1600, 1609, 1610, 1618

1628, 1642, 1644, 1654, 1678, 1687, 1692, 1701, 13755, 13816, 13824

13825, 13829, 13833, 13834

1. Θέμα 1531

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ=2ΒΓ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΔ (προς το μέρος του Δ) κατά τμήμα ΔΕ=ΑΔ και φέρουμε την ΒΕ που τέμνει τη ΔΓ στο σημείο Η.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΒΑΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

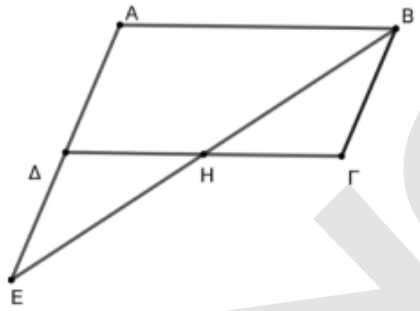
β) το ΔΕΓΒ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)

γ) η ΑΗ είναι διάμεσος του ΒΑΕ τριγώνου. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

Έστω ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο με ΑΒ=2ΒΓ, τμήμα ΔΕ στην προέκταση της ΑΔ τέτοιο ώστε ΔΕ=ΑΔ και Η το σημείο τομής της ΒΕ με την ΔΓ.

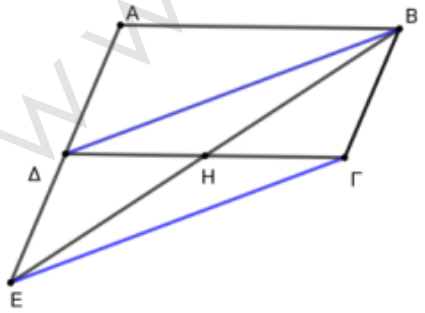
α)



Επειδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες, άρα ΑΔ = ΒΓ.

Έχουμε ότι ΑΕ = ΑΔ + ΔΕ και αφού ΑΔ=ΔΕ τότε ΑΕ=2ΑΔ και επειδή ΑΔ=ΒΓ τότε ΑΕ = 2ΒΓ. Από την υπόθεση είναι ΑΒ =2ΒΓ, επομένως ΑΕ=ΑΒ και το τρίγωνο ΒΑΕ είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές τις ΑΒ και ΑΕ.

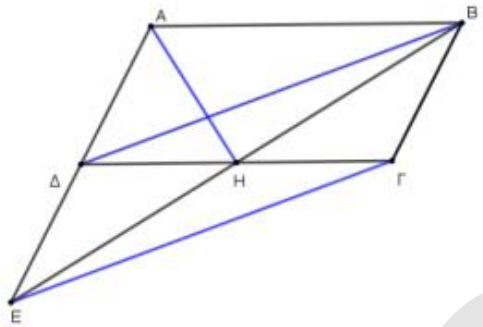
β)



Από το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ΒΓ= // ΑΔ, και στην προέκταση της ΑΔ το τμήμα ΔΕ ισούται με το ΑΔ οπότε και ΔΕ =// ΒΓ. Άρα το τετράπλευρο ΔΕΓΒ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες.

Έξυπνα & εύκολα!

γ)



Επειδή το ΔΕΓΒ είναι παραλληλόγραμμο, οι διαγώνιές του ΓΔ, ΒΕ διχοτομούνται στο Η. Δηλαδή το Η είναι μέσο του ΒΕ, άρα η ΑΗ είναι διάμεσος του τριγώνου ΒΑΕ.

2. Θέμα 1533

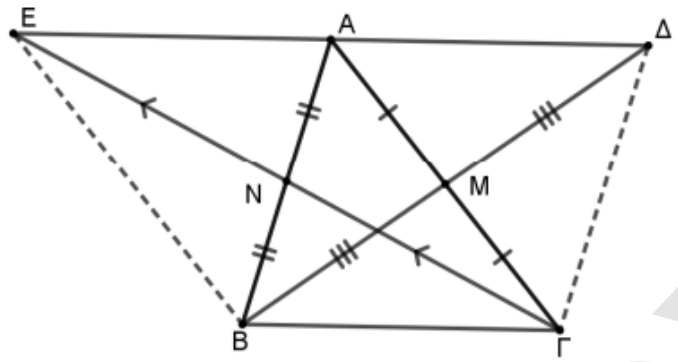
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, στο οποίο φέρουμε τις διαμέσους του ΒΜ και ΓΝ. Προεκτείνουμε την ΒΜ (προς το Μ) κατά τμήμα ΜΔ=ΒΜ και την ΓΝ (προς το Ν) κατά τμήμα ΝΕ=ΓΝ.

α) Να αποδείξετε ότι ΑΔ//ΒΓ και ΑΕ//ΒΓ. (Μονάδες 13)

β) Είναι τα σημεία Ε, Α και Δ συνευθειακά; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο φέρουμε τις διαμέσους ΒΜ και ΓΝ και τις προεκτείνουμε κατά τμήματα ΜΔ=ΒΜ και ΝΕ=ΓΝ αντίστοιχα.



α) Επειδή ΜΔ = ΒΜ από κατασκευή και ΑΜ = ΜΓ αφού ΒΜ διάμεσος, οι διαγώνιοι του τετράπλευρου ΑΒΓΔ διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Άρα ΑΔ//ΒΓ.

Επειδή ΓΝ = ΝΕ από κατασκευή και ΑΝ = ΝΒ αφού ΓΝ διάμεσος, οι διαγώνιοι του τετράπλευρου ΑΓΒΕ διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Άρα ΑΕ//ΒΓ.

β) Από το α) ερώτημα αποδείχθηκε ότι από το σημείο Α διέρχονται τα τμήματα ΑΕ και ΑΔ που είναι παράλληλα στη ΒΓ. Όμως επειδή από ένα σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μοναδική παράλληλη σ' αυτήν, συμπεραίνουμε ότι τα τμήματα ΑΔ και ΑΕ έχουν τον ίδιο φορέα, δηλαδή τα σημεία Ε, Α και Δ είναι συνευθειακά.

3. Θέμα 1534

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και η διαγώνιός του ΒΔ. Από τις κορυφές Α και Γ φέρουμε τις κάθετες ΑΕ και ΓΖ στη ΒΔ, που την τέμνουν στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα.

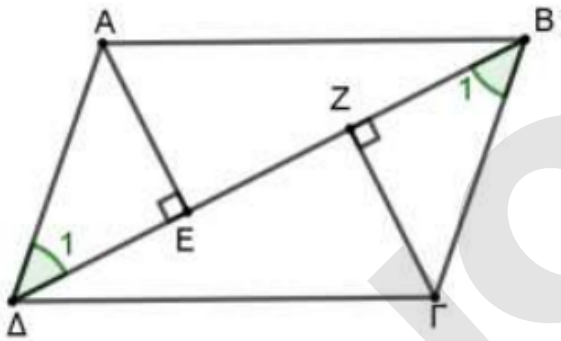
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΓΒΖ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, ΔΒ διαγώνιος και ΑΕ, ΓΖ οι κάθετες στη ΒΔ.

α)

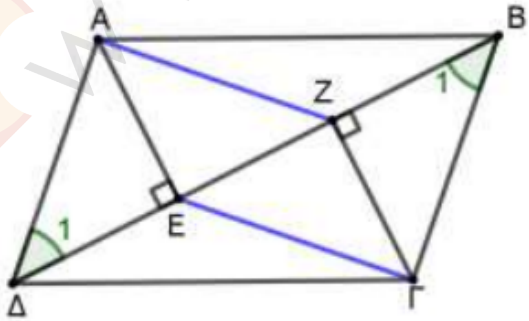


Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΓΒΖ έχουν:

- $\hat{E} = \hat{Z} = 90°$ (ΑΕ⊥ΒΔ και ΓΖ⊥ΒΔ)
- ΑΔ = ΒΓ, ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου και
- $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}_1$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΔ, ΒΓ που τέμνονται από την ΒΔ.

Άρα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια και έχουν ίσες υποτείνουσες και μία οξεία γωνία ίση.

β)



Επειδή ΑΕ ⊥ ΒΔ και ΓΖ ⊥ ΒΔ, προκύπτει ότι ΑΕ // ΓΖ ως κάθετες στην ίδια ευθεία ΒΔ. Επειδή τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΓΒΖ είναι ίσα από το α), προκύπτει ότι οι πλευρές ΑΕ και ΓΖ είναι ίσες αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{\Delta}_1$ και $\widehat{B}_1$ αντίστοιχα. Άρα το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες.

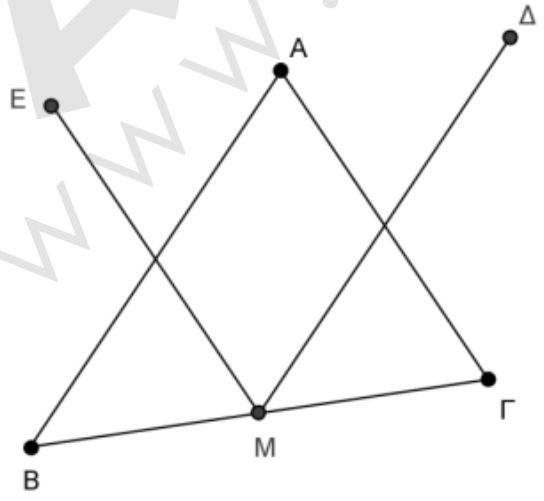
4. Θέμα 1535

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ, στο ημιεπίπεδο (ΒΓ, Α), φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα ΜΔ ίσο και παράλληλο προς την πλευρά ΒΑ και ευθύγραμμο τμήμα ΜΕ ίσο και παράλληλο προς την πλευρά ΓΑ. Να αποδείξετε ότι:

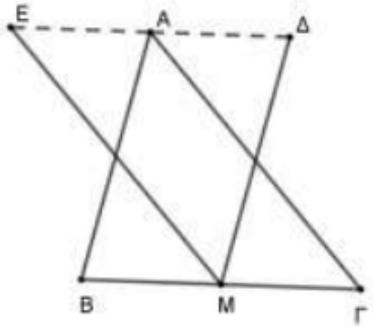
α) ΔΑ=ΑΕ (Μονάδες 8)

β) Τα σημεία Δ, Α και Ε βρίσκονται στην ίδια ευθεία. (Μονάδες 9)

γ) ΔΕ=ΒΓ (Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ



α) Επειδή είναι ΜΔ = // ΒΑ το τετράπλευρο ΑΒΜΔ είναι παραλληλόγραμμο.

Άρα ΑΔ = ΒΜ και ΑΔ // ΒΜ.

Επίσης είναι ΜΕ =// ΓΑ, οπότε και το τετράπλευρο ΑΕΜΓ είναι παραλληλόγραμμο.

Άρα ΑΕ = ΜΓ και ΑΕ // ΜΓ.

Επειδή ΑΔ = ΒΜ, ΑΕ = ΜΓ και ΒΜ = ΜΓ αφού Μ μέσο του ΒΓ, είναι και ΔΑ= ΑΕ.

β) Έχουμε ΑΔ//ΒΜ άρα ΑΔ//ΒΓ και επίσης ΑΕ//ΜΓ άρα ΑΕ//ΒΓ. Επειδή από το σημείο Α διέρχεται μοναδική παράλληλη της ΒΓ, τα τμήματα ΑΔ και ΑΕ βρίσκονται στον ίδιο φορέα. Επομένως τα σημεία Δ, Α και Ε είναι συνευθειακά.

γ) Είναι ΔΕ = ΔΑ + ΑΕ = ΒΜ + ΜΓ = ΒΓ.

5. Θέμα 1538

Δίνεται ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο με ΑΒ=2ΑΔ. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{\Delta}$ του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την ΑΒ στο Ε.

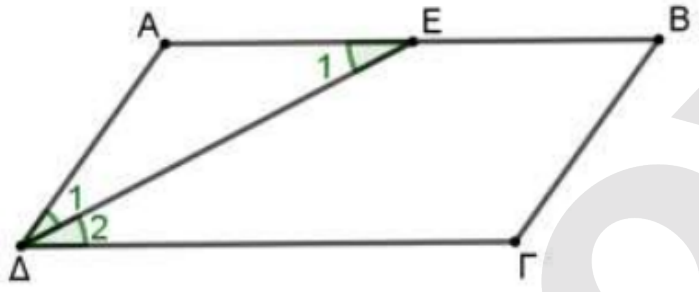
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)

β) Είναι το σημείο Ε μέσο της πλευράς ΑΒ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

Έστω ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο με ΑΒ = 2ΑΔ και ΔΕ η διχοτόμος της $\hat{\Delta}$.



α) Είναι $\hat{\Delta}_2 = \hat{E}_1$ (1) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΔΕ. $\hat{\Delta}_2 = \hat{\Delta}_1$ (2), επειδή ΔΕ διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta}$. Από (1), (2) έχουμε $\hat{\Delta}_1 = \hat{E}_1$. Άρα, το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές τις ΑΔ, ΑΕ.

β) Επειδή ΑΕ = ΑΔ και από την υπόθεση ισχύει ότι ΑΔ= $\frac{AB}{2}$, άρα ΑΕ= $\frac{AB}{2}$. Επομένως το Ε είναι μέσο της ΑΒ.

6. Θέμα 1539

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Θεωρούμε σημείο Ε του τμήματος ΑΟ και σημείο Ζ του τμήματος ΟΓ, ώστε ΟΕ=ΟΖ.

Να αποδείξετε ότι:

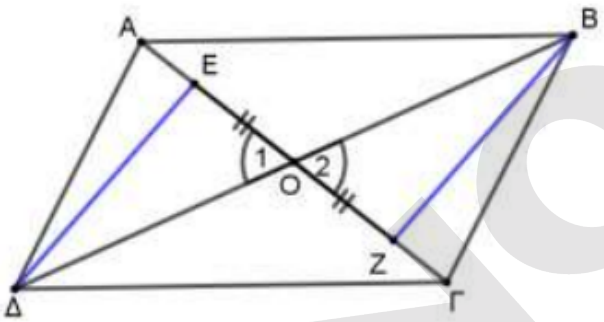
α) ΔΕ=ΒΖ (Μονάδες 12)

β) το ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

Έστω ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο, ΑΓ και ΒΔ οι διαγώνιοί του που τέμνονται στο Ο και Ε, Ζ σημεία στις ΑΟ, ΟΓ αντίστοιχα τέτοια ώστε ΟΕ = ΟΖ.

α)

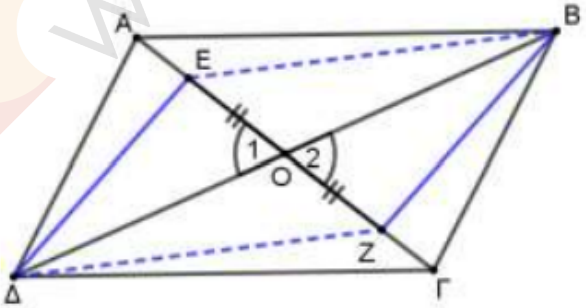


Τα τρίγωνα ΟΔΕ και ΟΒΖ έχουν:

- ΟΔ = ΟΒ (Ο κέντρο του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ)
- ΟΕ=ΟΖ (υπόθεση)
- $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ (κατακορυφήν γωνίες)

Σύμφωνα με το κριτήριο Π – Γ – Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και ΔΕ = ΒΖ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{O}_1$ και $\hat{O}_2$ αντίστοιχα.

β)



Επειδή ΟΒ = ΟΔ και ΟΕ = ΟΖ οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου ΔΕΒΖ διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

7. Θέμα 1557

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ=2ΒΓ και Ε το μέσο της πλευράς του ΑΒ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΕΑΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

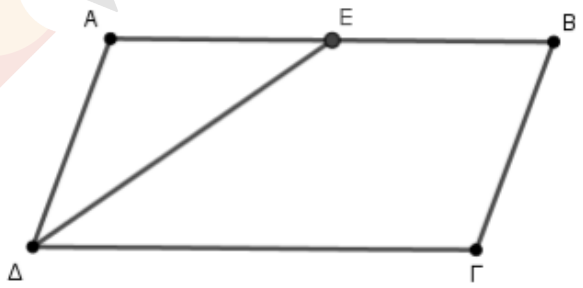
β) Η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta}$. (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ= 2 ΒΓ και Ε μέσο της πλευράς του ΑΒ.

α) Επειδή το Ε είναι μέσο της πλευράς ΑΒ, είναι ΑΕ = $\frac{\text{ΑΒ}}{2}$ και αφού ΑΒ = 2ΒΓ από υπόθεση τότε ΑΕ = $\frac{2\text{ΒΓ}}{2}$ άρα ΑΕ =ΒΓ. Οπότε θα είναι ΑΕ = ΒΓ = ΑΔ αφού ΒΓ =ΑΔ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

Οπότε, το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές τις ΑΔ και ΑΕ.

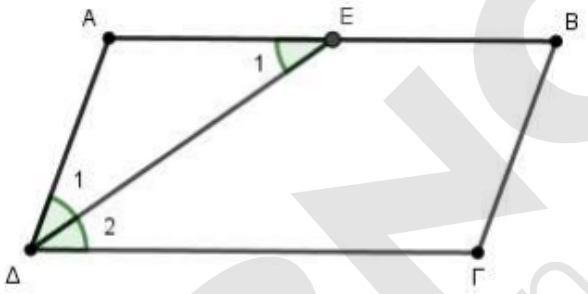


β) Αφού το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο τότε ΑΒ//ΔΓ.

