

Κεφ. 5.2. - Τράπεζα Θεμάτων 2022 - Γεωμετρία Α' Λυκείου**ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ**

Η Τράπεζα Θεμάτων για τη Γεωμετρία Α' Λυκείου είναι μία μεγάλη «θάλασσα». Εμείς όμως έχουμε φροντίσει για εσένα, συγκεντρώνοντας εκείνα τα θέματα που αποτελούν τη «βάση» της γνώσης και για τα υπόλοιπα. Μελετώντας και κατανοώντας το μοτίβο σκέψης για τα συγκεκριμένα, μπορείς να λύσεις με επιτυχία και τα υπόλοιπα θέματα. Στην ιστοσελίδα μας www.arnos.gr για το Course της Γεωμετρίας, μελετάς και προετοιμάζεσαι με την αναλυτική διδασκαλία σε ασκήσεις και θέματα, στο ύφος της Τράπεζας.

Θέμα 2 - Κωδικοί:**1531, 1533, 1534, 1535, 1538, 1539, 1557, 1559, 1600, 1609, 1610, 1618****1628, 1642, 1644, 1654, 1678, 1687, 1692, 1701, 13755, 13816, 13824****13825, 13829, 13833, 13834****1. Θέμα 1531**

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB=2B\Gamma$. Προεκτείνουμε την πλευρά $A\Delta$ (προς το μέρος του Δ) κατά τμήμα $\Delta E=A\Delta$ και φέρουμε την BE που τέμνει τη $\Delta\Gamma$ στο σημείο H .

Να αποδείξετε ότι:

- α) το τρίγωνο BAE είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)
- β) το $\Delta E\Gamma B$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)
- γ) η AH είναι διάμεσος του BAE τριγώνου. (Μονάδες 9)

Έξυπνα & εύκολα!

2. Θέμα 1533

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, στο οποίο φέρουμε τις διαμέσους του BM και ΓN . Προεκτείνουμε την BM (προς το M) κατά τμήμα $M\Delta=BM$ και την ΓN (προς το N) κατά τμήμα $NE=\Gamma N$.

α) Να αποδείξετε ότι $A\Delta \parallel B\Gamma$ και $AE \parallel B\Gamma$. (Μονάδες 13)

β) Είναι τα σημεία E , A και Δ συνευθειακά; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

3. Θέμα 1534

Δίνεται παραλληλόγραμμα $AB\Gamma\Delta$ και η διαγώνιός του $B\Delta$. Από τις κορυφές A και Γ φέρουμε τις κάθετες AE και ΓZ στη $B\Delta$, που την τέμνουν στα σημεία E και Z αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $\Gamma B Z$ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Gamma Z E$ είναι παραλληλόγραμμα. (Μονάδες 15)

4. Θέμα 1535

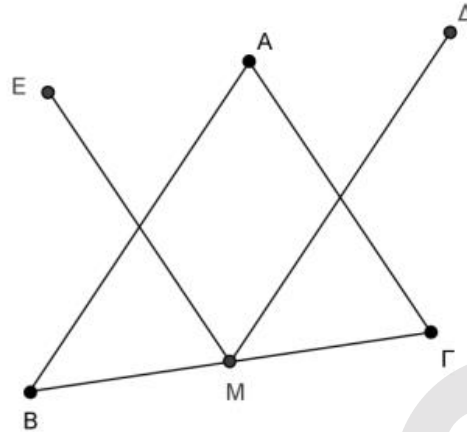
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Από το μέσο M της πλευράς $B\Gamma$, στο ημιεπίπεδο $(B\Gamma, A)$, φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα $M\Delta$ ίσο και παράλληλο προς την πλευρά BA και ευθύγραμμο τμήμα ME ίσο και παράλληλο προς την πλευρά ΓA . Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta A = AE$ (Μονάδες 8)

β) Τα σημεία Δ , A και E βρίσκονται στην ίδια ευθεία. (Μονάδες 9)

γ) $\Delta E = B\Gamma$ (Μονάδες 8)

Έξυπνα & εύκολα!


5. Θέμα 1538

Δίνεται $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμα με $AB=2A\Delta$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{\Delta}$ του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την AB στο E .

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)

β) Είναι το σημείο E μέσο της πλευράς AB ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)

6. Θέμα 1539

Δίνεται παραλληλόγραμμα $AB\Gamma\Delta$ και O το σημείο τομής των διαγωνίων του. Θεωρούμε σημείο E του τμήματος AO και σημείο Z του τμήματος OG , ώστε $OE=OZ$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta E=BZ$ (Μονάδες 12)

β) το ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμα. (Μονάδες 13)

Έξυπνα & εύκολα!

7. Θέμα 1557

Δίνεται παραλληλόγραμμα $AB\Gamma\Delta$ με $AB=2B\Gamma$ και E το μέσο της πλευράς του AB .

Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο EAD είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)
- β) Η DE είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta}$. (Μονάδες 15)

8. Θέμα 1559

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διάμεσός του AM . Στην προέκταση της διαμέσου $M\Delta$ του τριγώνου $AM\Gamma$ (προς το Δ) θεωρούμε σημείο E ώστε $M\Delta=DE$.

Να αποδείξετε ότι:

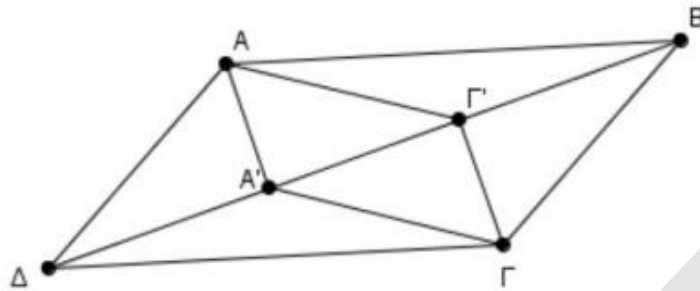
- α) Το τετράπλευρο $AM\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμα. (Μονάδες 12)
- β) Η BE διέρχεται από το μέσο της διαμέσου AM . (Μονάδες 13)

9. Θέμα 1600

Θεωρούμε παραλληλόγραμμα $AB\Gamma\Delta$ και A' , Γ' οι προβολές των κορυφών A και Γ στη διαγώνιο $B\Delta$. Αν τα σημεία A' και Γ' δεν ταυτίζονται, να αποδείξετε ότι:

- α) $AA' // \Gamma\Gamma'$ (Μονάδες 8)
- β) $AA' = \Gamma\Gamma'$ (Μονάδες 10)
- γ) Το τετράπλευρο $A\Gamma'\Gamma A'$ είναι παραλληλόγραμμα. (Μονάδες 7)

Έξυπνα & εύκολα!


10. Θέμα 1609

Θεωρούμε παραλληλόγραμμα $ΑΒΓΔ$. Αν οι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών \hat{A} και \hat{B} τέμνουν τις πλευρές $ΑΒ$ και $ΓΔ$ στα σημεία E και Z αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

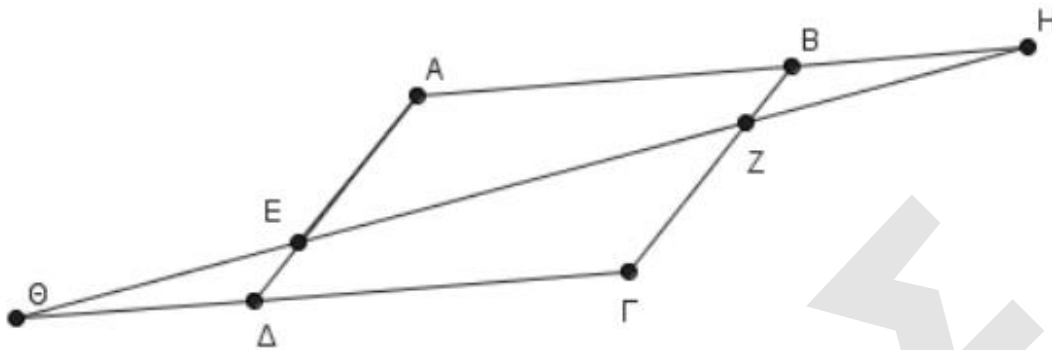
- α) Τα τρίγωνα $ΑΕΔ$ και $ΒΓΖ$ είναι ίσα. (Μονάδες 12)
- β) Το τετράπλευρο $ΔΕΒΖ$ είναι παραλληλόγραμμα. (Μονάδες 13)

11. Θέμα 1610

Στις πλευρές $ΑΔ$ και $ΒΓ$ παραλληλογράμμου $ΑΒΓΔ$ θεωρούμε σημεία E και Z , τέτοια ώστε $ΑΕ=ΓΖ$. Αν η ευθεία $ZΕ$ τέμνει τις προεκτάσεις των πλευρών $ΑΒ$ και $ΓΔ$ στα σημεία H και $Θ$, να αποδείξετε ότι:

- α) $Η\hat{B}Z = E\hat{A}\theta$ (Μονάδες 8)
- β) $Β\hat{Z}H = Δ\hat{E}\theta$ (Μονάδες 8)
- γ) $ΒΗ=ΘΔ$ (Μονάδες 9)

Έξυπνα & εύκολα!

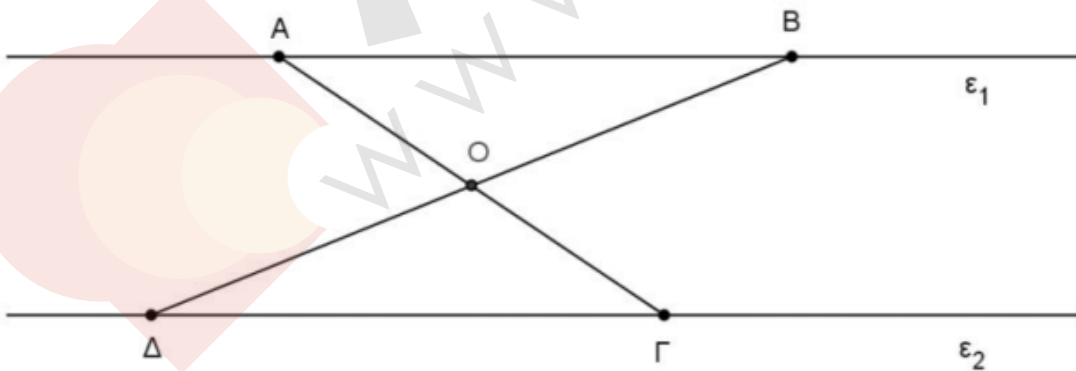

12. Θέμα 1618

Θεωρούμε δύο παράλληλες ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 και τα σημεία Α, Β στην ϵ_1 και Δ και Γ στην ϵ_2 ώστε τα τμήματα ΑΓ και ΒΔ να τέμνονται στο μέσο Ο του ΒΔ.

Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ είναι ίσα και να αναφέρετε τα ίσα κύρια στοιχεία τους αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

β) το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμα. (Μονάδες 13)



Έξυπνα & εύκολα!

13. Θέμα 1628

Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB > B\Gamma$ φέρουμε από τις κορυφές A και Γ καθέτους στη διαγώνιο $B\Delta$, οι οποίες την τέμνουν σε διαφορετικά σημεία E και Z αντίστοιχα.

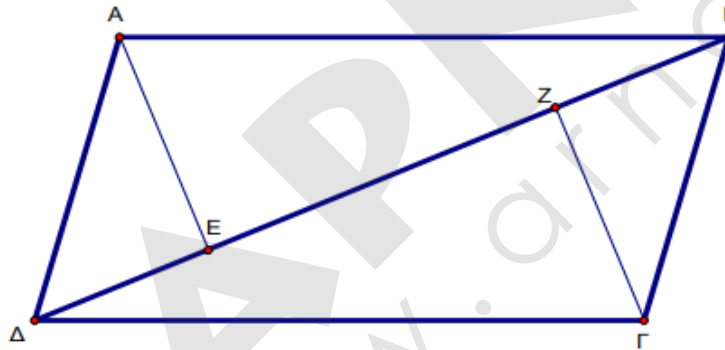
Να αποδείξετε ότι:

α) $AE = \Gamma Z$.

(Μονάδες 15)

β) Το τετράπλευρο $A\epsilon\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμα.

(Μονάδες 10)


14. Θέμα 1642

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ στο οποίο ισχύει $B\Gamma = 2AB$ και έστω M το μέσο της $B\Gamma$. Αν η $A\Delta$ είναι διάμεσος του τριγώνου ABM και E σημείο στην προέκτασή της ώστε $A\Delta = \Delta E$.