Επειδή το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές με βάση την ΔΕ, θα είναι $\hat{\Delta}_1 = \hat{E}_1$ (1) ως γωνίες προσκείμενες στη βάση του ισοσκελούς.

Όμως $\hat{\Delta}_2 = \hat{E}_1$ (2) ως γωνίες εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ και ΓΔ που τέμνονται από την ΔΕ.

Από τις σχέσεις (1), (2) έχουμε $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$, άρα η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta}$.



8. Θέμα 1559

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΜ. Στην προέκταση της διαμέσου ΜΔ του τριγώνου ΑΜΓ (προς το Δ) θεωρούμε σημείο Ε ώστε ΜΔ=ΔΕ.

Να αποδείξετε ότι:

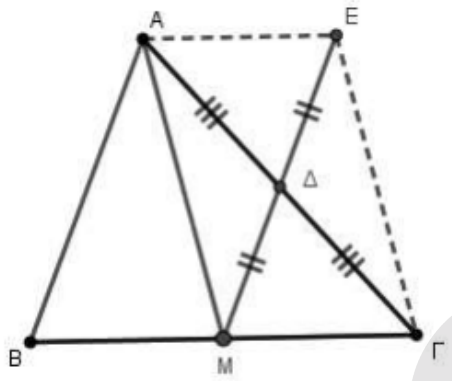
α) Το τετράπλευρο ΑΜΓΕ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 12)

β) Η ΒΕ διέρχεται από το μέσο της διαμέσου ΑΜ. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ, ΑΜ διάμεσός του στην πλευρά του ΒΓ, ΜΔ η διάμεσος στην πλευρά ΑΓ του τριγώνου ΑΜΓ και σημείο Ε στην προέκτασή της ΜΔ τέτοιο ώστε ΜΔ=ΔΕ.

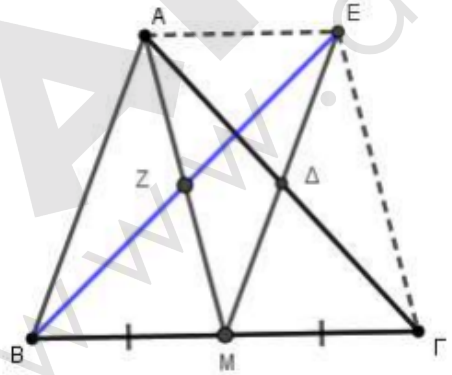
α)



Στο τετράπλευρο ΑΜΓΕ τα ΑΓ, ΜΕ είναι διαγώνιοί του.

Επειδή είναι ΜΔ = ΔΕ (υπόθεση) και ΑΔ = ΔΓ αφού η ΜΔ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΜΓ, έχουμε ότι στο τετράπλευρο ΑΜΓΕ οι διαγώνιοί του ΜΕ, ΑΓ διχοτομούνται στο Δ. Άρα, το τετράπλευρο ΑΜΓΕ είναι παραλληλόγραμμο με κέντρο το Δ.

β)



Επειδή το ΑΜΓΕ είναι παραλληλόγραμμο θα ισχύει ότι οι απέναντι πλευρές του θα είναι ίσες και παράλληλες, δηλαδή ΑΕ = ΜΓ και ΑΕ // ΜΓ.

Επειδή είναι ΑΕ // ΜΓ και τα σημεία Β, Μ, Γ είναι συνευθειακά, τότε θα είναι ΑΕ // ΒΜ.

Επειδή είναι ΑΕ = ΜΓ και ΜΓ = ΜΒ, αφού η ΑΜ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ (υπόθεση), τότε θα είναι ΑΕ = ΒΜ.

Οπότε, το τετράπλευρο ΑΕΜΒ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει δυο απέναντι πλευρές του, τις ΑΕ και ΒΜ, παράλληλες και ίσες.

Άρα, οι διαγώνιοί του ΑΜ και ΒΕ θα διχοτομούνται και έστω Ζ το κέντρο του. Επομένως, η ΒΕ διέρχεται από το μέσο Ζ της ΑΜ.

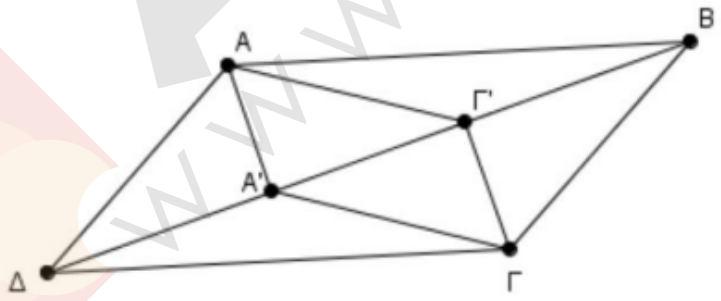
9. Θέμα 1600

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Α΄, Γ΄ οι προβολές των κορυφών Α και Γ στη διαγώνιο ΒΔ. Αν τα σημεία Α΄ και Γ΄ δεν ταυτίζονται, να αποδείξετε ότι:

α) ΑΑ΄ // ΓΓ΄ (Μονάδες 8)

β) ΑΑ΄ = ΓΓ΄ (Μονάδες 10)

γ) Το τετράπλευρο ΑΓ΄ΓΑ΄ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)



ΛΥΣΗ

α) Επειδή ΑΑ΄ ⊥ ΒΔ και ΓΓ΄ ⊥ ΒΔ, προκύπτει ότι ΑΑ΄ // ΓΓ΄

β) Τα τρίγωνα ΑΑΔ΄ και ΓΓ΄Β είναι ορθογώνια και έχουν:

- ΑΔ = ΒΓ, διότι είναι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου
- $A\hat{\Delta}A' = \Gamma\hat{B}\Gamma'$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΔ, ΒΓ που τέμνονται από την ΒΔ.

Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΑΔ΄ και ΓΓ΄Β έχουν μια κάθετη πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία ίσες μία προς μία οπότε είναι ίσα. Από την ισότητα αυτή προκύπτει ότι και οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $A\hat{\Delta}A'$ και $\Gamma\hat{B}\Gamma'$ είναι ίσες, δηλαδή ΑΑ΄ = ΓΓ΄.

γ) Επειδή ΑΑ΄ // ΓΓ΄ και ΑΑ΄= ΓΓ΄,

το τετράπλευρο ΑΓΓΑ΄ είναι παραλληλόγραμμο.

10. Θέμα 1609

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ . Αν οι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών $\hat{\Delta}$ και $\hat{B}$ τέμνουν τις πλευρές ΑΒ και ΓΔ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΓΖ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) Το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

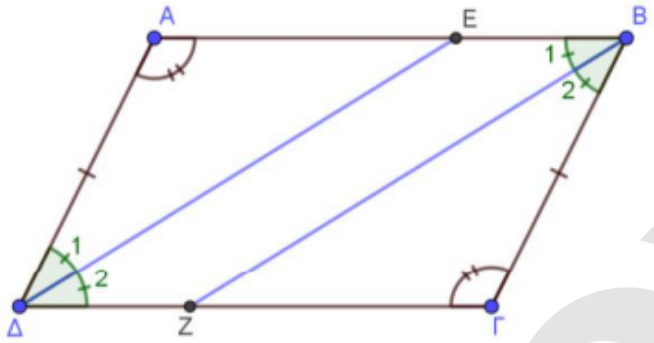
ΛΥΣΗ

α) Οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Delta}$ είναι ίσες ως απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου.

Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΓΖ έχουν:

- ΑΔ = ΒΓ, ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου
- $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}_2$, ως μισά των ίσων γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Delta}$.
- $\hat{A} = \hat{\Gamma}$, ως απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου.

Σύμφωνα με το κριτήριο Γ – Π – Γ τα τρίγωνα είναι ίσα.



β) Από την προηγούμενη ισότητα των τριγώνων ΑΕΔ και ΒΓΖ προκύπτει ότι:

- οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Gamma}$ είναι ίσες, δηλαδή ΔΕ = ΒΖ (1) καθώς και
- οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{\Delta}_1$ και $\hat{B}_2$ είναι ίσες, δηλαδή ΑΕ = ΓΖ.

Επειδή ΑΒ = ΓΔ και ΑΕ = ΓΖ, βρίσκουμε

ΑΒ – ΑΕ = ΓΔ – ΓΖ $\Leftrightarrow$ ΒΕ = ΔΖ (2)

Αφού (σύμφωνα με τις 1 και 2) το τετράπλευρο ΔΕΒΖ έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες, είναι παραλληλόγραμμο.

11. Θέμα 1610

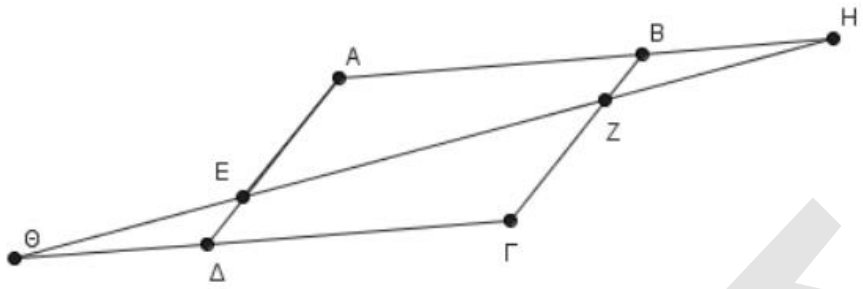
Στις πλευρές ΑΔ και ΒΓ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ θεωρούμε σημεία Ε και Ζ, τέτοια ώστε ΑΕ=ΓΖ . Αν η ευθεία ΖΕ τέμνει τις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΓΔ στα σημεία Η και Θ, να αποδείξετε ότι:

α) $H\hat{B}Z = E\hat{\Delta}\Theta$ (Μονάδες 8)

β) $B\hat{Z}H = \Delta\hat{E}\Theta$ (Μονάδες 8)

γ) ΒΗ=ΘΔ (Μονάδες 9)

Έξυπνα & εύκολα!



ΛΥΣΗ

α) Είναι $A\hat{B}Γ = A\hat{Δ}Γ$ διότι είναι απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Τότε $H\hat{B}Z = 180^o - A\hat{B}Γ = 180^o - A\hat{Δ}Γ = E\hat{Δ}Θ$.

β) Είναι $Γ\hat{Z}E = A\hat{E}Z$ (1) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΔ, ΒΓ που τέμνονται από την ΕΖ. Επίσης $B\hat{Z}H = Γ\hat{Z}E$ (2) ως κατακορυφήν και $Δ\hat{E}Θ = A\hat{E}Z$ (3) ως κατακορυφήν. Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι $B\hat{Z}H = Δ\hat{E}Θ$.

γ) ΑΔ = ΒΓ, ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου και ΑΕ = ΓΖ από την υπόθεση. Επομένως:

ΔΕ = ΑΔ – ΑΕ = ΒΓ – ΓΖ = ΒΖ.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΔΕΘ και ΒΖΗ:

ΔΕ = ΒΖ (αποδείχθηκε παραπάνω)

$H\hat{B}Z = E\hat{Δ}Θ$, από το (α)

$B\hat{Z}H = Δ\hat{E}Θ$, από το (β)

Σύμφωνα με το κριτήριο Γ – Π – Γ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε είναι και ΒΗ = ΘΔ (γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $B\hat{Z}H = Δ\hat{E}Θ$, των τριγώνων).

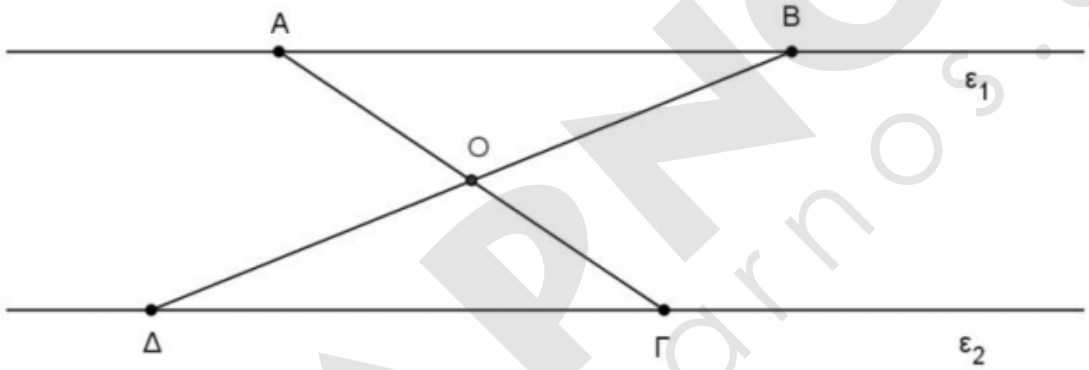
12. Θέμα 1618

Θεωρούμε δύο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 και τα σημεία Α, Β στην ε_1 και Δ και Γ στην ε_2 ώστε τα τμήματα ΑΓ και ΒΔ να τέμνονται στο μέσο Ο του ΒΔ.

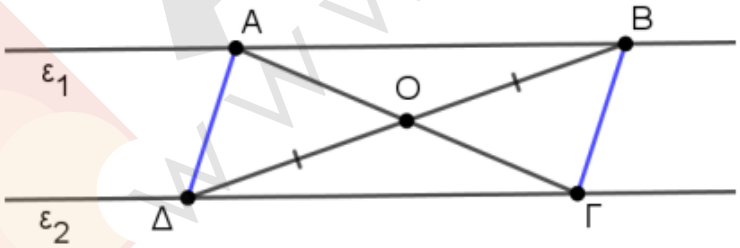
Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ είναι ίσα και να αναφέρετε τα ίσα κύρια στοιχεία τους αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

β) το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ



α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ, τα οποία έχουν:

- ΒΟ = ΟΔ, αφού Ο μέσον του ΒΔ
- $A\hat{O}B = \Gamma\hat{O}\Delta$, ως κατακορυφήν
- $A\hat{B}O = \Gamma\hat{\Delta}O$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ε_1, ε_2 που τέμνονται από την ΒΔ.

Με βάση το κριτήριο Γ – Π – Γ τα τρίγωνα είναι ίσα και έχουν:

- ΟΑ = ΟΓ, απέναντι από τις ίσες γωνίες $A\hat{B}O$ και $\Gamma\hat{\Delta}O$
- ΑΒ = ΓΔ, απέναντι από τις ίσες γωνίες $A\hat{O}B$ και $\Gamma\hat{O}\Delta$
- και $O\hat{A}B = O\hat{\Gamma}\Delta$.

β) Ισχύει ότι ΟΑ = ΟΓ και ΟΒ = ΟΔ, δηλαδή οι διαγώνιες του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ διχοτομούνται και άρα είναι παραλληλόγραμμο.

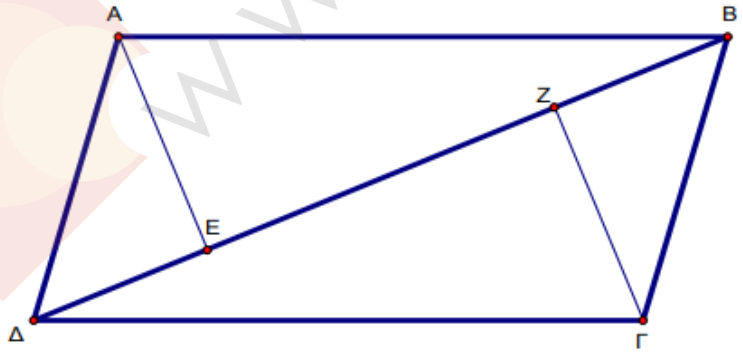
13. Θέμα 1628

Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΑΒ > ΒΓ φέρουμε από τις κορυφές Α και Γ καθέτους στη διαγώνιο ΒΔ, οι οποίες την τέμνουν σε διαφορετικά σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα.

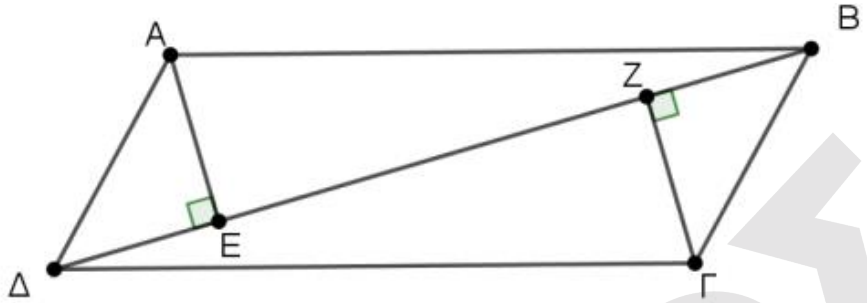
Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΕ=ΓΖ. (Μονάδες 15)

β) Το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)



ΛΥΣΗ



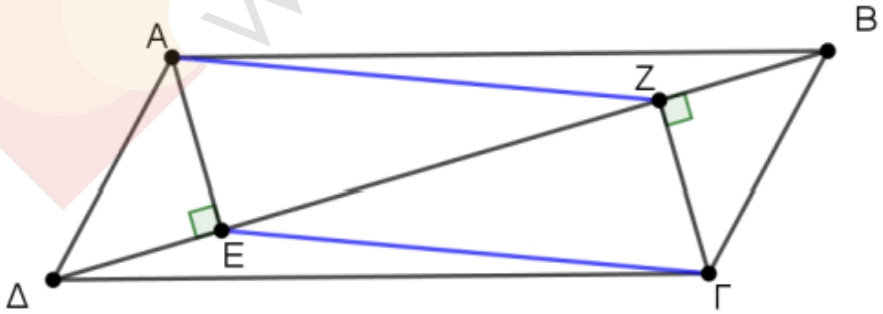
α) Συγκρίνουμε τρίγωνα ΑΔΕ και ΓΒΖ:

- Είναι ορθογώνια
- ΑΔ = ΒΓ, ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου και
- $A\hat{\Delta}E = \Gamma\hat{B}Z$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΔ, ΒΓ που τέμνονται από την ΒΔ.

Άρα πρόκειται για ορθογώνια τρίγωνα με δύο οξείες γωνίες ίσες μία προς μία και τις υποτείνουσές τους ίσες, επομένως είναι ίσα.

Από την ισότητα των τριγώνων ΑΔΕ και ΓΒΖ προκύπτει ότι ΑΕ = ΓΖ (γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $A\hat{\Delta}E$ και $\Gamma\hat{B}Z$).

β) Φέρνουμε τις ΕΓ και ΑΖ.



Οι ΑΕ και ΓΖ είναι κάθετες στην ίδια ευθεία (ΑΕ ⊥ ΒΔ και ΓΖ ⊥ ΒΔ), άρα ΑΕ // ΓΖ.

Επίσης, στο α) έχουμε βρει ότι ΑΕ = ΓΖ.

Άρα το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί έχει τις ΑΕ και ΓΖ, παράλληλες και ίσες.

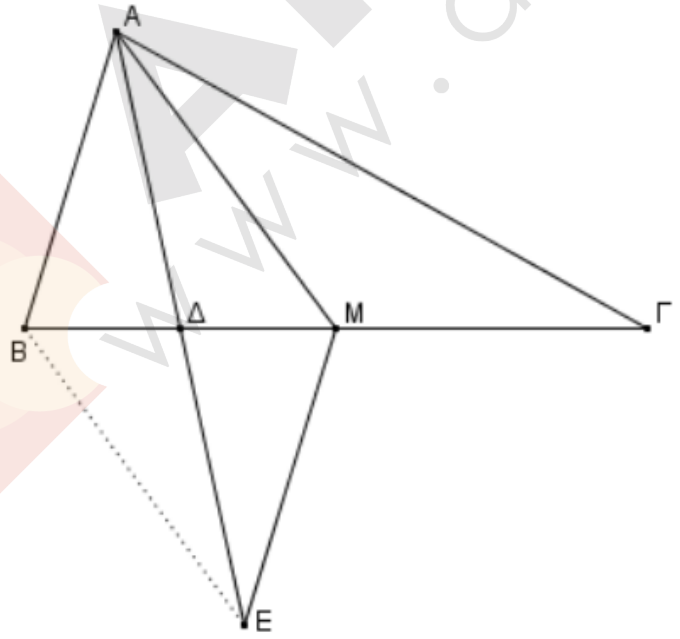
14. Θέμα 1642

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο ισχύει ΒΓ=2ΑΒ και έστω Μ το μέσο της ΒΓ. Αν η ΑΔ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΜ και Ε σημείο στην προέκτασή της ώστε ΑΔ=ΔΕ.

Να αποδείξετε ότι:

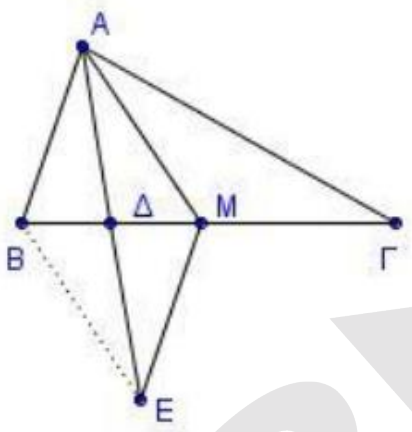
α) Το τετράπλευρο ΑΒΕΜ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 12)

β) ΜΕ=ΜΓ (Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ

α) Είναι ΑΔ = ΔΕ από υπόθεση και ΒΔ = ΔΜ (επειδή η ΑΔ είναι διάμεσος στο τρίγωνο ΑΒΜ). Άρα οι διαγώνιες του τετραπλεύρου ΑΒΕΜ διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.



β) Επειδή ΜΕ = ΑΒ ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου ισχύει ότι:

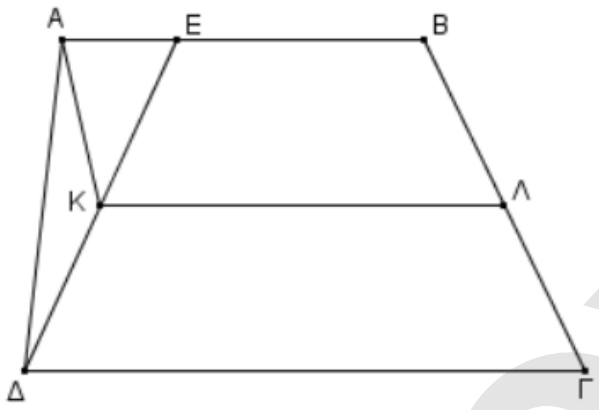
$ΒΓ = 2ΑΒ \Leftrightarrow ΑΒ = \frac{ΒΓ}{2} \Leftrightarrow ΜΕ = ΜΓ.$

15. Θέμα 1644

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΑΒ=3, ΓΔ=4. Θεωρούμε σημείο Ε στην ΑΒ ώστε ΑΕ=1. Στο τραπέζιο ΕΒΓΔ θεωρούμε τα Κ και Λ, μέσα των ΕΔ και ΒΓ αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε τη διάμεσο ΚΛ του τραπεζίου ΕΒΓΔ. (Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΛΚ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 12)



ΛΥΣΗ

α) Είναι ΕΒ = ΑΒ – ΑΕ = 3 – 1 = 2. Επειδή ΚΛ διάμεσος του τραπεζίου ΕΒΓΔ έχουμε:

$ΚΛ = \frac{ΕΒ+ΓΔ}{2} = \frac{2+4}{2} = 3.$

β) Επειδή ΚΛ διάμεσος του τραπεζίου ΕΒΓΔ ισχύει ότι:

ΚΛ // ΕΒ ή ΚΛ // ΑΒ και ΚΛ = 3 = ΑΒ.

Άρα στο τετράπλευρο ΑΒΛΚ οι απέναντι πλευρές του ΑΒ και ΚΛ είναι ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

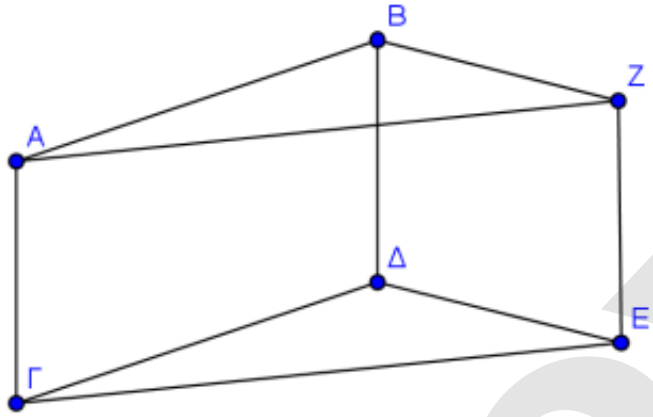
16. Θέμα 1654

Δίνονται τα παραλληλόγραμμα ΑΒΔΓ και ΒΔΕΖ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΓΕΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

β) $A\hat{B}Z = \Gamma\hat{\Delta}E$. (Μονάδες 12)



ΛΥΣΗ

α) Το ΑΒΔΓ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε οι απέναντι πλευρές του ΑΓ και ΒΔ είναι ίσες και παράλληλες. Επίσης, το ΒΔΕΖ είναι παραλληλόγραμμο, άρα οι απέναντι πλευρές του ΒΔ και ΖΕ είναι ίσες και παράλληλες. Άρα οι ΑΓ και ΖΕ είναι ίσες και παράλληλες, συνεπώς και το τετράπλευρο ΑΓΕΖ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΓΔΕ έχουν:

- ΑΒ = ΓΔ, διότι είναι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΔΓ
- ΒΖ = ΔΕ, διότι είναι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΒΖΕΔ
- ΑΖ = ΓΕ, διότι είναι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΖΕΓ

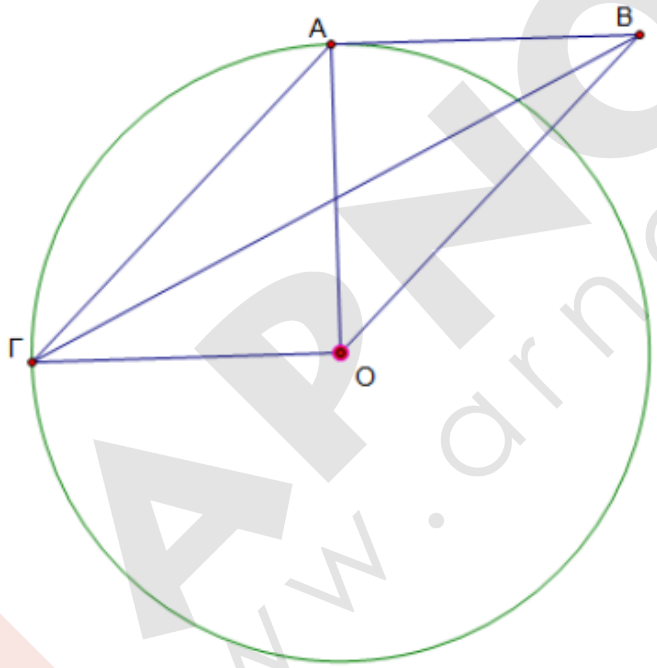
Από το κριτήριο Π-Π Π συμπεραίνουμε ότι τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΓΔΕ είναι ίσα, οπότε έχουν και $A\hat{B}Z = \Gamma\hat{\Delta}E$.

17. Θέμα 1678

Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Θεωρούμε κάθετες ακτίνες ΟΑ , ΟΓ και εφαπτόμενο στον κύκλο τμήμα ΑΒ με $AB = O\Gamma$.

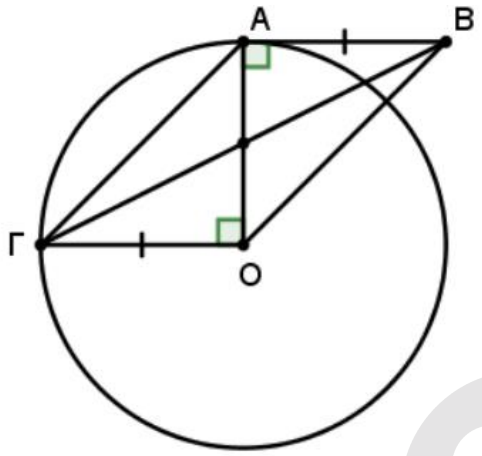
α) Να αποδείξετε ότι τα τμήματα ΑΟ και ΒΓ διχοτομούνται. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΒΟΓ. (Μονάδες 15)



ΛΥΣΗ

α) Η ΟΑ είναι ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής με την εφαπτομένη ΑΒ, οπότε ΟΑ ⊥ ΑΒ. Επίσης ΟΑ ⊥ ΟΓ από υπόθεση, άρα ΑΒ // ΟΓ. Επειδή ΑΒ // ΟΓ και ΑΒ = ΟΓ, τότε το τετράπλευρο ΑΒΟΓ είναι παραλληλόγραμμο. Οι ΑΟ και ΒΓ είναι διαγώνιες του παραλληλογράμμου, οπότε διχοτομούνται.



β) Το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές επειδή ΟΑ = ΑΒ = ρ. Τότε $\hat{B} = B\hat{O}A = 45^o$ και $\hat{B} = O\hat{\Gamma}A = 45^o$ διότι είναι απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου.

Είναι $B\hat{O}\Gamma = B\hat{O}A + A\hat{O}\Gamma = 45^o + 90^o = 135^o$ και $\Gamma\hat{A}B = B\hat{O}\Gamma = 135^o$ διότι είναι απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου.

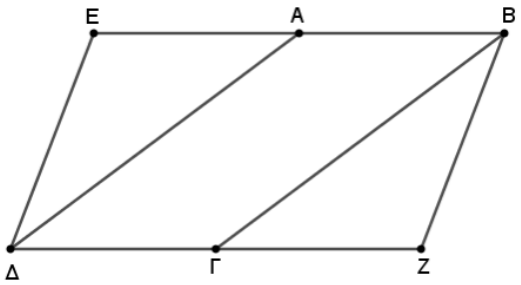
18. Θέμα 1687

Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΑ (προς το Α) και την πλευρά ΔΓ (προς το Γ) κατά τμήματα $AE = AB$ και $\Gamma Z = \Delta\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΖ είναι ίσα (Μονάδες 13)

β) Το τετράπλευρο ΕΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 12)



Έξυπνα & εύκολα!

ΛΥΣΗ

α) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΖ έχουν:

- ΑΔ = ΒΓ, διότι είναι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου
- ΑΕ = ΑΒ = ΓΔ = ΓΖ, διότι τα ΑΒ, ΓΔ είναι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου
- $B\hat{\Gamma}Z = E\hat{A}\Delta$, διότι είναι παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\hat{A}$, $\hat{\Gamma}$.

Σύμφωνα με το κριτήριο Π – Γ – Π τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΖ είναι ίσα.

β) Από την ισότητα των τριγώνων ΑΔΕ και ΒΓΖ ισχύει ότι ΒΖ = ΕΔ ως απέναντι πλευρές στις ίσες γωνίες $B\hat{\Gamma}Z$ και $E\hat{A}\Delta$.

Ισχύει ότι ΒΖ = ΕΔ και ΕΒ = 2ΑΒ = 2ΓΔ=ΔΖ. Οπότε το τετράπλευρο ΕΒΖΔ έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες, άρα είναι παραλληλόγραμμο.

19. Θέμα 1692

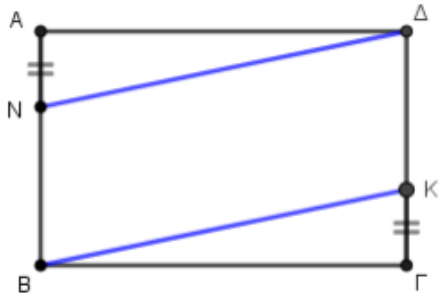
Έστω ορθογώνιο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ν και Κ των ΑΒ και ΔΓ αντίστοιχα, τέτοια ώστε ΑΝ = ΚΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΑΝΔ και ΒΓΚ είναι ίσα , (Μονάδες 12)

β) το τετράπλευρο ΝΒΚΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

Έστω ορθογώνιο ΑΒΓΔ και σημεία Ν και Κ πάνω στις ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα τέτοια ώστε ΑΝ = ΓΚ.



α) Τα τρίγωνα ΑΝΔ και ΒΓΚ έχουν:

- $\hat{A} = \hat{\Gamma} = 90^0$,αφού το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο.
- ΑΝ = ΚΓ, από υπόθεση
- ΑΔ = ΒΓ, ως απέναντι πλευρές του ορθογωνίου ΑΒΓΔ

Άρα, τα τρίγωνα ΑΝΔ και ΒΓΚ είναι ίσα ως ορθογώνια που έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία.

β) Ισχύει ΑΒ = ΔΓ (1) γιατί είναι απέναντι πλευρές του ορθογωνίου ΑΒΓΔ και επίσης ΑΝ = ΚΓ (2) από υπόθεση. Αφαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις ισότητας (1) και (2) βρίσκουμε: ΑΒ – ΑΝ = ΔΓ – ΚΓ, δηλαδή ΒΝ = ΚΔ (3).

ΔΝ=ΒΚ (4) ως υποτείνουσες των ίσων τριγώνων ΑΝΔ και ΒΓΚ (από το προηγούμενο ερώτημα). Από (3) και (4) προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΝΒΚΔ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες.

20. Θέμα 1701

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ και Μ το μέσο της ΒΓ. Προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ, προς το Μ, κατά τμήμα ΜΔ=ΜΑ. Από το Α φέρουμε παράλληλη προς τη ΒΓ η οποία τέμνει την προέκταση της ΔΓ στο σημείο Ε.

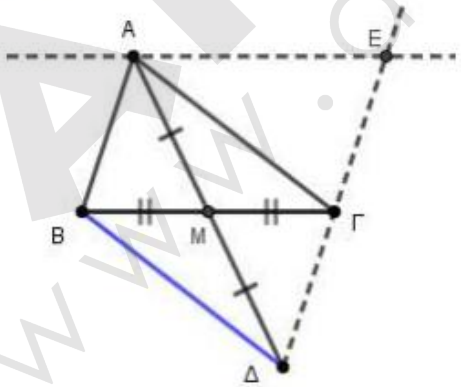
Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο ΑΒΔΓ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 12)

β) ΒΜ = $\frac{\text{ΑΕ}}{2}$. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ, Μ μέσο της ΒΓ, Δ σημείο στην προέκταση της ΑΜ προς το Μ τέτοιο ώστε ΜΔ=ΜΑ, Ε το σημείο τομής της ΔΓ με ευθεία που διέρχεται από το Α και είναι παράλληλη στη ΒΓ.



α) Φέρνουμε το τμήμα ΒΔ. Επειδή έχουμε ΜΓ = ΒΜ αφού το Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ και ΜΑ = ΜΔ από την υπόθεση, τότε το τετράπλευρο ΑΒΔΓ είναι παραλληλόγραμμο γιατί οι διαγώνιοί του ΑΔ και ΒΓ διχοτομούνται.

β) Έχουμε ότι η ευθεία ΑΕ είναι παράλληλη στην ΒΓ, οπότε και τα τμήματα ΑΕ και ΒΓ είναι παράλληλα.