Να αποδείξετε ότι:

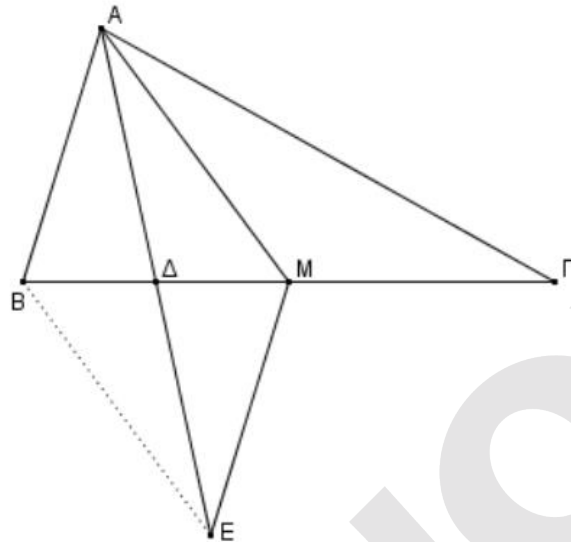
α) Το τετράπλευρο $ABEM$ είναι παραλληλόγραμμα.

(Μονάδες 12)

β) $ME = M\Gamma$

(Μονάδες 13)

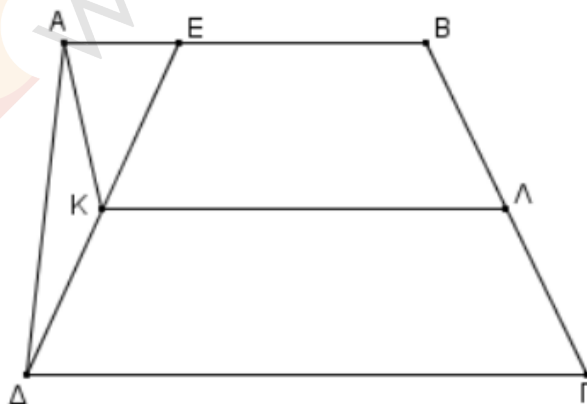
Έξυπνα & εύκολα!


15. Θέμα 1644

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB=3$, $\Gamma\Delta=4$. Θεωρούμε σημείο E στην AB ώστε $AE=1$. Στο τραπέζιο $EB\Gamma\Delta$ θεωρούμε τα K και Λ , μέσα των ED και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε τη διάμεσο $K\Lambda$ του τραpezιου $EB\Gamma\Delta$. (Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμα. (Μονάδες 12)



Έξυπνα & εύκολα!

16. Θέμα 1654

Δίνονται τα παραλληλόγραμμα $AB\Delta\Gamma$ και $B\Delta EZ$.

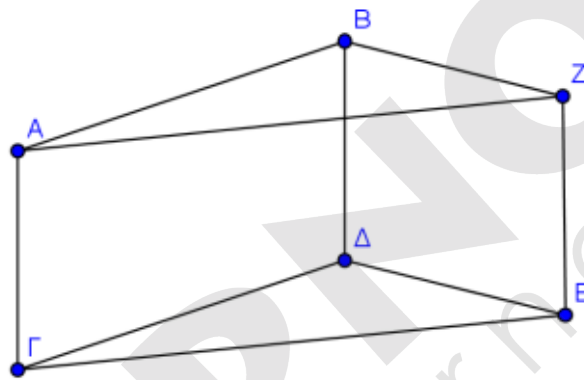
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $A\Gamma EZ$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 13)

β) $\hat{A}\hat{B}Z = \hat{\Gamma}\hat{\Delta}E$.

(Μονάδες 12)


17. Θέμα 1678

Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Θεωρούμε κάθετες ακτίνες OA , OG και εφαπτόμενο στον κύκλο τμήμα AB με $AB = OG$.

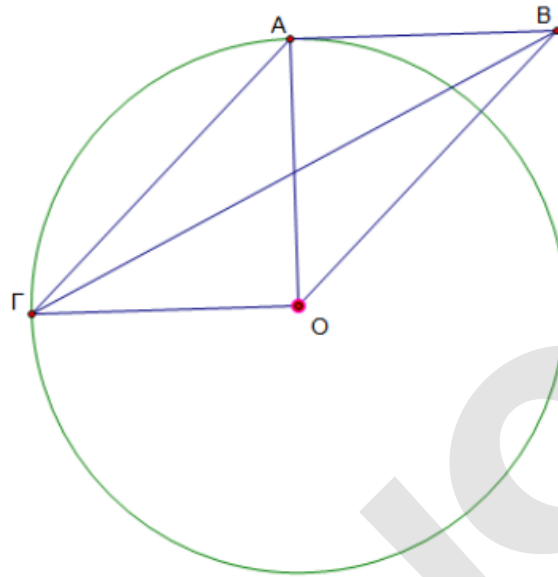
α) Να αποδείξετε ότι τα τμήματα AO και $B\Gamma$ διχοτομούνται.

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου $ABOG$.

(Μονάδες 15)

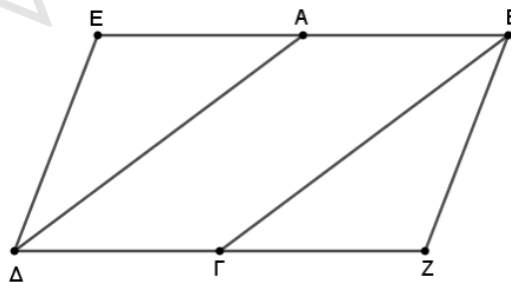
Έξυπνα & εύκολα!


18. Θέμα 1687

Έστω παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΑ (προς το Α) και την πλευρά ΔΓ (προς το Γ) κατά τμήματα $ΑΕ = ΑΒ$ και $ΓΖ = ΔΓ$.

Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΖ είναι ίσα (Μονάδες 13)
- β) Το τετράπλευρο ΕΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμα. (Μονάδες 12)



Έξυπνα & εύκολα!

19. Θέμα 1692

Έστω ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ και τα σημεία N και K των AB και $\Delta\Gamma$ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $AN = K\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα $AN\Delta$ και $B\Gamma K$ είναι ίσα, (Μονάδες 12)

β) το τετράπλευρο $NBK\Delta$ είναι παραλληλόγραμμα. (Μονάδες 13)

20. Θέμα 1701

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και M το μέσο της $B\Gamma$. Προεκτείνουμε τη διάμεσο AM , προς το M , κατά τμήμα $M\Delta = MA$. Από το A φέρουμε παράλληλη προς τη $B\Gamma$ η οποία τέμνει την προέκταση της $\Delta\Gamma$ στο σημείο E .

Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο $AB\Delta\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμα. (Μονάδες 12)

β) $BM = \frac{AE}{2}$. (Μονάδες 13)

21. Θέμα 13755

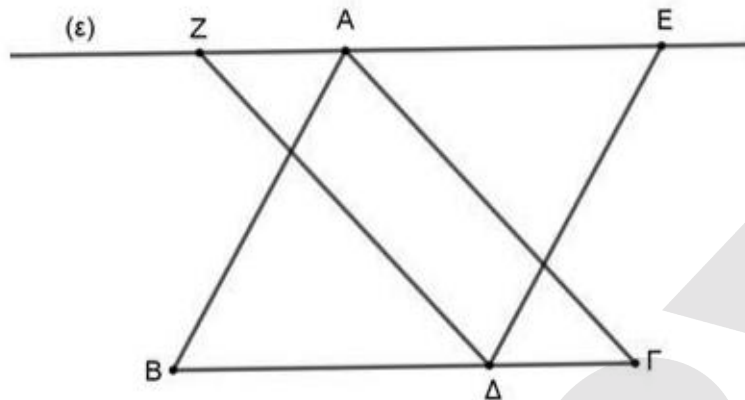
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Από την κορυφή A φέρουμε ευθεία (ϵ) παράλληλη προς τη $B\Gamma$. Από το τυχαίο σημείο Δ της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε τις παράλληλες προς την AB και $A\Gamma$, οι οποίες τέμνουν την ευθεία (ϵ) στα σημεία E και Z αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι :

α) τα τετράπλευρα $Z\Delta\Gamma\Delta$ και $AB\Delta E$ είναι παραλληλόγραμμα. (Μονάδες 10)

β) τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι ίσα. (Μονάδες 15)

Έξυπνα & εύκολα!


22. Θέμα 13816

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ τέτοιο, ώστε $A\Delta < AB$ και M το μέσο της $B\Gamma$.

Προεκτείνουμε την AM προς το M κατά τμήμα $ME = AM$.

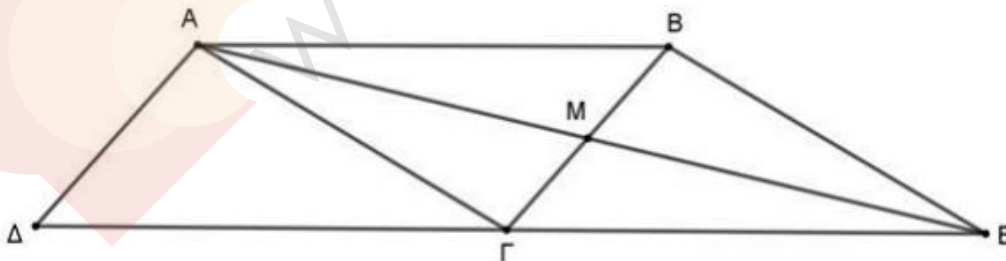
Να αποδείξετε ότι :

α) το τετράπλευρο $ABE\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 10)

β) τα σημεία Δ , Γ και E είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 15)



Έξυπνα & εύκολα!

23. Θέμα 13824

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με βάσεις AB και $\Gamma\Delta$. Αν E και Z τα μέσα των $\Gamma\Delta$ και BE αντίστοιχα και Θ το σημείο τομής της AB και της προέκτασης της ΓZ , να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΓEZ , ΘBZ είναι ίσα.

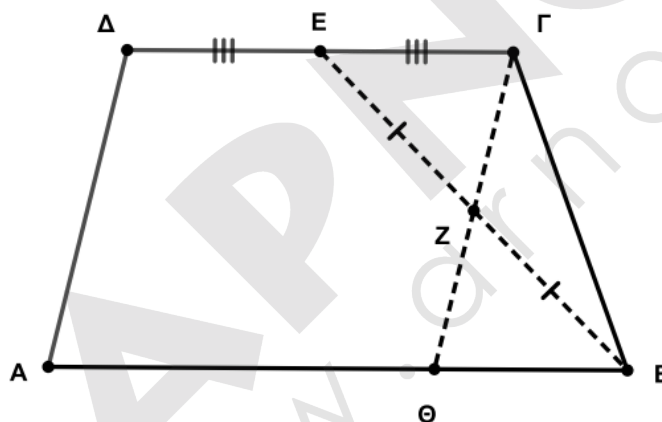
(Μονάδες 13)

β) $E\Gamma = \Theta B$.

(Μονάδες 5)

γ) Το τετράπλευρο $EB\Theta\Delta$ είναι παραλληλόγραμμα.

(Μονάδες 7)


24. Θέμα 13825

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Από το μέσο M της $B\Gamma$ γράφουμε ευθύγραμμο τμήμα $M\Delta$ ίσο και παράλληλο προς την BA και ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα ME ίσο και παράλληλο προς την ΓA (τα σημεία Δ και E βρίσκονται στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από τη $B\Gamma$ και το σημείο A). Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τετράπλευρα $A\Delta MB$ και $A\Gamma ME$ είναι παραλληλόγραμμα.

(Μονάδες 12)

β) $\Delta A = AE$.

(Μονάδες 13)

Έξυπνα & εύκολα!

25. Θέμα 13829

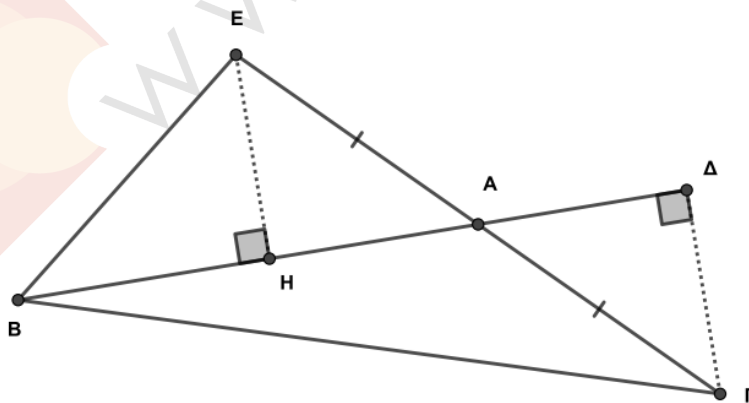
Δίνεται παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$ και O το σημείο τομής των διαγωνίων του. Θεωρούμε τα σημεία E και Z των τμημάτων AO και $ΓO$ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $AE=ΓZ$.