Από το α) ερώτημα έχουμε ότι το ΑΒΔΓ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε οι απέναντι πλευρές του ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλες. Άρα και τα τμήματα ΑΒ και ΓΕ είναι παράλληλα.

Συνεπώς, το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει τις απέναντι πλευρές τους παράλληλες.

Επειδή ΑΕ = ΒΓ, ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΕ, ισχύει ότι

ΒΜ = $\frac{\text{ΒΓ}}{2} = \frac{\text{ΑΕ}}{2}$.

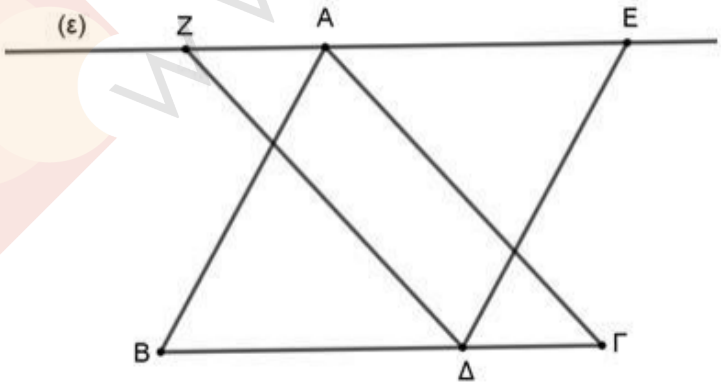
21. Θέμα 13755

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από την κορυφή Α φέρουμε ευθεία (ε) παράλληλη προς τη ΒΓ. Από το τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΒΓ φέρουμε τις παράλληλες προς την ΑΒ και ΑΓ, οι οποίες τέμνουν την ευθεία (ε) στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι :

α) τα τετράπλευρα ΖΑΓΔ και ΑΒΔΕ είναι παραλληλόγραμμα. (Μονάδες 10)

β) τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα. (Μονάδες 15)



ΛΥΣΗ

α) Επειδή η ευθεία (ε) είναι παράλληλη στη ΒΓ, προκύπτει ΖΑ // ΔΓ.

Από την υπόθεση έχουμε ΖΔ // ΑΓ.

Άρα το τετράπλευρο ΖΑΓΔ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

Επειδή η ευθεία (ε) είναι παράλληλη στη ΒΓ, προκύπτει ΑΕ // ΒΔ.

Από την υπόθεση έχουμε ΔΕ // ΒΑ.

Άρα το τετράπλευρο ΑΒΔΕ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν:

- ΑΒ = ΔΕ, ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΔΕ
- ΑΓ = ΔΖ, ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΖΑΓΔ
- ΒΓ = ΖΕ, διότι ΒΓ = ΒΔ + ΔΓ και ΖΕ = ΖΑ + ΑΕ και ΒΔ = ΑΕ, ΔΓ =ΖΑ ως απέναντι πλευρές των παραλληλογράμμων ΖΑΓΔ, ΑΒΔΕ αντίστοιχα.

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΠΠΠ τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα.

22. Θέμα 13816

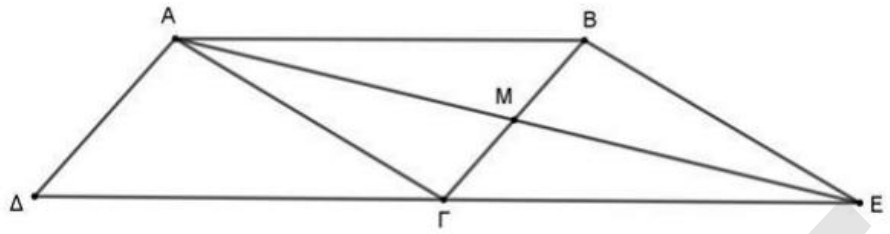
Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ τέτοιο, ώστε ΑΔ < ΑΒ και Μ το μέσο της ΒΓ.

Προεκτείνουμε την ΑΜ προς το Μ κατά τμήμα ΜΕ = ΑΜ.

Να αποδείξετε ότι :

α) το τετράπλευρο ΑΒΕΓ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)

β) τα σημεία Δ, Γ και Ε είναι συνευθειακά. (Μονάδες 15)



ΛΥΣΗ

α) Από τα δεδομένα έχουμε ότι το σημείο Μ είναι το μέσο του ΒΓ και του ΑΕ, οπότε στο τετράπλευρο ΑΒΕΓ οι διαγώνιοι του διχοτομούνται. Άρα είναι παραλληλόγραμμο.

β) Από το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ έχουμε ΔΓ // ΑΒ ως απέναντι πλευρές του. Όμοια από το παραλληλόγραμμο ΑΒΕΓ έχουμε ΑΒ // ΓΕ ως απέναντι πλευρές του. Άρα τα ευθύγραμμα τμήματα ΔΓ και ΓΕ είναι παράλληλα στην ΑΒ και επειδή έχουν κοινό σημείο το Γ, τα σημεία Δ, Γ και Ε είναι συνευθειακά.

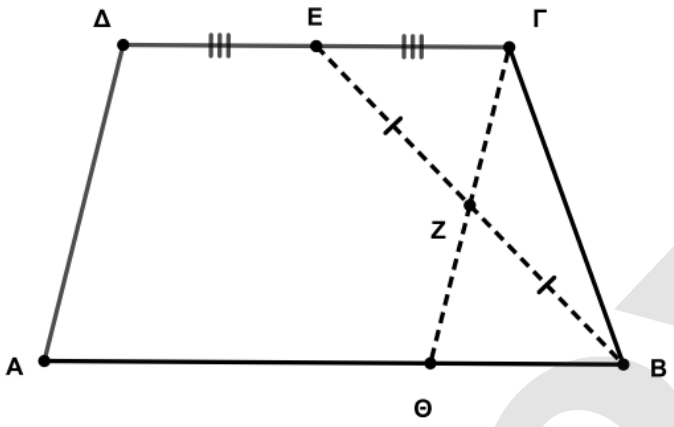
23. Θέμα 13824

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ και ΓΔ. Αν Ε και Ζ τα μέσα των ΓΔ και ΒΕ αντίστοιχα και Θ το σημείο τομής της ΑΒ και της προέκτασης της ΓΖ, να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΓΕΖ, ΘΒΖ είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) ΕΓ=ΘΒ. (Μονάδες 5)

γ) Το τετράπλευρο ΕΒΘΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)



ΛΥΣΗ

α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΓΕΖ και ΘΖΒ τα οποία έχουν:

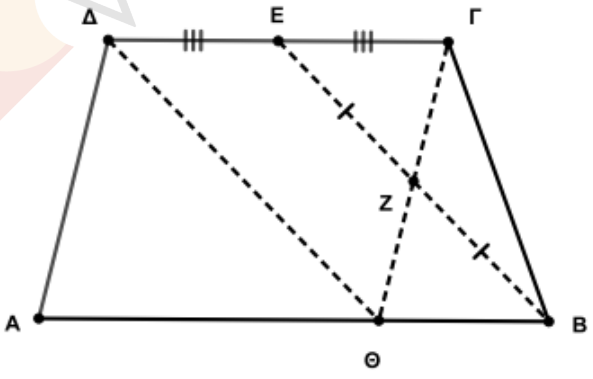
i. ΕΖ=ΖΒ (από υπόθεση)

ii. $Z\hat{E}Γ=Z\hat{B}Θ$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΓΕ και ΘΒ που τέμνονται από την ΒΕ)

iii. $E\hat{Z}Γ=Θ\hat{Z}B$ (ως κατακορυφήν)

Τα τρίγωνα είναι ίσα αφού έχουν μια πλευρά ίση και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία.

β) από την ισότητα των τριγώνων ΓΕΖ και ΘΖΒ έχουμε ότι ΕΓ=ΘΒ ως απέναντι από τις ίσες γωνίες $E\hat{Z}Γ=Θ\hat{Z}B$, πλευρές.



γ) ΔΕ//ΒΘ ως τμήματα των βάσεων ΓΔ και ΑΒ του τραπεζίου ΑΒΓΔ. Από το ερώτημα β) έχουμε ΕΓ=ΒΘ, επίσης Ε μέσο της πλευράς ΓΔ άρα ΕΓ=ΔΕ άρα ΒΘ=ΔΕ, άρα το τετράπλευρο ΕΒΘΔ είναι παραλληλόγραμμο αφού έχει δύο απέναντι πλευρές του, τις ΔΕ και ΘΒ, παράλληλες και ίσες.

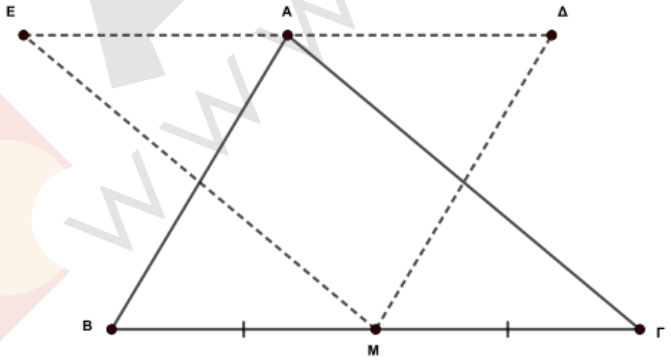
24. Θέμα 13825

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από το μέσο Μ της ΒΓ γράφουμε ευθύγραμμο τμήμα ΜΔ ίσο και παράλληλο προς την ΒΑ και ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα ΜΕ ίσο και παράλληλο προς την ΓΑ (τα σημεία Δ και Ε βρίσκονται στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από τη ΒΓ και το σημείο Α). Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τετράπλευρα ΑΔΜΒ και ΑΓΜΕ είναι παραλληλόγραμμα. (Μονάδες 12)

β) ΔΑ=ΑΕ. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ



α) Το τετράπλευρο ΑΔΜΒ έχει ΑΒ = ΔΜ (από υπόθεση) και ΑΒ // ΔΜ (από υπόθεση) άρα είναι παραλληλόγραμμο αφού έχει 2 απέναντι πλευρές του, τις ΑΒ και ΜΔ παράλληλες και ίσες.

Το τετράπλευρο ΑΓΜΕ έχει ΑΓ = ΕΜ (από υπόθεση) και ΑΓ // ΕΜ (από υπόθεση) άρα είναι παραλληλόγραμμο αφού έχει 2 απέναντι πλευρές του, τις ΑΓ και ΕΔ παράλληλες και ίσες.

β) ΔΑ=ΒΜ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΔΜΒ (που δείξαμε στο ερώτημα α)), επίσης ΑΕ=ΓΜ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΓΜΕ (που δείξαμε στο ερώτημα α)). Το σημείο Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ επομένως ΒΜ=ΓΜ. Τελικά έχουμε ΔΑ=ΑΕ.

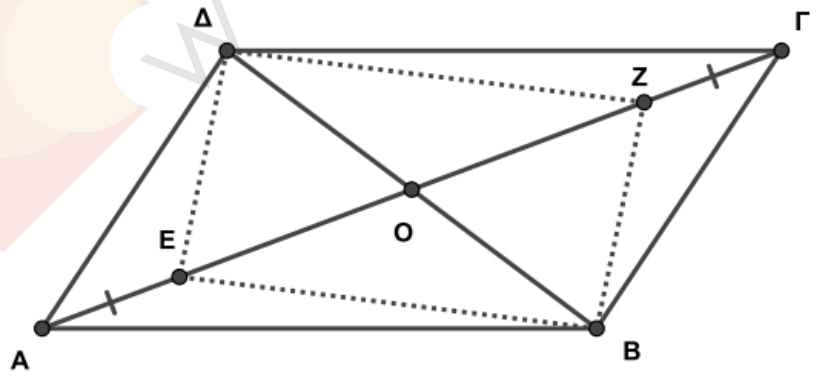
25. Θέμα 13829

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Θεωρούμε τα σημεία Ε και Ζ των τμημάτων ΑΟ και ΓΟ αντίστοιχα, τέτοια ώστε ΑΕ=ΓΖ.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΓΖΒ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ



α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΓΖΒ που έχουν:

i. ΑΕ=ΓΖ (από υπόθεση)

ii. ΑΔ=ΒΓ (απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου)

iii. $E\hat{A}\Delta = Z\hat{\Gamma}B$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΔ και ΒΓ που τέμνονται από την ΑΓ)

Τα οποία είναι ίσα αφού έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες.

β) ΟΕ=ΟΑ-ΑΕ και ΟΖ=ΟΓ-ΖΓ. Όμως ΟΑ=ΟΓ αφού το σημείο Ο είναι το κέντρο του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ και ΑΕ=ΖΓ από υπόθεση. Άρα ΟΕ=ΟΖ ως διαφορές ίσων τμημάτων. Επιπλέον ΒΟ=ΟΔ αφού το σημείο Ο είναι το κέντρο του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, επομένως οι διαγώνιες του τετραπλεύρου ΔΕΒΖ διχοτομούνται και το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.

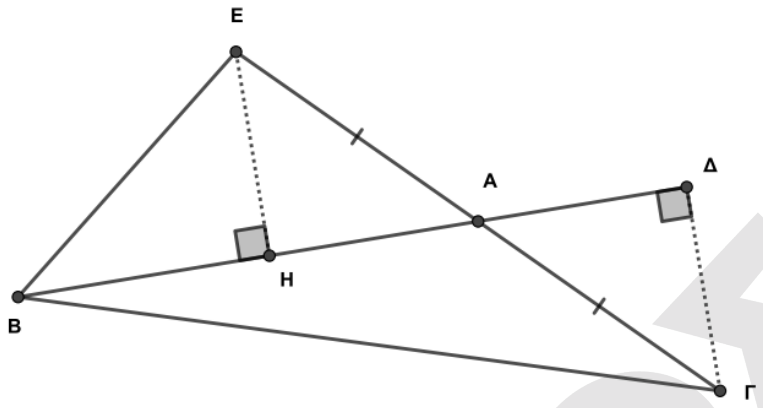
26. Θέμα 13833

Στο παρακάτω σχήμα το ΓΔ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΓ, το ΕΗ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΕ και η ΒΑ είναι διάμεσος του τριγώνου ΒΕΓ.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΑΕΗ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι ΑΗ=ΑΔ. (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΓΔΕΗ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)



ΛΥΣΗ

α) Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΓΔ και ΑΕΗ που έχουν:

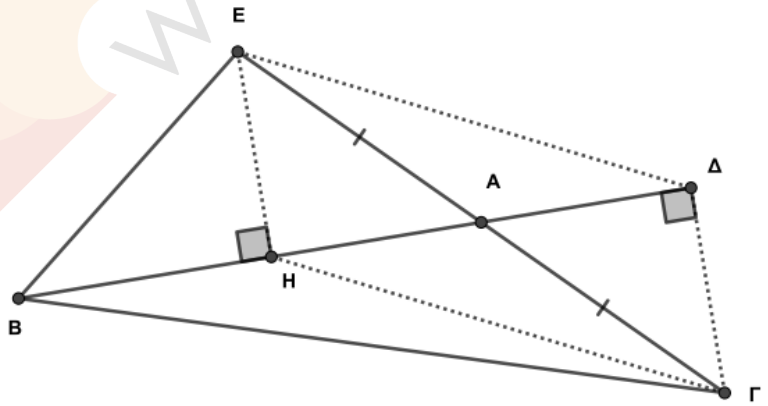
i. $\hat{H}=\hat{\Delta}=90^o$ (γιατί ΓΔ και ΕΗ ύψη)

ii. ΑΓ=ΑΕ (γιατί ΒΑ διάμεσος από υπόθεση)

iii. $\Delta\hat{A}\Gamma=E\hat{A}H$ (ως κατακορυφήν)

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, αφού είναι ορθογώνια που έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία ίσες μία προς μία.

β) Από την ισότητα των τριγώνων ΑΓΔ και ΑΕΗ του προηγούμενου ερωτήματος προκύπτει ότι $A\hat{E}H=A\hat{\Gamma}\Delta$ άρα και ΑΗ=ΑΔ ως πλευρές ίσων τριγώνων απέναντι από ίσες γωνίες.



γ) Από υπόθεση έχουμε ότι ΒΑ διάμεσος του τριγώνου ΕΒΓ άρα ΕΑ=ΑΓ και από το β) ερώτημα αποδείξαμε ότι ΑΗ=ΑΔ, άρα το τετράπλευρο ΓΔΕΗ είναι παραλληλόγραμμο αφού οι διαγώνιοι του ΕΓ και ΔΗ διχοτομούνται.

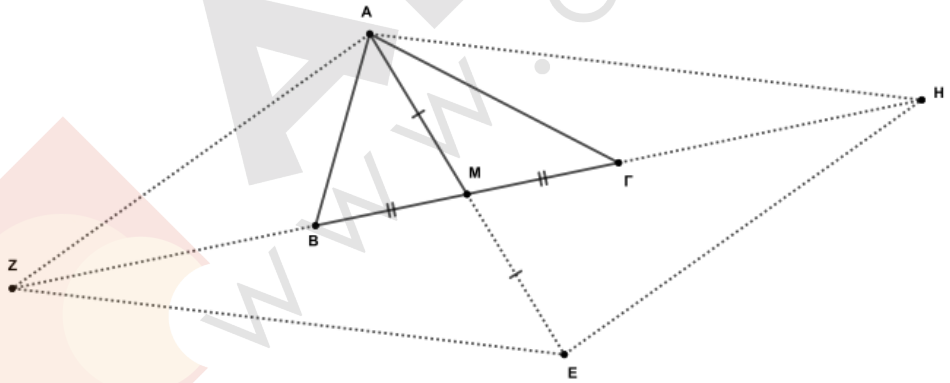
27. Θέμα 13834

Σε τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τη διάμεσό του ΑΜ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΓ προς το μέρος του Β κατά τμήμα ΒΖ=ΒΓ και προς το μέρος του Γ κατά τμήμα ΓΗ=ΒΓ, επίσης προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ κατά τμήμα ΜΕ=ΑΜ.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΜΖ και ΕΜΗ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΗΕΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ



α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΜΖ και ΕΜΗ που έχουν:

i. ΑΜ=ΜΕ (υπόθεση)

ii. ΜΖ=ΜΗ (άθροισμα ίσων τμημάτων ΜΒ+ΒΖ και ΜΓ+ΓΗ)

iii. $A\hat{M}Z=E\hat{M}H$ (ως κατακορυφήν)

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, επειδή έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες.