- α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AEΔ$ και $ΓZB$ είναι ίσα. (Μονάδες 12)
 β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ΔEBZ$ είναι παραλληλόγραμμα. (Μονάδες 13)

26. Θέμα 13833

Στο παρακάτω σχήμα το $ΓΔ$ είναι ύψος του τριγώνου $ABΓ$, το EH είναι ύψος του τριγώνου ABE και η BA είναι διάμεσος του τριγώνου $BEΓ$.

- α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $ΑΓΔ$ και AEH είναι ίσα. (Μονάδες 10)
 β) Να αποδείξετε ότι $AH=AD$. (Μονάδες 5)
 γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ΓΔEH$ είναι παραλληλόγραμμα. (Μονάδες 10)



Έξυπνα & εύκολα!

27. Θέμα 13834

Σε τυχαίο τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρουμε τη διάμεσό του AM . Προεκτείνουμε την πλευρά $B\Gamma$ προς το μέρος του B κατά τμήμα $BZ=B\Gamma$ και προς το μέρος του Γ κατά τμήμα $\Gamma H=B\Gamma$, επίσης προεκτείνουμε τη διάμεσο AM κατά τμήμα $ME=AM$.

- α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AMZ και EMH είναι ίσα. (Μονάδες 12)
β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AHEZ$ είναι παραλληλόγραμμα. (Μονάδες 13)

Θέμα 3 - Κωδικοί:

11897

28. Θέμα 11897

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διάμεσος του AM . Στην προέκταση της $A\Gamma$ προς το Γ παίρνουμε τμήμα $\Gamma\Delta = A\Gamma$. Από το Δ φέρνουμε παράλληλη προς την AM που τέμνει την προέκταση της $B\Gamma$ στο E . Να αποδείξετε ότι:

- α) $M\Gamma = \Gamma E$. (Μονάδες 9)
β) Το τετράπλευρο $AM\Delta E$ είναι παραλληλόγραμμα. (Μονάδες 7)
γ) $\widehat{B} + \widehat{B\hat{A}M} = \widehat{\Gamma\hat{E}\Delta}$. (Μονάδες 9)

Έξυπνα & εύκολα!

Θέμα 4 - Κωδικοί:

1709, 1730, 1731, 1746, 1785, 1805, 1810, 1839, 1842, 1857, 1877, 1882

1890, 1891, 13845

29. Θέμα 1709

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, στο οποίο η εξωτερική του γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι διπλάσια της εσωτερικής του γωνίας \hat{A} . Από την κορυφή A διέρχεται ημιευθεία $Ax \parallel B\Gamma$ στο ημιεπίπεδο (AB, Γ) . Στην ημιευθεία Ax θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $A\Delta = B\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

- α) Η $B\Delta$ διέρχεται από το μέσο του τμήματος $A\Gamma$. (Μονάδες 7)
- β) Η $\Gamma\Delta$ είναι διχοτόμος της $\hat{\Gamma}_{\text{εξ}}$. (Μονάδες 9)
- γ) Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

30. Θέμα 1730

Έστω ότι E και Z είναι τα μέσα των πλευρών AB και $\Gamma\Delta$ παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ αντίστοιχα. Αν για το παραλληλόγραμμα $AB\Gamma\Delta$ επιπλέον ισχύει $AB > A\Delta$, να εξετάσετε αν είναι αληθείς ή όχι οι ακόλουθοι ισχυρισμοί:

Ισχυρισμός 1: Το τετράπλευρο ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμα.

Ισχυρισμός 2: $\hat{A\hat{E}\Delta} = \hat{B\hat{Z}\Gamma}$.

Ισχυρισμός 3: Οι ΔE και BZ είναι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών $\hat{\Delta}$ και \hat{B} .

Έξυπνα & εύκολα!

α) Στην περίπτωση που θεωρείτε ότι κάποιος ισχυρισμός είναι αληθής να τον αποδείξετε. (Μονάδες 16)

β) Στην περίπτωση που κάποιος ισχυρισμός δεν είναι αληθής, να βρείτε τη σχέση των διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου ώστε να είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

31. Θέμα 1731

Έστω ότι E και Z είναι τα μέσα των πλευρών AB και $ΓΔ$ παραλληλογράμμου $ABΓΔ$ αντίστοιχα. Αν για το παραλληλόγραμμα $ABΓΔ$ επιπλέον ισχύουν $AB > AD$ και γωνία A αμβλεία, να εξετάσετε αν είναι αληθείς οι ακόλουθοι ισχυρισμοί:

Ισχυρισμός 1: Το τετράπλευρο $ΔEBZ$ είναι παραλληλόγραμμα.

Ισχυρισμός 2: Τα τρίγωνα $AΔE$ και $BΓZ$ είναι ίσα.

Ισχυρισμός 3: Τα τρίγωνα $AΔE$ και $BΓZ$ είναι ισοσκελή.

α) Στην περίπτωση που θεωρείτε ότι κάποιος ισχυρισμός είναι αληθής να τον αποδείξετε. (Μονάδες 16)

β) Στην περίπτωση που κάποιος ισχυρισμός δεν είναι αληθής, να βρείτε τη σχέση των διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου ώστε να είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

Έξυπνα & εύκολα!

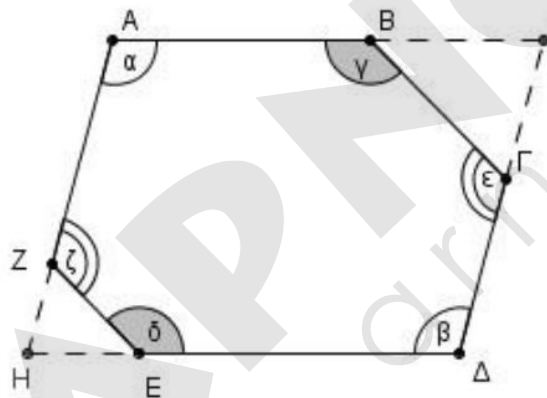
32. Θέμα 1746

Στο κυρτό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ ισχύουν τα εξής: $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$, $\hat{\gamma} = \hat{\delta}$ και $\hat{\epsilon} = \hat{\zeta}$.

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\hat{\alpha} + \hat{\gamma} + \hat{\epsilon}$. (Μονάδες 8)

β) Αν οι πλευρές ΑΖ και ΔΕ προεκτεινόμενες τέμνονται στο Η και οι πλευρές ΑΒ και ΔΓ προεκτεινόμενες τέμνονται στο Θ, να αποδείξετε ότι:

- i. Οι γωνίες Α και Η είναι παραπληρωματικές (Μονάδες 10)
- ii. Το τετράπλευρο ΑΘΔΗ είναι παραλληλόγραμμα. (Μονάδες 7)


33. Θέμα 1785

Δίνεται παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ, με $AB > AD$. Θεωρούμε σημεία Κ, Λ, των ΑΔ και ΑΒ αντίστοιχα ώστε $AK = AL$. Έστω Μ το μέσο του ΚΛ και η προέκταση του ΑΜ (προς το Μ) τέμνει τη ΔΓ στο σημείο Ε.

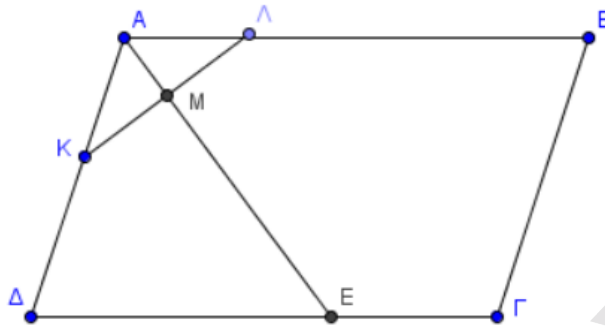
Να αποδείξετε ότι:

α) $AD = DE$. (Μονάδες 8)

β) $BG + GE = AB$. (Μονάδες 10)

γ) $\hat{B} = 2 \cdot \hat{A} \hat{K}$. (Μονάδες 7)

Έξυπνα & εύκολα!


34. Θέμα 1805

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και στην προέκταση της $A\Delta$ θεωρούμε σημείο E τέτοιο ώστε $\Delta E = \Delta\Gamma$ ενώ στην προέκταση της AB θεωρούμε σημείο Z τέτοιο ώστε $BZ = B\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\hat{B}\hat{\Gamma}Z = \hat{\Delta}\hat{\Gamma}E$.

(Μονάδες 10)

ii. τα σημεία Z, Γ, E είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 10)

35. Θέμα 1810

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Από το μέσο M του $B\Gamma$ φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα $M\Delta$ ίσο και παράλληλο με το BA και ευθύγραμμο τμήμα ME ίσο και παράλληλο με το ΓA (τα σημεία Δ και E είναι στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από τη $B\Gamma$ και το σημείο A). Να αποδείξετε ότι:

Έξυπνα & εύκολα!

α) Τα σημεία Δ, Α, Ε είναι συνευθειακά. (Μονάδες 10)

β) Η περίμετρος του τριγώνου ΜΔΕ είναι ίση με την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 9)

γ) Όταν ένας καθηγητής έθεσε στους μαθητές του το ερώτημα αν τα σημεία Δ, Α, Ε είναι συνευθειακά, ένας από αυτούς έκανε το παρακάτω σχήμα και απάντησε ως εξής:

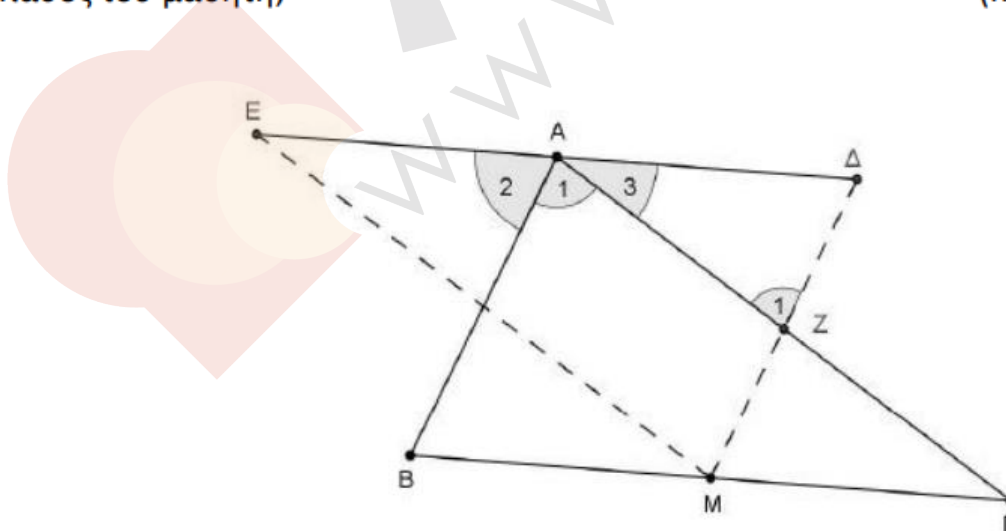
$$\hat{Z}_1 = \hat{A}_1 \text{ (εντός εναλλάξ των } AB // M\Delta \text{ που τέμνονται από } AZ)$$

$$A\hat{\Delta}Z = \hat{A}_2 \text{ (εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των } AB // M\Delta \text{ που τέμνονται από } \Delta E)$$

Όμως $\hat{Z}_1 + \hat{A}_3 + A\hat{\Delta}Z = 180^\circ$ (άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΔΖ). Άρα σύμφωνα

με τα προηγούμενα έχουμε: $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 180^\circ$. Οπότε Δ, Ε, Α συνευθειακά.

Όμως ο καθηγητής είπε ότι υπάρχει λάθος στο συλλογισμό. Μπορείτε να εντοπίσετε το λάθος του μαθητή; (Μονάδες 6)



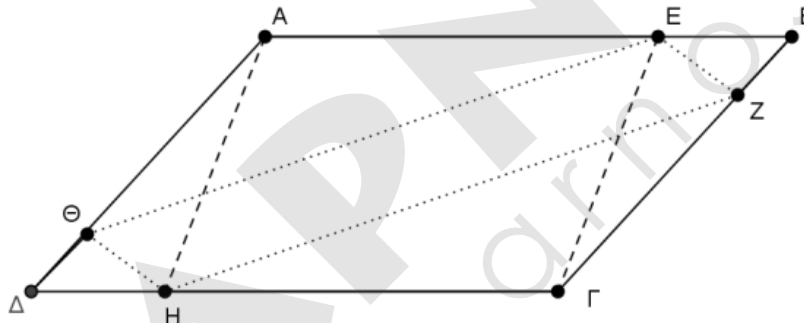
Έξυπνα & εύκολα!

36. Θέμα 1839

Σε παραλληλόγραμμα $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε σημεία E, Z, H, Θ στις πλευρές $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ αντίστοιχα, με $AE=\Gamma H$ και $BZ=\Delta\Theta$.

Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο $A\epsilon\Gamma H$ είναι παραλληλόγραμμα. (6 μονάδες)
- β) Το τετράπλευρο $EZH\Theta$ είναι παραλληλόγραμμα. (10 μονάδες)
- γ) Τα τμήματα $A\Gamma, B\Delta, EH$ και $Z\Theta$ διέρχονται από το ίδιο σημείο. (9 μονάδες)



37. Θέμα 1842

Δίνεται παραλληλόγραμμα $AB\Gamma\Delta$. Στην προέκταση της πλευράς AB παίρνουμε τμήμα $BE=AB$ και στην προέκταση της πλευράς $A\Delta$ τμήμα $\Delta Z=A\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. Τα τετράπλευρα $B\Delta\Gamma E$ και $B\Delta Z\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμα. (Μονάδες 7)
- ii. Τα σημεία E, Γ και Z είναι συνευθειακά. (Μονάδες 9)

β) Αν K και Λ είναι τα μέσα των BE και ΔZ αντίστοιχα, τότε $K\Lambda // \Delta B$ και $K\Lambda = \frac{3}{2}\Delta B$.

(Μονάδες 9)

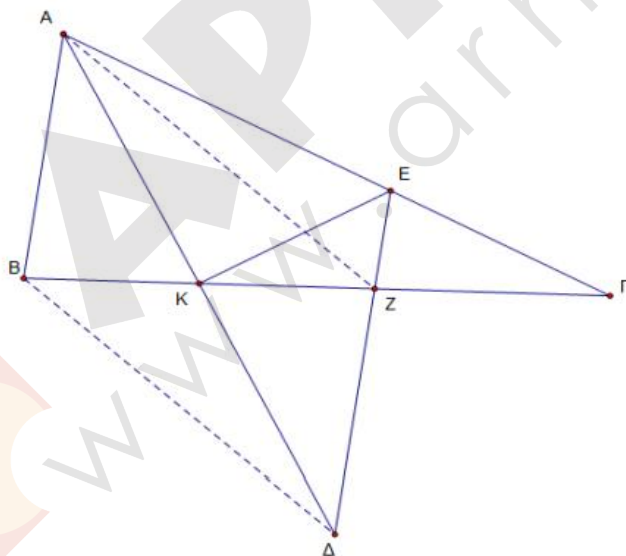
Έξυπνα & εύκολα!

38. Θέμα 1857

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB < A\Gamma$), με AK διχοτόμο της γωνίας A . Στην προέκταση της AK θεωρούμε σημείο Δ ώστε $AK = K\Delta$. Η παράλληλη από το Δ προς την AB τέμνει τις $A\Gamma$ και $B\Gamma$ στα E και Z αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο $AE\Delta$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)
- β) Η EK είναι μεσοκάθετος της AD . (Μονάδες 6)
- γ) Τα τρίγωνα AKB και $K\Delta Z$ είναι ίσα. (Μονάδες 7)
- δ) Το τετράπλευρο $AZ\Delta B$ είναι παραλληλόγραμμα. (Μονάδες 6)



Έξυπνα & εύκολα!

39. Θέμα 1877

Έστω παραλληλόγραμμα $AB\Gamma\Delta$ με O το σημείο τομής των διαγωνίων του και K το μέσο του $\Gamma\Delta$. Προεκτείνουμε το τμήμα OK κατά τμήμα $KZ = KO$. Η BZ τέμνει τη διαγώνιο $A\Gamma$ στο Θ .

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τμήματα OG και BZ διχοτομούνται.

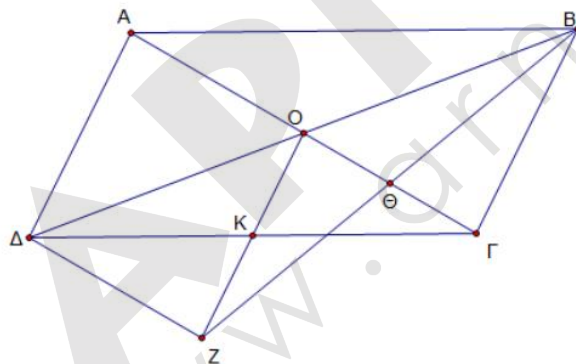
(Μονάδες 8)

β) $AO = \Delta Z$.

(Μονάδες 9)

γ) Τα τρίγωνα $\triangle AOB$ και $\triangle Z\Gamma$ είναι ίσα.

(Μονάδες 8)


40. Θέμα 1882

Έστω τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$, $\Delta\Delta$ η διχοτόμος της γωνίας A και M το μέσον της AB . Η κάθετη από το M στην $\Delta\Delta$ τέμνει το $A\Gamma$ στο E . Η παράλληλη από το B στο $\Delta\Delta$ τέμνει την προέκταση της $\Delta\Delta$ στο K και την προέκταση της EM στο Λ .

Να αποδείξετε ότι:

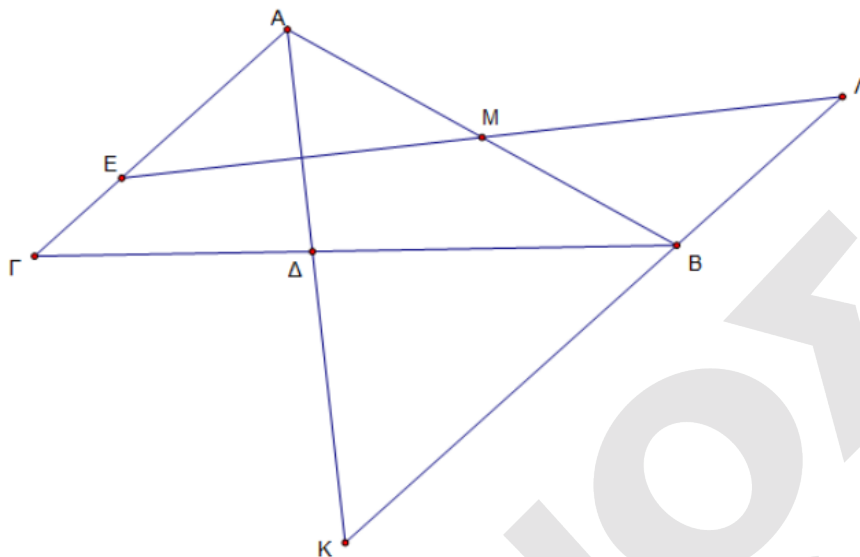
α) Τα τρίγωνα AEM , $M\Lambda B$ και ABK είναι ισοσκελή.