β) Από υπόθεση έχουμε ΑΜ=ΜΕ (1) και όπως χρησιμοποιήσαμε στην προηγούμενη σύγκριση έχουμε ΜΖ=ΜΗ (2). Επομένως στο τετράπλευρο ΑΗΕΖ οι διαγώνιοι ΑΕ και ΖΗ διχοτομούνται στο σημείο Μ, άρα το τετράπλευρο ΑΗΕΖ είναι παραλληλόγραμμο.

Θέμα 3 - Κωδικοί:

11897

28. Θέμα 11897

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσος του ΑΜ. Στην προέκταση της ΑΓ προς το Γ παίρνουμε τμήμα ΓΔ = ΑΓ. Από το Δ φέρνουμε παράλληλη προς την ΑΜ που τέμνει την προέκταση της ΒΓ στο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) ΜΓ = ΓΕ. (Μονάδες 9)

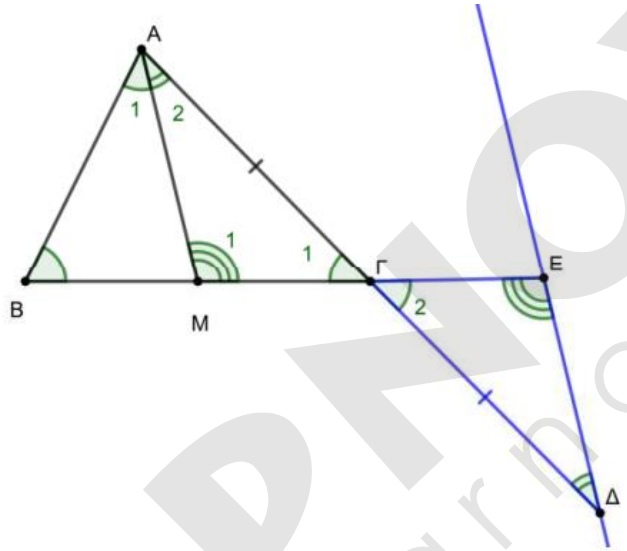
β) Το τετράπλευρο ΑΜΔΕ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)

γ) $\hat{B}+B\hat{A}M=\Gamma\hat{E}\Delta$. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσος ΑΜ. Προεκτείνουμε την ΑΓ κατά ΓΔ = ΑΓ.

Φέρουμε από το Δ παράλληλη στην ΑΜ που τέμνει την προέκταση της ΒΓ στο Ε.



α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΜΓ και ΔΕΓ. Αυτά έχουν:

ΑΓ = ΓΔ, από υπόθεση,

$\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2$, ως κατακορυφήν,

$\hat{A}_2 = \hat{\Delta}$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΜ και ΔΕ που τέμνονται από την ΑΔ.

Είναι ίσα, επειδή έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες σε αυτήν γωνίες αντίστοιχα ίσες. Έτσι ΜΓ = ΓΕ γιατί είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{A}_2$ και $\hat{\Delta}$.

β) Αφού ΑΓ = ΓΔ και ΜΓ = ΓΕ, το τετράπλευρο ΑΜΔΕ είναι παραλληλόγραμμο επειδή οι διαγώνιοι του διχοτομούνται στο Γ.

γ) Στο τρίγωνο ΑΜΒ, η εξωτερική γωνία $\widehat{M}_1=\widehat{B}+B\widehat{A}M$. (2)

$\widehat{M}_1 = \Gamma\widehat{E}\Delta$ (3) επειδή είναι εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΜ και ΔΕ που τέμνονται από την ΜΕ.

Από τις σχέσεις (2), (3) προκύπτει ότι $\Gamma\widehat{E}\Delta=\widehat{B}+B\widehat{A}M$.

Θέμα 4 - Κωδικοί:

1709, 1730, 1731, 1746, 1785, 1805, 1810, 1839, 1842, 1857, 1877, 1882

1890, 1891, 13845

29. Θέμα 1709

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, στο οποίο η εξωτερική του γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι διπλάσια της εσωτερικής του γωνίας $\hat{A}$. Από την κορυφή Α διέρχεται ημιευθεία Αx // ΒΓ στο ημιεπίπεδο (ΑΒ, Γ). Στην ημιευθεία Αx θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε ΑΔ=ΒΓ.

Να αποδείξετε ότι:

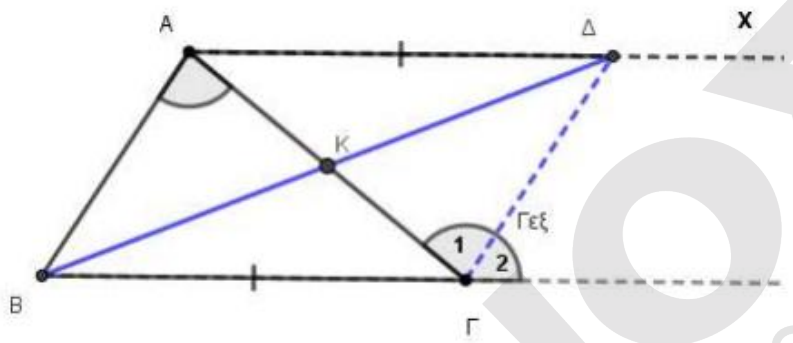
α) Η ΒΔ διέρχεται από το μέσο του τμήματος ΑΓ. (Μονάδες 7)

β) Η ΓΔ είναι διχοτόμος της $\hat{\Gamma}_{εξ}$. (Μονάδες 9)

γ) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ τέτοιο ώστε η $\hat{\Gamma}_{εξ} = 2\hat{A}$, ημιευθεία Αx παράλληλη στη ΒΓ και σημείο της Δ τέτοιο ώστε ΑΔ = ΒΓ.



α) Αφού τα τμήματα ΑΔ και ΒΓ είναι ίσα και παράλληλα, τότε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. Οι διαγώνιοί του ΑΓ και ΒΔ διχοτομούνται έστω στο σημείο Κ. Άρα η ΒΔ διέρχεται από το μέσο Κ του τμήματος ΑΓ.

β) Επειδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, οι πλευρές του ΑΒ και ΔΓ είναι παράλληλες.

Είναι $\hat{\Gamma}_1 = \hat{A}$ (1) ως γωνίες εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τις τέμνει η ΑΓ.

Όμως είναι $\hat{\Gamma}_{εξ} = 2\hat{A}$ και $\hat{\Gamma}_{εξ} = \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_2$ οπότε θα είναι $2\hat{A} = \hat{A} + \hat{\Gamma}_2$. Άρα $\hat{A} = \hat{\Gamma}_2$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2$, οπότε η ΓΔ είναι διχοτόμος της $\hat{\Gamma}_{εξ}$.

γ) Γνωρίζουμε ότι η εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των απέναντι δυο εσωτερικών γωνιών του, άρα $\hat{\Gamma}_{εξ} = \hat{A} + \hat{B}$. Με δεδομένο ότι $\hat{\Gamma}_{εξ} = 2\hat{A}$ θα είναι $2\hat{A} = \hat{A} + \hat{B}$ άρα $\hat{A} = \hat{B}$. Οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

30. Θέμα 1730

Έστω ότι Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αντίστοιχα. Αν για το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ επιπλέον ισχύει ΑΒ>ΑΔ, να εξετάσετε αν είναι αληθείς ή όχι οι ακόλουθοι ισχυρισμοί:

Ισχυρισμός 1: Το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.

Ισχυρισμός 2: $\widehat{AE\Delta} = \widehat{BZ\Gamma}$.

Ισχυρισμός 3: Οι ΔΕ και ΒΖ είναι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών $\widehat{\Delta}$ και $\widehat{B}$.

α) Στην περίπτωση που θεωρείτε ότι κάποιος ισχυρισμός είναι αληθής να τον αποδείξετε. (Μονάδες 16)

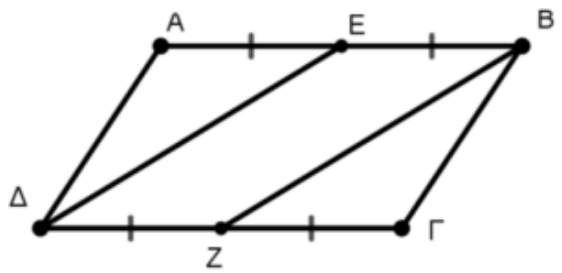
β) Στην περίπτωση που κάποιος ισχυρισμός δεν είναι αληθής, ναβρείτε τη σχέση των διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου ώστε να είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) <u>Απόδειξη ισχυρισμού 1</u>

Είναι ΔΖ = $\frac{\Delta\Gamma}{2} = \frac{AB}{2}$ = ΕΒ και ΔΖ // ΕΒ (ως τμήματα των παραλλήλων ΑΒ και ΔΓ).

Δηλαδή το τετράπλευρο ΔΕΒΖ έχει δύο απέναντι πλευρές παράλληλες και ίσες, άρα είναι παραλληλόγραμμο.



<u>Απόδειξη ισχυρισμού 2</u>

Επειδή το ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο ισχύει ότι $\Delta\hat{E}B = B\hat{Z}\Delta$. Οπότε, και οι παραπληρωματικές τους $A\hat{E}\Delta$ και $B\hat{Z}\Gamma$ θα είναι ίσες, δηλαδή $A\hat{E}\Delta = B\hat{Z}\Gamma$.

Ο ισχυρισμός 3 δεν είναι αληθής και στο β ερώτημα γίνεται μία αιτιολόγηση.

β) <u>Ισχυρισμός 3</u>

Έστω ότι η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta}$. Τότε $A\hat{\Delta}E = E\hat{\Delta}Z$ (1). Ισχύει επιπλέον ότι $A\hat{E}\Delta = E\hat{\Delta}Z$ (2) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΕΔ. Από (1), (2) βρίσκουμε $A\hat{\Delta}E = A\hat{E}\Delta$. Οπότε το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές, με ΑΕ = ΑΔ. Τότε $A\Delta = AE = \frac{AB}{2} \Leftrightarrow AB = 2A\Delta$. Αν λοιπόν η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta}$, τότε η μία πλευρά του παραλληλογράμμου είναι διπλάσια της άλλης. Και αντιστρόφως, αν ΑΒ = 2ΑΔ, τότε το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές, οπότε $A\hat{\Delta}E = A\hat{E}\Delta$. Και αφού είναι και $A\hat{E}\Delta = E\hat{\Delta}Z$, θα έχουμε ότι $A\hat{\Delta}E = E\hat{\Delta}Z$, δηλαδή ότι η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta}$.

Σολωμού 29 Αθήνα τηλ: 210 38 22 157 info@arnos.gr www.arnos.gr

31. Θέμα 1731

Έστω ότι Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αντίστοιχα. Αν για το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ επιπλέον ισχύουν ΑΒ>ΑΔ και γωνία Α αμβλεία , να εξετάσετε αν είναι αληθείς οι ακόλουθοι ισχυρισμοί:

Ισχυρισμός 1: Το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.

Ισχυρισμός 2: Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΖ είναι ίσα.

Ισχυρισμός 3: Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΖ είναι ισοσκελή.

α) Στην περίπτωση που θεωρείτε ότι κάποιος ισχυρισμός είναι αληθής να τον αποδείξετε. (Μονάδες 16)

β) Στην περίπτωση που κάποιος ισχυρισμός δεν είναι αληθής, να βρείτε τη σχέση των διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου ώστε να είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

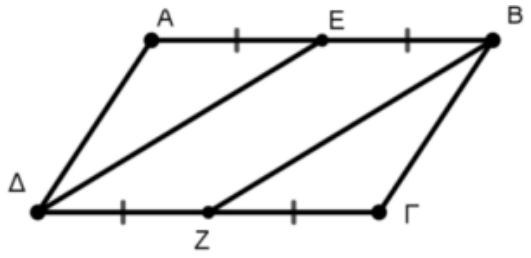
(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) <u>Απόδειξη ισχυρισμού 1</u>

ΔΖ = $\frac{ΔΓ}{2} = \frac{ΑΒ}{2}$ = ΕΒ και ΔΖ // ΕΒ (ως τμήματα των παραλλήλων ΑΒ και ΔΓ).

Άρα το τετράπλευρο ΔΕΒΖ έχει δύο απέναντι πλευρές παράλληλες και ίσες, άρα είναι παραλληλόγραμμο.



<u>Απόδειξη ισχυρισμού 2</u>

Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΖΓ έχουν:

- ΑΔ = ΒΓ, ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου
- ΑΕ = $\frac{AB}{2} = \frac{\Delta\Gamma}{2}$ = ΖΓ
- $\hat{A} = \hat{\Gamma}$, ως απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου.

Σύμφωνα με το κριτήριο Π – Γ – Π τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) <u>Ισχυρισμός 3</u>

Έστω ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΖΓ είναι ισοσκελή. Τότε θα ισχύει ΑΔ = ΑΕ = $\frac{AB}{2} \Leftrightarrow$ ΑΒ = 2ΑΔ. Και αντιστρόφως, αν ΑΒ=2ΑΔ, τότε ΑΔ=ΑΕ, οπότε τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΖΓ θα είναι ισοσκελή. Άρα τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΖΓ είναι ισοσκελή αν και μόνο αν η μία πλευρά του παραλληλογράμμου είναι διπλάσια της άλλης.

32. Θέμα 1746

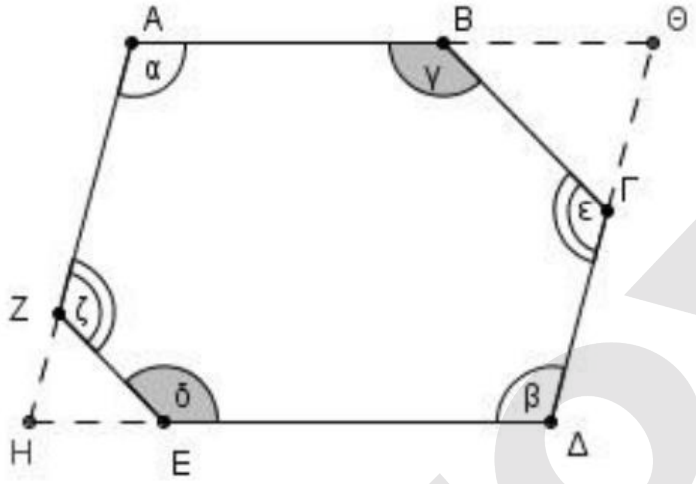
Στο κυρτό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ ισχύουν τα εξής: $\hat{\alpha} = \hat{\beta}, \hat{\gamma} = \hat{\delta}$ και $\hat{\varepsilon} = \hat{\zeta}$.

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\hat{\alpha} + \hat{\gamma} + \hat{\varepsilon}$. (Μονάδες 8)

β) Αν οι πλευρές ΑΖ και ΔΕ προεκτεινόμενες τέμνονται στο Η και οι πλευρές ΑΒ και ΔΓ προεκτεινόμενες τέμνονται στο Θ, να αποδείξετε ότι:

i. Οι γωνίες Α και Η είναι παραπληρωματικές (Μονάδες 10)

ii. Το τετράπλευρο ΑΘΔΗ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)



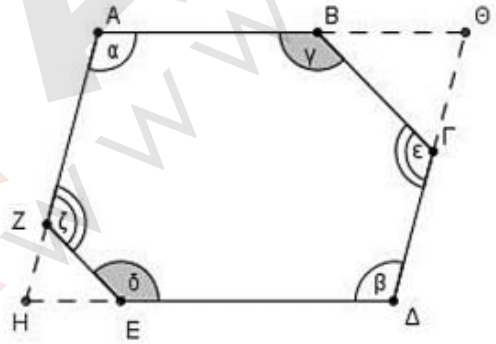
ΛΥΣΗ

α) Ισχύει ότι $\hat{\alpha} = \hat{\beta}, \hat{\gamma} = \hat{\delta}$ και $\hat{\varepsilon} = \hat{\zeta}$ (1)

Για τις γωνίες του εξαγώνου ισχύει ότι:

$\hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} + \hat{\delta} + \hat{\varepsilon} + \hat{\zeta} = (6-2) \cdot 180^o = 720^o$, άρα $2\hat{\alpha} + 2\hat{\gamma} + 2\hat{\varepsilon} = 720^o \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \hat{\alpha} + \hat{\gamma} + \hat{\varepsilon} = 360^o$ (2)



β) i. Είναι $\hat{\alpha} + \hat{\gamma} + \hat{\varepsilon} = 360^o$, άρα και $\hat{\alpha} + \hat{\delta} + \hat{\zeta} = 360^o$ (3)

Οι γωνίες $H\hat{Z}E$, $\hat{\zeta}$ και $H\hat{E}Z$, $\hat{\delta}$ είναι εφεξής και παραπληρωματικές. Άρα $H\hat{Z}E + \hat{\zeta} = 180^o$ και $H\hat{E}Z + \hat{\delta} = 180^o$ (4)

Στο τρίγωνο ΗΖΕ ισχύει ότι:

$\hat{H} + H\hat{Z}E + H\hat{E}Z = 180^o$, και λόγω των (3) και (4) θα είναι $\hat{H} + 180^o - \hat{\zeta} + 180^o - \hat{\delta} = 180^o$, ή $\hat{H} = \hat{\delta} + \hat{\zeta} - 180^o$. Οπότε (λόγω της 3) $\hat{H} = 360^o - \hat{\alpha} - 180^o \Leftrightarrow \hat{H} + \hat{A} = 180^o$. Δηλαδή οι γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{H}$ είναι παραπληρωματικές.

ii. Οι γωνίες $\hat{H}$ και $\hat{A}$ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των ΑΘ, ΗΔ που τέμνονται από την ΑΗ και επίσης είναι παραπληρωματικές. Άρα οι ευθείες ΑΘ, ΗΔ είναι παράλληλες. Με όμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι και οι ευθείες ΑΗ και ΘΔ είναι παράλληλες.