(Μονάδες 15)

β) Το τετράπλευρο $A\Lambda B E$ είναι παραλληλόγραμμα.

(Μονάδες 10)

Έξυπνα & εύκολα!


41. Θέμα 1890

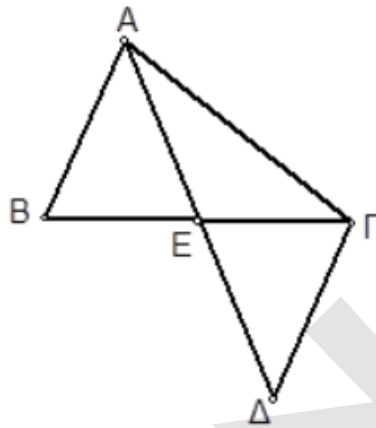
Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι θέσεις στο χάρτη πέντε χωριών A , B , Γ , Δ και E και οι δρόμοι που τα συνδέουν. Το χωριό E ισαπέχει από τα χωριά B , Γ και επίσης από τα χωριά A και Δ .

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. η απόσταση των χωριών A και B είναι ίση με την απόσταση των χωριών Γ και Δ . (Μονάδες 5)
- ii. αν οι δρόμοι AB και $\Gamma\Delta$ έχουν δυνατότητα να προεκταθούν, να αποδείξετε ότι αποκλείεται να συναντηθούν. (Μονάδες 5)
- iii. τα χωριά B και Γ ισαπέχουν από τον δρόμο $A\Delta$. (Μονάδες 8)

Έξυπνα & εύκολα!

β) Να προσδιορίσετε γεωμετρικά το σημείο του δρόμου ΑΓ που ισαπέχει από τα χωριά Α και Δ. (Μονάδες 7)

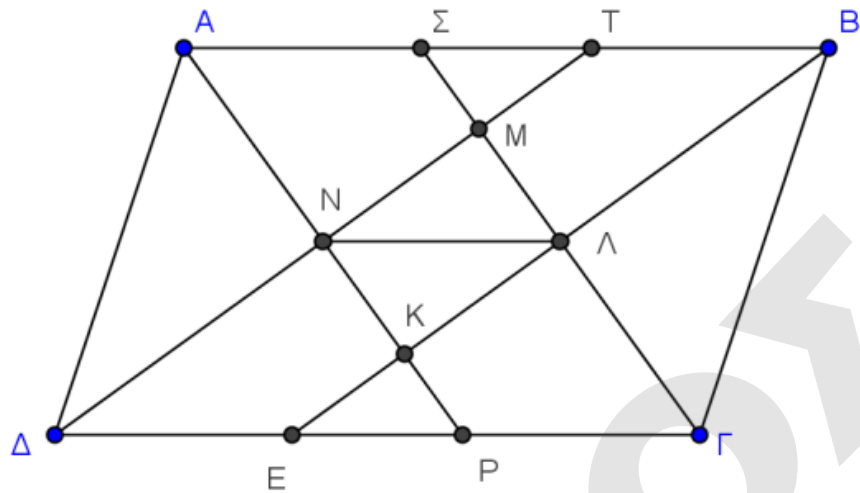

42. Θέμα 1891

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $AB > AD$ και οι διχοτόμοι των γωνιών του ΑΡ, ΒΕ, ΓΣ και ΔΤ (όπου Ρ, Ε στην ΔΓ και Σ, Τ στην ΑΒ) τέμνονται στα σημεία Κ, Λ, Μ και Ν όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Να αποδείξετε ότι:

- | | |
|---|-------------|
| α) το τετράπλευρο ΔΕΒΤ είναι παραλληλόγραμμο. | (Μονάδες 7) |
| β) το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ορθογώνιο. | (Μονάδες 8) |
| γ) $ΛΝ // AB$ | (Μονάδες 5) |
| δ) $ΛΝ = AB - AD$ | (Μονάδες 5) |

Έξυπνα & εύκολα!


43. Θέμα 13845

Οι κύκλοι (K,R) , (Λ,r) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο A . Φέρουμε τυχαία ευθεία η οποία διέρχεται από το A και δεν περνάει από τα κέντρα των κύκλων, τέμνει τους κύκλους αντίστοιχα στα σημεία B και Γ . Φέρουμε τις εφαπτόμενες (ϵ) και (δ) στα σημεία B και Γ .

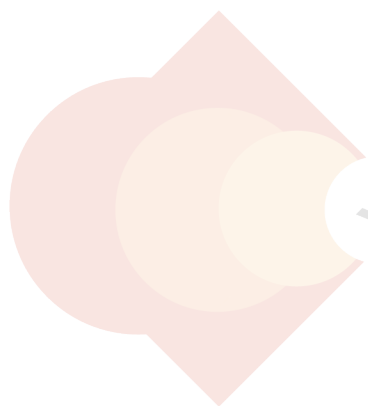
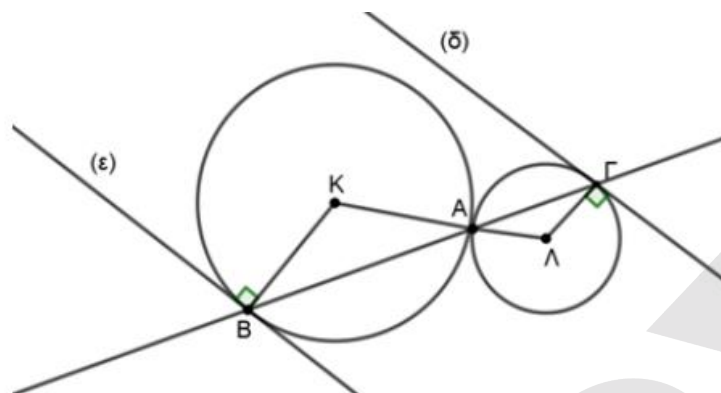
Να αποδείξετε ότι:

α) $\widehat{K\hat{B}A} = \widehat{\Lambda\hat{\Gamma}A}$. (Μονάδες 8)

β) $(\epsilon) \parallel (\delta)$. (Μονάδες 10)

γ) Να εξετάσετε σε ποια περίπτωση το τετράπλευρο $K\Gamma\Lambda B$ θα είναι παραλληλόγραμμα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

Έξυπνα & εύκολα!



www.arnos.gr

Έξυπνα & εύκολα!