Το ΑΘΔΗ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

33. Θέμα 1785

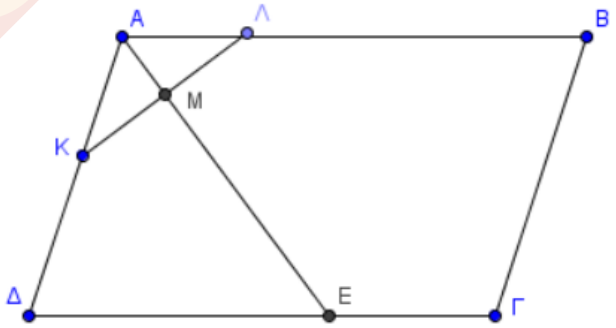
Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, με ΑΒ > ΑΔ. Θεωρούμε σημεία Κ, Λ, των ΑΔ και ΑΒ αντίστοιχα ώστε ΑΚ = ΑΛ. Έστω Μ το μέσο του ΚΛ και η προέκταση του ΑΜ (προς το Μ) τέμνει τη ΔΓ στο σημείο Ε.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΔ =ΔΕ. (Μονάδες 8)

β) ΒΓ + ΓΕ = ΑΒ. (Μονάδες 10)

γ) $\hat{B} = 2 \cdot A\hat{\Lambda}K$. (Μονάδες 7)



Έξυπνα & εύκολα!

ΛΥΣΗ

α) Επειδή ΑΚ = ΑΛ, το τρίγωνο ΑΚΛ είναι ισοσκελές οπότε η διάμεσος ΑΜ είναι και διχοτόμος της γωνίας Α, δηλαδή $K\hat{A}M = M\hat{A}\Lambda$ (1). Επίσης $M\hat{A}\Lambda = A\hat{E}\Delta$ (2) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΑΕ. Από (1), (2) προκύπτει $K\hat{A}M = A\hat{E}\Delta$, οπότε το τρίγωνο ΔΑΕ είναι ισοσκελές, άρα ΑΔ = ΔΕ.

β) Είναι ΔΕ = ΑΔ από το ερώτημα (α) και ΑΔ = ΒΓ, ΑΒ = ΔΓ αφού ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο οπότε ΔΕ = ΑΔ = ΒΓ, οπότε ΒΓ + ΓΕ = ΔΕ + ΓΕ = ΔΓ = ΑΒ.

γ) Από το άθροισμα των γωνιών του ισοσκελούς τριγώνου ΑΚΛ έχουμε:

$\hat{A} + A\hat{K}\Lambda + A\hat{\Lambda}K = 180^o \Leftrightarrow \hat{A} + 2A\hat{\Lambda}K = 180^o \Leftrightarrow 2A\hat{\Lambda}K = 180^o - \hat{A}$ (3).

Οι γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{B}$ είναι παραπληρωματικές ως εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΔ, ΒΓ. Δηλαδή $\hat{A} + \hat{B} = 180^o \Leftrightarrow \hat{B} = 180^o - \hat{A}$ (4).

Από τις σχέσεις (3), (4) προκύπτει ότι $\hat{B} = 2A\hat{\Lambda}K$.

34. Θέμα 1805

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και στην προέκταση της ΑΔ θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο ώστε ΔΕ = ΔΓ ενώ στην προέκταση της ΑΒ θεωρούμε σημείο θεωρούμε σημείο Ζ τέτοιο ώστε ΒΖ = ΒΓ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $B\hat{\Gamma}Z = \Delta\hat{\Gamma}E$. (Μονάδες 10)

ii. τα σημεία Ζ, Γ, Ε είναι συνευθειακά. (Μονάδες 10)

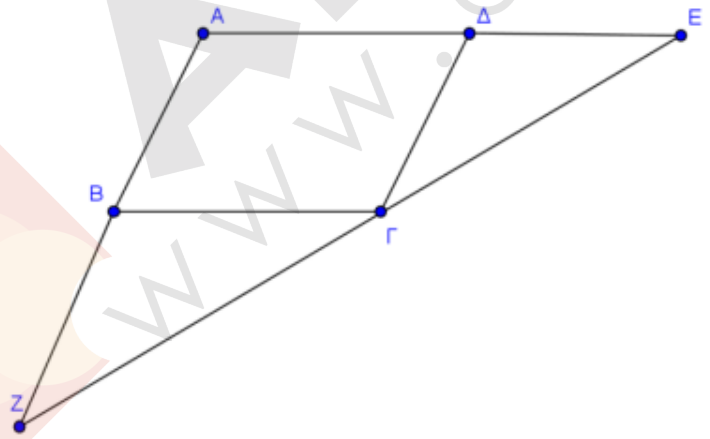
β) Ένας μαθητής για να αποδείξει ότι τα σημεία Ζ, Γ, Ε είναι συνευθειακά ανέπτυξε τον παρακάτω συλλογισμό. « Έχουμε:

$B\hat{\Gamma}Z = \Delta\hat{E}\Gamma$ (ως εντός εκτός και επι τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ που τέμνονται από τη ΖΕ) και

$B\hat{\Gamma}\Delta = \Gamma\hat{\Delta}E$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ που τέμνονται από την ΔΓ).

Όμως $\Delta\hat{\Gamma}E + \Gamma\hat{\Delta}E + \Delta\hat{E}\Gamma = 180^o$ (ως άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΔΕΓ). Άρα σύμφωνα με τα προηγούμενα: $\Delta\hat{\Gamma}E + B\hat{\Gamma}\Delta + B\hat{\Gamma}Z = 180^o$. Οπότε τα σημεία Ζ, Γ, Ε είναι συνευθειακά.»

Όμως ο καθηγητής υπέδειξε ένα λάθος στο συλλογισμό αυτό. Να βρείτε το λάθος στο συγκεκριμένο συλλογισμό. (Μονάδες 5)



ΛΥΣΗ

α) i. Επειδή ΒΖ = ΒΓ, το τρίγωνο ΒΖΓ είναι ισοσκελές άρα $B\hat{\Gamma}Z = B\hat{Z}\Gamma$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΒΓΖ έχουμε:

$\Gamma\hat{B}Z + B\hat{\Gamma}Z + B\hat{Z}\Gamma = 180^o \Leftrightarrow 180^o - \hat{B} + 2B\hat{\Gamma}Z = 180^o \Leftrightarrow B\hat{\Gamma}Z = \frac{\hat{B}}{2}$.

Το τρίγωνο ΓΔΕ είναι ισοσκελές διότι ΔΕ = ΔΓ οπότε $\Delta\hat{\Gamma}E = \Delta\hat{E}\Gamma$.

Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΓΔΕ, έχουμε:

$\Delta\hat{\Gamma}E + \Delta\hat{E}\Gamma + E\hat{\Delta}\Gamma = 180^o \Leftrightarrow 2\Delta\hat{\Gamma}E + 180^o - \hat{\Delta} = 180^o \Leftrightarrow \Delta\hat{\Gamma}E = \frac{\hat{\Delta}}{2}$

Επειδή $\hat{B} = \hat{\Delta}$, ως απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου, έχουμε $B\hat{\Gamma}Z = \Delta\hat{\Gamma}E$.

ii. Η $A\hat{B}\Gamma$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΒΖΓ οπότε $A\hat{B}\Gamma = B\hat{\Gamma}Z + B\hat{\Gamma}Z \Leftrightarrow A\hat{B}\Gamma = 2B\hat{\Gamma}Z$

Είναι: $Z\hat{\Gamma}E = B\hat{\Gamma}Z + B\hat{\Gamma}\Delta + \Delta\hat{\Gamma}E \Leftrightarrow Z\hat{\Gamma}E = 2B\hat{\Gamma}Z + B\hat{\Gamma}\Delta \Leftrightarrow Z\hat{\Gamma}E = A\hat{B}\Gamma + B\hat{\Gamma}\Delta \Leftrightarrow$

$Z\hat{\Gamma}E = A\hat{B}\Gamma + B\hat{\Gamma}\Delta \Leftrightarrow Z\hat{\Gamma}E = 180^o$ διότι οι γωνίες $A\hat{B}\Gamma$ και $B\hat{\Gamma}\Delta$ είναι παραπληρωματικές. Άρα τα σημεία Ζ,Γ,Ε είναι συνευθειακά.

β) Το λάθος οφείλεται στο συλλογισμό ότι χρησιμοποιήθηκε ως δεδομένο ότι τα Ζ,Γ,Ε είναι συνευθειακά και αξιοποιήθηκε για να αποδείξουμε ότι οι γωνίες $B\hat{\Gamma}Z$ και $\Delta\hat{E}\Gamma$ είναι ίσες.

35. Θέμα 1810

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από το μέσο Μ του ΒΓ φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα ΜΔ ίσο και παράλληλο με το ΒΑ και ευθύγραμμο τμήμα ΜΕ ίσο και παράλληλο με το ΓΑ (τα σημεία Δ και Ε είναι στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από τη ΒΓ και το σημείο Α). Να αποδείξετε ότι:

α) Τα σημεία Δ, Α, Ε είναι συνευθειακά. (Μονάδες 10)

β) Η περίμετρος του τριγώνου ΜΔΕ είναι ίση με την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 9)

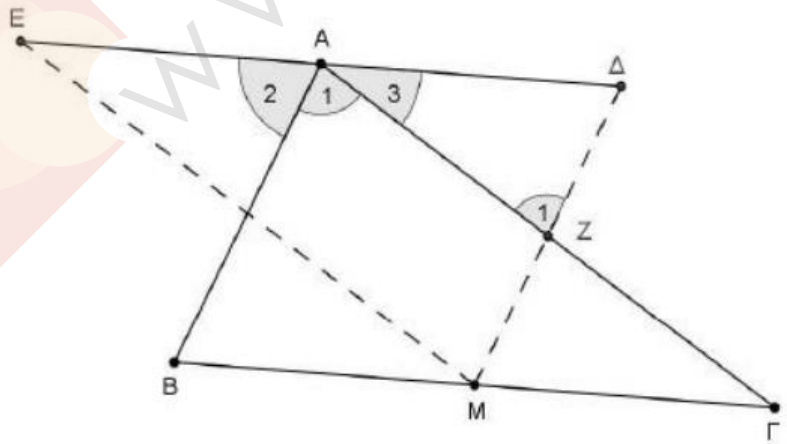
γ) Όταν ένας καθηγητής έθεσε στους μαθητές του το ερώτημα αν τα σημεία Δ, Α, Ε είναι συνευθειακά, ένας από αυτούς έκανε το παρακάτω σχήμα και απάντησε ως εξής:

$\hat{Z}_1 = \hat{A}_1$ (εντός εναλλάξ των ΑΒ//ΜΔ που τέμνονται από ΑΖ)

$A\hat{\Delta}Z = \hat{A}_2$ (εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των ΑΒ//ΜΔ που τέμνονται από ΔΕ)

Όμως $\hat{Z}_1 + \hat{A}_3 + A\hat{\Delta}Z = 180^0$ (άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΔΖ). Άρα σύμφωνα με τα προηγούμενα έχουμε: $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 180^0$. Οπότε Δ,Ε,Α συνευθειακά.

Όμως ο καθηγητής είπε ότι υπάρχει λάθος στο συλλογισμό. Μπορείτε να εντοπίσετε το λάθος του μαθητή; (Μονάδες 6)



ΛΥΣΗ

α) Το τετράπλευρο ΒΑΔΜ είναι παραλληλόγραμμο διότι έχει δύο πλευρές παράλληλες και ίσες, καθώς τα ΜΔ και ΒΑ είναι ίσα και παράλληλα. Άρα η ΑΔ είναι παράλληλη της ΒΜ, επομένως η ΑΔ είναι παράλληλη και της ΒΓ.

Ομοίως, το ΑΕΜΓ είναι παραλληλόγραμμο διότι ΜΕ και ΓΑ είναι ίσα και παράλληλα. Άρα η ΑΕ είναι παράλληλη της ΜΓ, επομένως και της ΒΓ.

Συνεπώς τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΕ και ΑΔ είναι παράλληλα της ΒΓ. Εφόσον το Α είναι κοινό τους σημείο, τα ΑΕ και ΑΔ βρίσκονται στην ίδια ευθεία, άρα τα σημεία Δ, Α, Ε είναι συνευθειακά.

β) Από την υπόθεση έχουμε ότι ΑΒ = ΜΔ και ΑΓ = ΜΕ. Επίσης, από το α), λόγω των παραλληλογράμμων ΒΑΔΜ και ΑΕΜΓ έχουμε ότι ΑΕ = ΜΓ και ΑΔ = ΒΜ, αντίστοιχα (ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου).

Άρα, ΔΕ = ΑΕ + ΑΔ = ΒΜ + ΜΓ = ΒΓ.

Έστω $Π_1$ η περίμετρος του τριγώνου ΜΕΔ και $Π_2$ η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ τότε, από τα αμέσως προηγούμενα, έχουμε:

$Π_1$ = ΜΕ + ΜΔ + ΔΕ = ΑΓ + ΑΒ + ΒΓ = $Π_2$.

γ) Το λάθος εντοπίζεται στον ισχυρισμό $A\hat{\Delta}Z = \hat{A}_2$, διότι ο μαθητής χρησιμοποιεί για τον ισχυρισμό αυτό ότι τα σημεία Δ, Α, Ε είναι συνευθειακά. Δηλαδή χρησιμοποιεί το συμπέρασμα ως υπόθεση.

36. Θέμα 1839

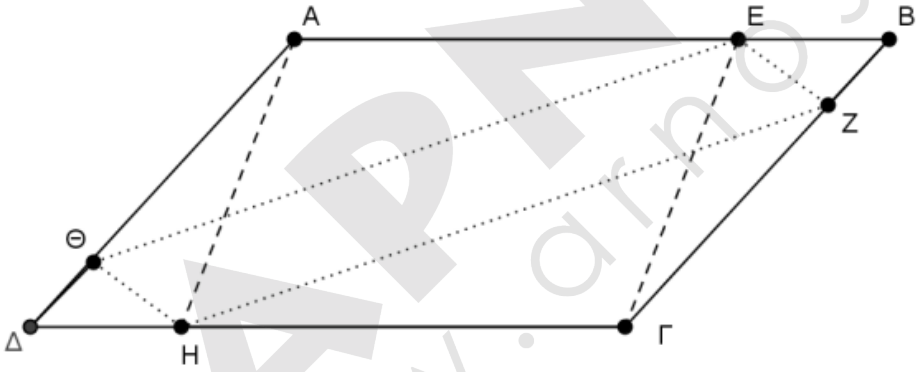
Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ θεωρούμε σημεία Ε, Ζ, Η, Θ στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα, με ΑΕ=ΓΗ και ΒΖ=ΔΘ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΕΓΗ είναι παραλληλόγραμμο. (6 μονάδες)

β) Το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο. (10 μονάδες)

γ) Τα τμήματα ΑΓ, ΒΔ, ΕΗ και ΖΘ διέρχονται από το ίδιο σημείο. (9 μονάδες)

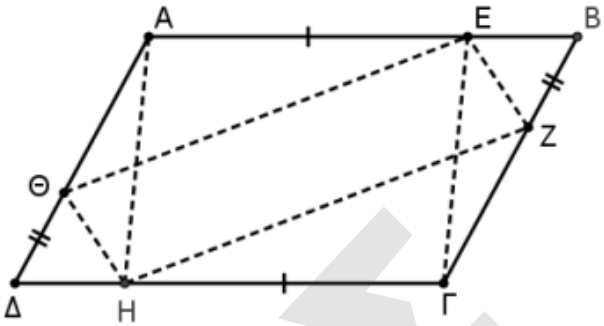


ΛΥΣΗ

α) Επειδή ΑΒ // ΓΔ είναι και ΑΕ // ΓΗ. Επίσης ΑΕ=ΓΗ από υπόθεση, οπότε το τετράπλευρο ΑΕΓΗ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες.

β) Τα τρίγωνα ΔΗΘ και ΒΕΖ έχουν:

- ΔΗ = ΒΕ αφού ΔΗ = ΔΓ – ΗΓ = ΑΒ – ΑΕ = ΒΕ
- $\hat{\Delta} = \hat{B}$, ως απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου
- ΔΘ=ΒΖ, από υπόθεση



Σύμφωνα με το κριτήριο Π–Γ–Π τα τρίγωνα είναι ίσα άρα και ΘΗ = ΕΖ (1) αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{\Delta}$ και $\hat{B}$.

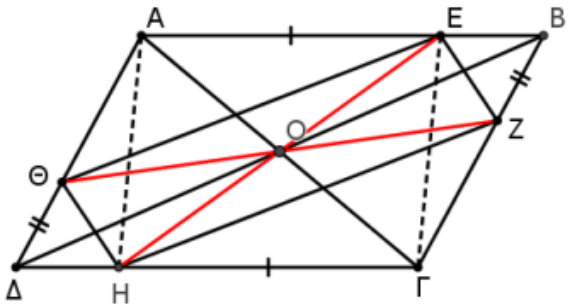
Τα τρίγωνα ΑΘΕ και ΓΗΖ έχουν:

- ΑΕ =ΓΗ, από υπόθεση
- $\hat{A} = \hat{\Gamma}$, ως απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου
- ΑΘ=ΓΖ διότι ΑΘ= ΑΔ – ΘΔ = ΒΓ – ΒΖ =ΓΖ

Σύμφωνα με το κριτήριο Π – Γ – Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και ΘΕ = ΗΖ(2) αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Gamma}$.

Από τις (1) και (2) το τετράπλευρο ΕΖΗΘ έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες, άρα είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Έστω Ο το μέσον της ΑΓ.



Επειδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, άρα η ΒΔ διέρχεται από το Ο.

Επειδή το ΑΕΓΗ είναι παραλληλόγραμμο οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, άρα η ΕΗ διέρχεται από το Ο που είναι και το μέσον της.

Επειδή το ΑΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, άρα η ΘΖ διέρχεται από το μέσον της ΕΗ που είναι το Ο.

Άρα οι ΑΓ, ΒΔ, ΕΗ και ΖΘ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

37. Θέμα 1842

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Στην προέκταση της πλευράς ΑΒ παίρνουμε τμήμα ΒΕ=ΑΒ και στην προέκταση της πλευράς ΑΔ τμήμα ΔΖ=ΑΔ.

α) Να αποδείξετε ότι:

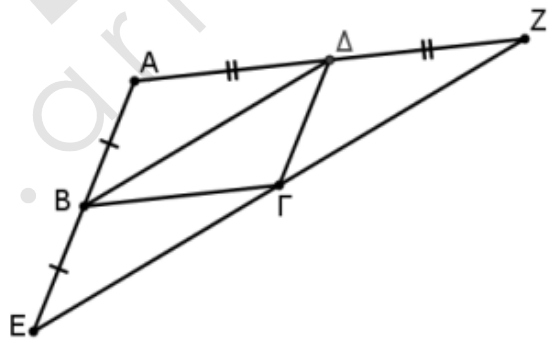
i. Τα τετράπλευρα ΒΔΓΕ και ΒΔΖΓ είναι παραλληλόγραμμα. (Μονάδες 7)

ii. Τα σημεία Ε, Γ και Ζ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 9)

β) Αν Κ και Λ είναι τα μέσα των ΒΕ και ΔΖ αντίστοιχα, τότε ΚΛ// ΔΒ και $\text{ΚΛ} = \frac{3}{2}\text{ΔΒ}$.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ



α) i. Είναι

ΑΒ //= ΓΔ ⇔ ΒΕ // = ΓΔ

Οπότε στο τετράπλευρο ΒΔΓΕ δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

Όμοια ΑΔ // = ΒΓ ⇔ ΔΖ // = ΒΓ.

Επομένως το τετράπλευρο ΒΔΖΓ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

ii. Επειδή το ΒΔΓΕ είναι παραλληλόγραμμο, ισχύει ότι ΕΓ // ΒΔ (1).

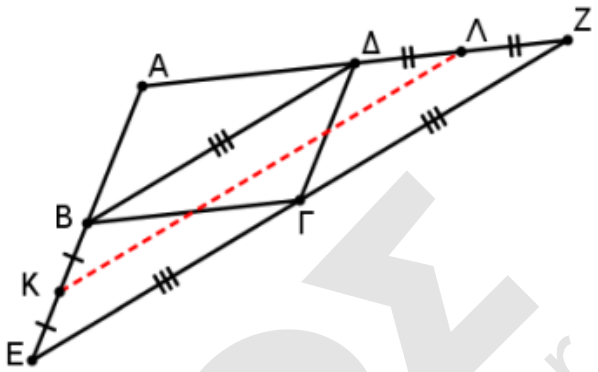
Όμοια, το ΒΔΖΓ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε: ΓΖ// ΒΔ (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι ΕΓ //ΓΖ, άρα τα σημεία Ε, Γ, Ζ είναι συνευθειακά.

β) Επειδή ΒΔ //ΕΖ, και οι ΕΒ και ΖΔ τέμνονται στο Α, το τετράπλευρο ΒΔΖΕ είναι τραπέζιο.

Η ΚΛ είναι διάμεσος του τραπεζίου, άρα ΚΛ //ΔΒ και

$$ΚΛ=\frac{ΔΒ+ΕΖ}{2}=\frac{ΔΒ+ΕΓ+ΓΖ}{2}=\frac{ΔΒ+ΔΒ+ΔΒ}{2}=\frac{3ΔΒ}{2}$$



38. Θέμα 1857

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ < ΑΓ), με ΑΚ διχοτόμο της γωνίας Α. Στην προέκταση της ΑΚ θεωρούμε σημείο Δ ώστε $AK = K\Delta$. Η παράλληλη από το Δ προς την ΑΒ τέμνει τις ΑΓ και ΒΓ στα Ε και Ζ αντίστοιχα.

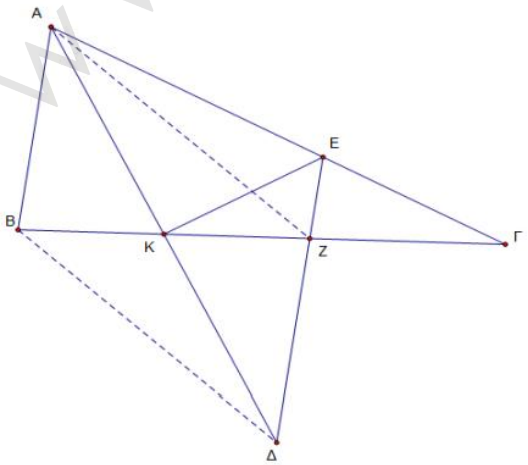
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

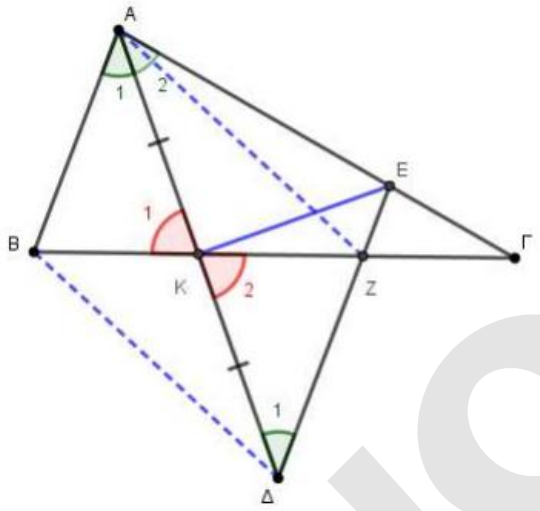
β) Η ΕΚ είναι μεσοκάθετος της ΑΔ . (Μονάδες 6)

γ) Τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΚΔΖ είναι ίσα. (Μονάδες 7)

δ) Το τετράπλευρο ΑΖΔΒ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)



ΛΥΣΗ



α) Είναι $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ (1) αφού ΑΚ διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$ και $\widehat{A}_1 = \widehat{\Delta}_1$ (2) ως γωνίες εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΔΕ που τις τέμνει η ΑΔ. Από (1), (2) προκύπτει ότι $\widehat{A}_2 = \widehat{\Delta}_1$.

Άρα το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές με βάση ΑΔ και ίσες πλευρές τις ΕΑ, ΕΔ.

β) Από την υπόθεση είναι ΑΚ = ΚΔ, οπότε η ΕΚ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση ΑΔ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΕΔ του α) ερωτήματος, άρα η ΕΚ είναι και ύψος του. Οπότε η ΕΚ είναι μεσοκάθετος του ΑΔ.

γ) Τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΚΔΖ έχουν:

- $\widehat{A}_1 = \widehat{\Delta}_1$ λόγω της (2)
- $\widehat{K}_1 = \widehat{K}_2$ ως κατακορυφήν
- ΑΚ = ΚΔ, από υπόθεση

Σύμφωνα με το κριτήριο Γ – Π – Γ τα τρίγωνα είναι ίσα.

δ) Αφού τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΚΔΖ είναι ίσα (προηγούμενο ερώτημα) τότε θα έχουν και ΒΚ = ΚΖ ως απέναντι πλευρές των ίσων γωνιών $\hat{A}_1$ και $\hat{\Delta}_1$ αντίστοιχα. Επίσης είναι ΑΚ = ΚΔ από υπόθεση. Άρα το ΑΖΔΒ είναι παραλληλόγραμμο γιατί οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

39. Θέμα 1877

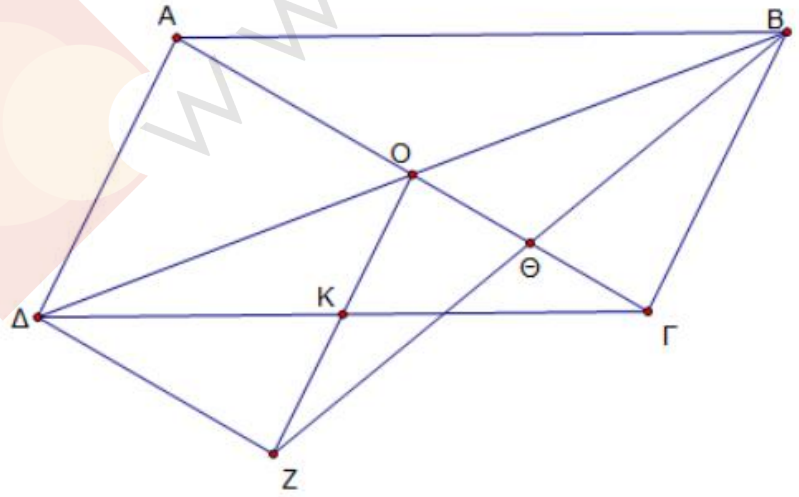
Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του και Κ το μέσο του ΓΔ. Προεκτείνουμε το τμήμα ΟΚ κατά τμήμα $KZ = KO$. Η ΒΖ τέμνει τη διαγώνιο ΑΓ στο Θ.

Να αποδείξετε ότι:

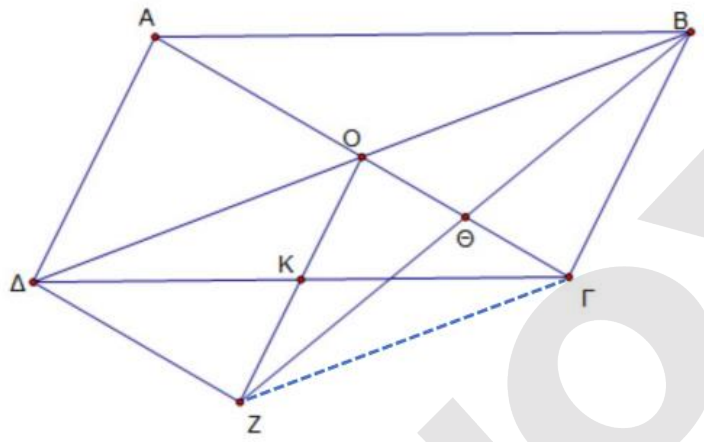
α) Τα τμήματα ΟΓ και ΒΖ διχοτομούνται. (Μονάδες 8)

β) $AO = \Delta Z$. (Μονάδες 9)

γ) Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{AOB}$ και $\overset{\Delta}{\Delta Z\Gamma}$ είναι ίσα. (Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ



α) Επειδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο οι διαγώνιοί του, ΑΓ και ΒΔ διχοτομούνται οπότε ισχύει ΟΒ = ΟΔ και ΟΑ = ΟΓ.

Επίσης, το Κ είναι μέσο του ΔΓ οπότε ΔΚ = ΚΓ. Ακόμα ΚΖ = ΚΟ από υπόθεση. Δηλαδή οι διαγώνιοι ΟΖ και ΔΓ του τετραπλεύρου ΟΔΖΓ διχοτομούνται, άρα το ΟΔΖΓ είναι παραλληλόγραμμο.

Τότε ΖΓ = ΟΔ και ΖΓ // ΟΔ, ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου. Επειδή ΟΒ = ΟΔ, θα είναι ΖΓ = ΟΒ. Επίσης ΖΓ // ΟΒ.

Επομένως το τετράπλευρο ΟΒΓΖ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί έχει δύο πλευρές παράλληλες και ίσες. Επειδή τα τμήματα ΟΓ και ΒΖ είναι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου ΟΓΖ, διχοτομούνται.

β) Από το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ΟΑ = ΟΓ. Από το παραλληλόγραμμο ΟΔΖΓ έχουμε ΔΖ = ΟΓ (απέναντι πλευρές). Άρα ΑΟ = ΔΖ.

γ) Τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΔΖΓ έχουν:

- ΑΟ = ΔΖ, από το ερώτημα β),
- ΑΒ = ΔΓ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ,
- ΟΒ = ΖΓ, ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΟΒΓΖ.

Σύμφωνα με το κριτήριο Π – Π – Π τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΔΖΓ είναι ίσα.

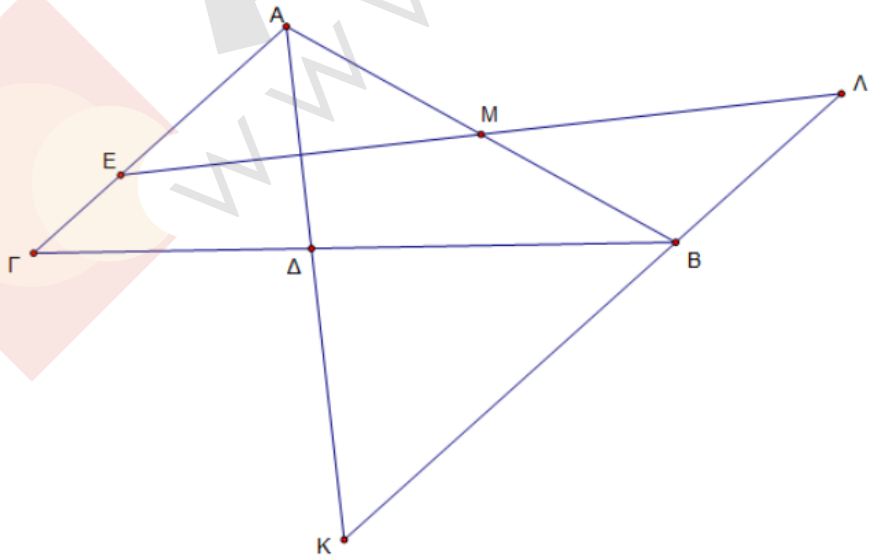
40. Θέμα 1882

Έστω τρίγωνο $\overset{\Delta}{\text{ΑΒΓ}}$, ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας Α και Μ το μέσον της ΑΒ. Η κάθετη από το Μ στην ΑΔ τέμνει το ΑΓ στο Ε. Η παράλληλη από το Β στο ΑΓ τέμνει την προέκταση της ΑΔ στο Κ και την προέκταση της ΕΜ στο Λ

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΕΜ, ΜΒΛ και ΑΒΚ είναι ισοσκελή. (Μονάδες 15)

β) Το τετράπλευρο ΑΛΒΕ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)



ΛΥΣΗ

α) Η ΑΔ είναι ο φορέας του ύψους και της διχοτόμου του τριγώνου ΑΕΜ, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές με ΑΕ=ΑΜ και $A\hat{E}M = A\hat{M}E$ (1).

Επίσης $A\hat{E}M = M\hat{\Lambda}B$ (2) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΓ, ΛΚ που τέμνονται από την ΕΛ και $A\hat{M}E = B\hat{M}\Lambda$ (3) ως κατακορυφήν. Από (1), (2), (3) βρίσκουμε $B\hat{M}\Lambda = M\hat{\Lambda}B$, οπότε το τρίγωνο ΒΜΛ είναι ισοσκελές.

Είναι $\hat{K} = \Gamma\hat{A}\Delta$ (4) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΓ, ΚΛ που τέμνονται από την ΑΚ και $\Gamma\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}B$ (5) γιατί η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$. Από (4), (5) βρίσκουμε $\Delta\hat{A}B = \hat{K}$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΚ είναι ισοσκελές.

β) Από τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΕΜ και ΜΒΛ και επειδή το Μ είναι μέσο του Β, έχουμε ΑΕ=ΑΜ=ΜΒ=ΒΛ. Οπότε ΑΕ=//ΒΛ, άρα το ΑΛΒΕ είναι παραλληλόγραμμο.

41. Θέμα 1890

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι θέσεις στο χάρτη πέντε χωριών Α, Β, Γ, Δ και Ε και οι δρόμοι που τα συνδέουν. Το χωριό Ε ισαπέχει από τα χωριά Β, Γ και επίσης από τα χωριά Α και Δ.

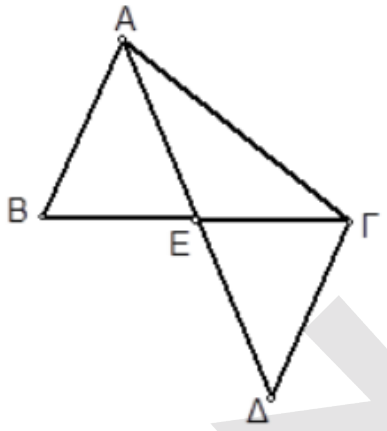
α) Να αποδείξετε ότι:

i. η απόσταση των χωριών Α και Β είναι ίση με την απόσταση των χωριών Γ και Δ. (Μονάδες 5)

ii. αν οι δρόμοι ΑΒ και ΓΔ έχουν δυνατότητα να προεκταθούν, να αποδείξετε ότι αποκλείεται να συναντηθούν. (Μονάδες 5)

iii. τα χωριά Β και Γ ισαπέχουν από τον δρόμο ΑΔ. (Μονάδες 8)

β) Να προσδιορίσετε γεωμετρικά το σημείο του δρόμου ΑΓ που ισαπέχει από τα χωριά Α και Δ. (Μονάδες 7)

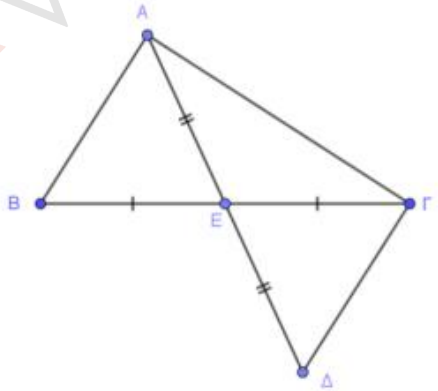


ΛΥΣΗ

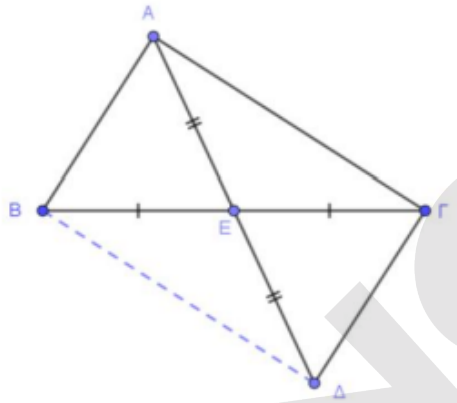
α) i. Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΓΕ έχουν:

- ΕΒ = ΕΓ, από υπόθεση
- ΕΑ = ΕΔ, από υπόθεση,
- $A\hat{E}B = \Delta\hat{E}\Gamma$ ως κατακορυφήν.

Σύμφωνα με το κριτήριο Π – Γ – Π τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε και οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $A\hat{E}B$ και $\Delta\hat{E}\Gamma$ είναι ίσες, δηλαδή ΑΒ = ΓΔ.



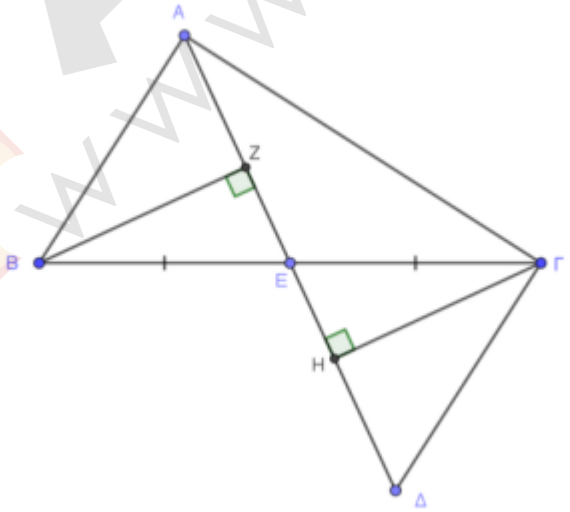
ii. Επειδή ΕΒ = ΕΓ και ΕΑ = ΕΔ, δηλαδή οι διαγώνιοι του ΑΒΔΓ διχοτομούνται, συμπεραίνουμε ότι το ΑΒΔΓ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε ΑΒ//ΓΔ. Άρα αν οι δρόμοι ΑΒ και ΓΔ προεκταθούν, αποκλείεται να συναντηθούν.



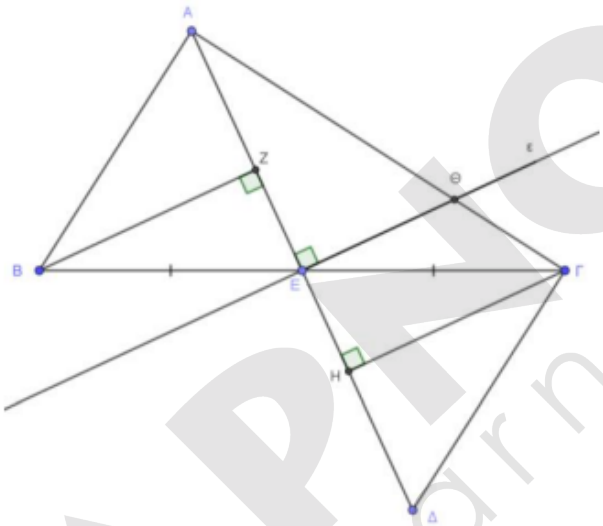
iii. Φέρουμε ΒΖ ⊥ ΑΔ και ΓΗ ⊥ ΑΔ. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΓΕΗ και ΒΕΖ έχουν:

- ΕΓ = ΕΒ, από υπόθεση
- $B\hat{E}Z = \Gamma\hat{E}H$, ως κατακορυφήν

Άρα είναι ίσα οπότε ισχύει ΒΖ = ΓΗ, δηλαδή τα Β, Γ ισαπέχουν από την ΑΔ.



β) Για να ισαπέχει κάποιο σημείο από τα Α και Δ, θα πρέπει να ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΔ. Εφόσον θέλουμε το σημείο αυτό να ανήκει στο δρόμο ΑΓ, θα είναι το σημείο τομής της της ΑΓ με τη μεσοκάθετο του ΑΔ. Οπότε φέρουμε τη μεσοκάθετη ε του ΑΔ και ονομάζουμε Θ το σημείο τομής της με την ΑΓ. Το σημείο Θ ισαπέχει από τα Α, Δ.



42. Θέμα 1891

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ > ΑΔ και οι διχοτόμοι των γωνιών του ΑΡ, ΒΕ, ΓΣ και ΔΤ (όπου Ρ, Ε στην ΔΓ και Σ, Τ στην ΑΒ) τέμνονται στα σημεία Κ, Λ, Μ και Ν όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Να αποδείξετε ότι:

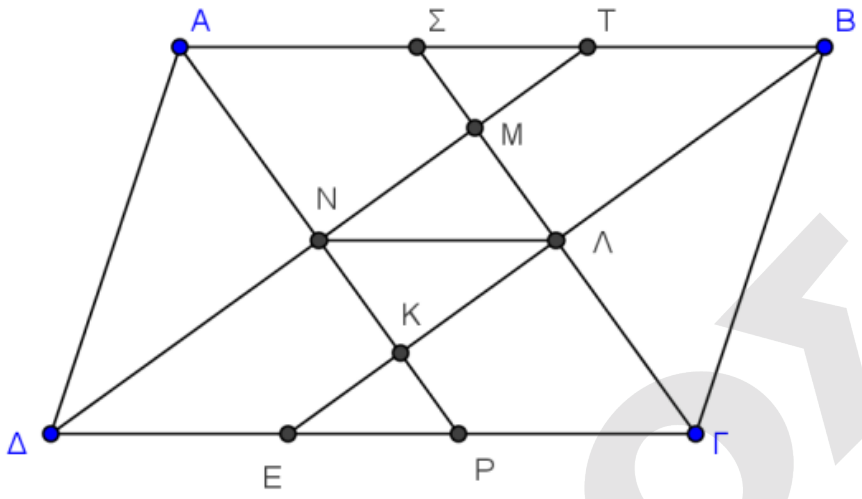
α) το τετράπλευρο ΔΕΒΤ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)

β) το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 8)

γ) ΛΝ // ΑΒ (Μονάδες 5)

δ) ΛΝ = ΑΒ – ΑΔ (Μονάδες 5)

Έξυπνα & εύκολα!



ΛΥΣΗ

α) Τα τρίγωνα ΑΔΤ και ΒΓΕ έχουν:

- $E\hat{B}\Gamma = A\hat{\Delta}T$, ως μισά των απέναντι γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Delta}$ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ
- ΑΔ = ΒΓ, ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ
- $\hat{A} = \hat{\Gamma}$, ως απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ

Σύμφωνα με το κριτήριο Γ – Π – Γ τα τρίγωνα ΑΔΤ και ΒΓΕ είναι ίσα, οπότε έχουν ΔΤ = ΒΕ (1) αφού οι πλευρές αυτές βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Gamma}$.

Επιπλέον, από την προηγούμενη ισότητα τριγώνων προκύπτει ότι ΑΤ = ΕΓ (2).

Επειδή ΑΒ = ΓΔ (ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο) ισχύει:

ΑΒ = ΓΔ ⇔ ΑΤ + ΤΒ = ΔΕ + ΕΓ

η οποία λόγω της (2) γράφεται

ΤΒ = ΔΕ (3).

Από τις (1), (3) προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΔΕΒΤ είναι παραλληλόγραμμο γιατί οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες.

β) Όμοια δείχνουμε ότι το ΑΣΓΡ είναι παραλληλόγραμμο οπότε ΑΡ// ΣΓ και ΝΚ // ΜΛ. Επειδή το ΔΕΒΤ είναι παραλληλόγραμμο, είναι ΜΝ // ΚΛ, οπότε και το ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο.

Είναι $N\hat{\Delta}E = \Sigma\hat{T}M$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΔΓ που τέμνονται από την ΔΤ και

$N\hat{\Delta}E = A\hat{\Delta}N$, διότι η ΔΤ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta}$.

Άρα είναι $\Sigma\hat{T}M = A\hat{\Delta}N$, οπότε το τρίγωνο ΑΔΤ είναι ισοσκελές με βάση την ΔΤ.

Η ΑΝ είναι διχοτόμος του τριγώνου ΑΔΤ, οπότε είναι ύψος και διάμεσός του, δηλαδή $\hat{N} = 90^o$. Τελικά, επειδή το παραλληλόγραμμο ΚΛΜΝ έχει μία γωνία ορθή, είναι ορθογώνιο.

γ) Το τρίγωνο ΑΔΤ είναι ισοσκελές (το αποδείξαμε στο β ερώτημα) οπότε ΑΔ = ΑΤ (4). Άρα η ΑΝ είναι και διάμεσος, οπότε το Ν είναι στο μέσο του ΔΤ. Όμοια προκύπτει ότι στο τρίγωνο ΓΒΕ το Λ είναι στο μέσο του ΒΕ. Από το παραλληλόγραμμο ΔΕΒΤ βρίσκουμε:

$\Delta T // = BE \Leftrightarrow \frac{\Delta T}{2} // = \frac{BE}{2} \Leftrightarrow \Delta N // = E\Lambda$

Άρα το ΔΝΛΕ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Συνεπώς είναι ΛΝ // ΔΕ οπότε και ΝΛ // ΑΒ.

δ) Είναι ΛΝ = ΒΤ = ΑΒ – ΑΤ και λόγω της (4) γίνεται

ΛΝ = ΑΒ – ΑΔ

43. Θέμα 13845

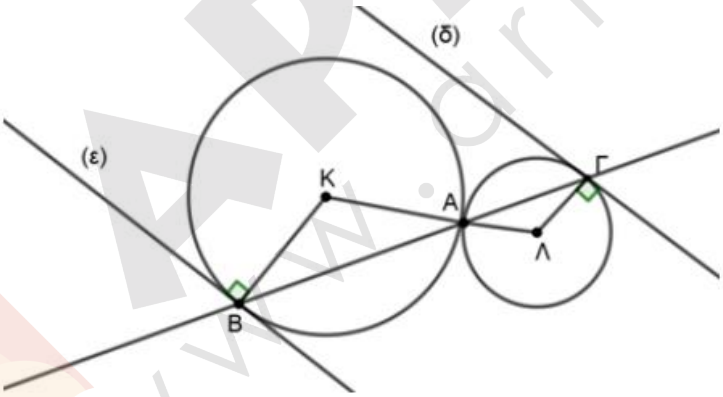
Οι κύκλοι (Κ,R), (Λ,ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Α. Φέρουμε τυχαία ευθεία η οποία διέρχεται από το Α και δεν περνάει από τα κέντρα των κύκλων, τέμνει τους κύκλους αντίστοιχα στα σημεία Β και Γ. Φέρουμε τις εφαπτόμενες (ε) και (δ) στα σημεία Β και Γ.

Να αποδείξετε ότι:

α) $K\hat{B}A = \Lambda\hat{\Gamma}A$. (Μονάδες 8)

β) (ε) // (δ). (Μονάδες 10)

γ) Να εξετάσετε σε ποια περίπτωση το τετράπλευρο ΚΓΛΒ θα είναι παραλληλόγραμμο; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας. (Μονάδες 7)



ΛΥΣΗ

α) Το τρίγωνο ΑΚΒ είναι ισοσκελές με ΚΒ = ΚΑ, ως ακτίνες του κύκλου (Κ,R).

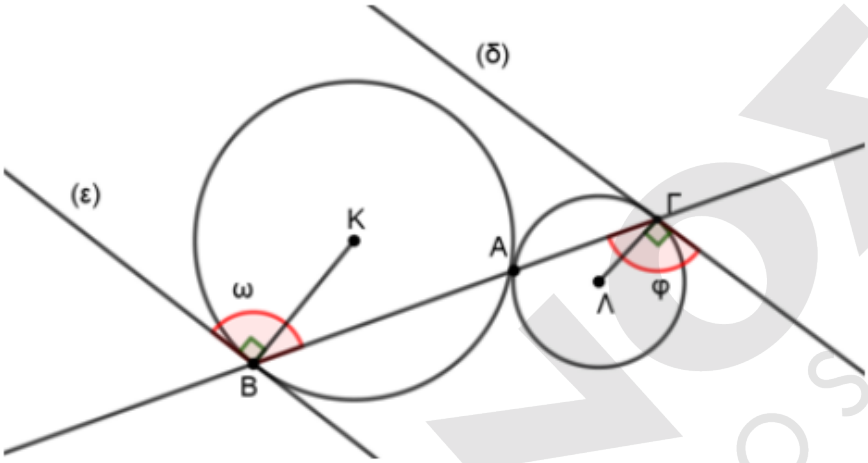
Άρα $K\hat{B}A = K\hat{A}B$ (1).

Το τρίγωνο ΑΛΓ είναι ισοσκελές με ΛΑ = ΛΓ, ως ακτίνες του κύκλου (Λ,ρ).

Άρα $\Lambda\hat{A}\Gamma = \Lambda\hat{\Gamma}A$ (2).

Οι γωνίες ΚΑΒ και ΛΑΓ είναι κατακορυφήν, οπότε είναι ίσες. Άρα από τις σχέσεις (1) και (2), προκύπτει $K\hat{B}A = \Lambda\hat{\Gamma}A$.

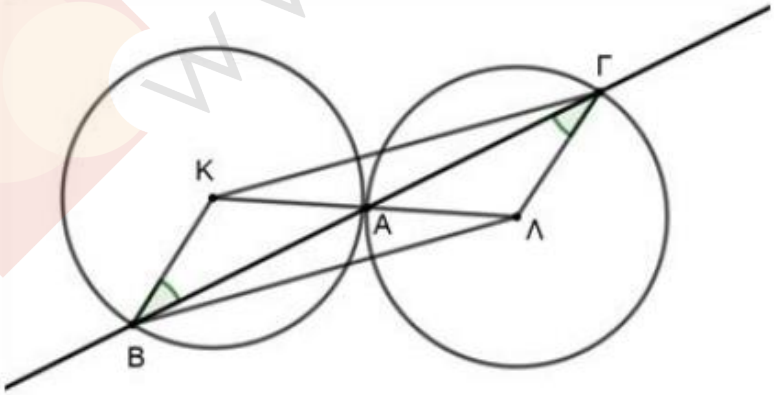
β)



Έστω ω και φ οι γωνίες όπως φαίνονται στο σχήμα. Για τις γωνίες ω, φ έχουμε $\hat{\omega} = 90^\circ + K\hat{B}A$ και $\hat{\phi} = 90^\circ + \Lambda\hat{\Gamma}A$. Από το ερώτημα (α) οι γωνίες ΚΒΑ και ΛΓΑ είναι ίσες, έτσι και οι γωνίες ω, φ είναι ίσες.

Οι ίσες γωνίες ω και φ είναι εντός εναλλάξ των ευθειών (ε) και (δ) που τέμνονται από τη ΒΓ, συνεπώς (ε) // (δ).

γ)



Για να είναι το τετράπλευρο ΚΓΛΒ παραλληλόγραμμο, θα πρέπει οι απέναντι πλευρές του ΚΒ και ΓΛ να είναι ίσες και παράλληλες.

Από το ερώτημα (α) έχουμε ότι οι εντός εναλλάξ γωνίες ΚΒΑ και ΛΓΑ των ΚΒ και ΓΛ που τέμνονται από τη ΒΓ είναι ίσες. Άρα προκύπτει ότι ΚΒ // ΓΛ.

Τα ευθύγραμμα τμήματα ΚΒ και ΓΛ είναι ακτίνες των δύο κύκλων, οπότε για να είναι ίσα θα πρέπει οι κύκλοι να είναι ίσοι μεταξύ τους.

Άρα για να είναι το τετράπλευρο ΚΓΛΒ παραλληλόγραμμο θα πρέπει R = ρ.