Κεφ. 5.11. - Τράπεζα Θεμάτων 2022 - Γεωμετρία Α' Λυκείου

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ & ΛΥΣΕΙΣ

Η Τράπεζα Θεμάτων για τη Γεωμετρία Α' Λυκείου είναι μία μεγάλη «θάλασσα». Εμείς όμως έχουμε φροντίσει για εσένα, συγκεντρώνοντας εκείνα τα θέματα που αποτελούν τη «βάση» της γνώσης και για τα υπόλοιπα. Μελετώντας και κατανοώντας το μοτίβο σκέψης για τα συγκεκριμένα, μπορείς να λύσεις με επιτυχία και τα υπόλοιπα θέματα. Στην ιστοσελίδα μας www.arnos.gr για το Course της Γεωμετρίας, μελετάς και προετοιμάζεσαι με την αναλυτική διδασκαλία σε ασκήσεις και θέματα, στο ύφος της Τράπεζας.

Θέμα 2 - Κωδικοί:

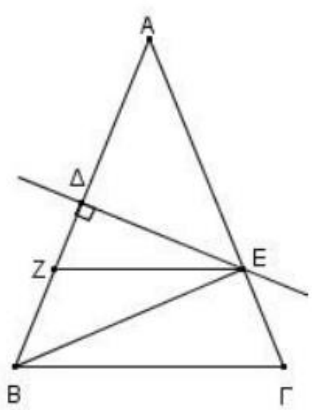
1529, 1550, 1579, 1629, 1634, 1669, 1694, 13497

1. Θέμα 1529

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) με $\hat{A}<90°$. Στο μέσο Δ της πλευράς ΑΒ φέρουμε κάθετη ευθεία που τέμνει την ΑΓ στο Ε. Από το Ε φέρουμε ευθεία παράλληλη στη βάση ΒΓ που τέμνει την ΑΒ στο Ζ.

α) Να αποδείξετε ότι ΑΕ= ΒΕ. (Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΕΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 10)



ΛΥΣΗ

α) Αφού Δ μέσο της ΑΒ και η ΔΕ είναι ευθεία κάθετη στην ΑΒ στο Δ, τότε το ΕΔ είναι διάμεσος και ύψος, οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΒ, άρα είναι ΑΕ = ΒΕ.

β) Επειδή ΖΕ // ΒΓ και οι πλευρές ΒΖ και ΓΕ ως τμήματα των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ τέμνονται στο Α, το ΒΓΕΖ είναι τραπέζιο. Επίσης ισχύει ότι $A\hat{B}\Gamma = \hat{\Gamma}$, ως γωνίες προσκείμενες στη βάση ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ. Άρα το τραπέζιο ΒΓΕΖ είναι ισοσκελές.

2. Θέμα 1550

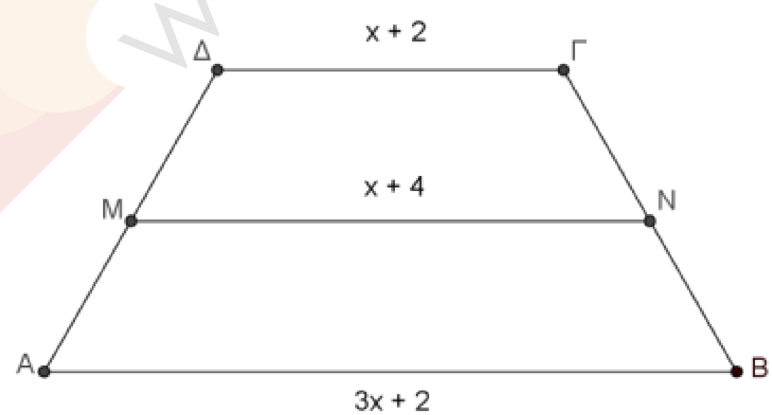
Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB \parallel \Gamma\Delta$, $AB > \Gamma\Delta$ και $A\Delta = B\Gamma$.

α) Αν τα μήκη των βάσεων είναι $AB = 3x + 2$, $\Gamma\Delta = x + 2$ και το μήκος της διαμέσου του τραπεζίου είναι $MN = x + 4$, τότε να δείξετε ότι $x = 2$.

(Μονάδες 12)

β) Αν η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι διπλάσια της γωνίας $\hat{B}$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπεζίου.

(Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ

α) Η ΜΝ είναι διάμεσος στο ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ, οπότε η ΜΝ θα ισούται με το ημιάθροισμα των βάσεων ΑΒ και ΓΔ του τραπεζίου, δηλαδή ΜΝ = $\frac{\text{ΑΒ}+\text{ΓΔ}}{2}$ (1)

Η σχέση (1) με βάση τα δεδομένα γίνεται:

$x + 4 = \frac{3x+2+x+2}{2} \Leftrightarrow x + 4 = \frac{4x+4}{2} \Leftrightarrow x + 4 = 2x + 2 \Leftrightarrow x = 2$

β) Για τις γωνίες του τραπεζίου ΑΒΓΔ ισχύει $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 360^o$.

Αφού το τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές, τότε οι γωνίες που πρόσκεινται στις βάσεις του ΑΒ και ΓΔ θα είναι ίσες, δηλαδή $\hat{A} = \hat{B}$ και $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$.

Οπότε η σχέση του αθροίσματος των γωνιών του τραπεζίου ΑΒΓΔ γίνεται

$2\hat{B} + 2\hat{\Gamma} = 360^o$ ή $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o$ και αφού από την υπόθεση είναι $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ τότε

$2\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 180^o$ ή $3\hat{\Gamma} = 180^o$, άρα $\hat{\Gamma} = 60^o$.

Όμως είναι $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$, άρα θα είναι και $\hat{\Delta} = 60^o$.

Αφού από την υπόθεση ισχύει ότι $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$, τότε θα είναι $\hat{B} = 2 \cdot 60^o = 120^o$.

Όμως $\hat{A} = \hat{B}$, τότε θα είναι $\hat{A} = 120^o$.

3. Θέμα 1579

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ//ΓΔ και ΑΒ<ΓΔ. Θεωρούμε τα σημεία Ε και Ζ πάνω στην ΑΒ έτσι ώστε ΑΕ=ΕΖ=ΖΒ και έστω Κ το σημείο τομής των ΔΖ και ΓΕ. Να αποδείξετε ότι:

α) ΔΖ=ΓΕ (Μονάδες 13)

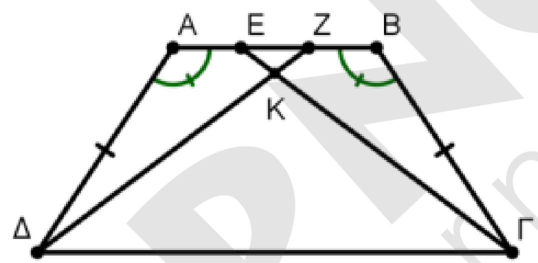
β) Τα τρίγωνα ΕΚΖ και ΔΚΓ είναι ισοσκελή (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΕΒΓ έχουν:

- ΑΖ = ΒΕ, διότι ΑΖ = ΑΕ + ΕΖ = ΖΒ + ΕΖ = ΕΒ
- ΑΔ = ΒΓ, διότι ΑΒΓΔ ισοσκελές τραπέζιο
- $\widehat{A} = \widehat{B}$, ως γωνίες βάσης ισοσκελούς τραπεζίου

Σύμφωνα με το κριτήριο Π – Γ – Π τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΕΒΓ είναι ίσα, οπότε έχουν ίσες και τις πλευρές που είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{B}$, δηλαδή ΔΖ = ΓΕ (1).



β) Από την ισότητα των τριγώνων ΑΔΖ και ΕΒΓ, έχουμε ότι και οι αντίστοιχες γωνίες τους $K\hat{E}Z$ και $K\hat{Z}E$ θα είναι ίσες, δηλαδή $K\hat{E}Z = K\hat{Z}E$.

Οπότε το τρίγωνο ΚΕΖ είναι ισοσκελές και ισχύει ότι ΚΖ = ΚΕ (2).

Αφαιρούμε κατά μέλη τις (1), (2) και παίρνουμε:

ΔΖ – ΚΖ = ΓΕ – ΚΕ, δηλαδή ΚΔ = ΚΓ

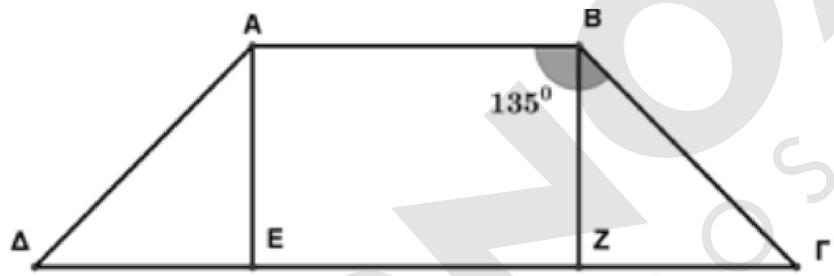
Οπότε το τρίγωνο ΔΚΓ είναι ισοσκελές.

4. Θέμα 1629

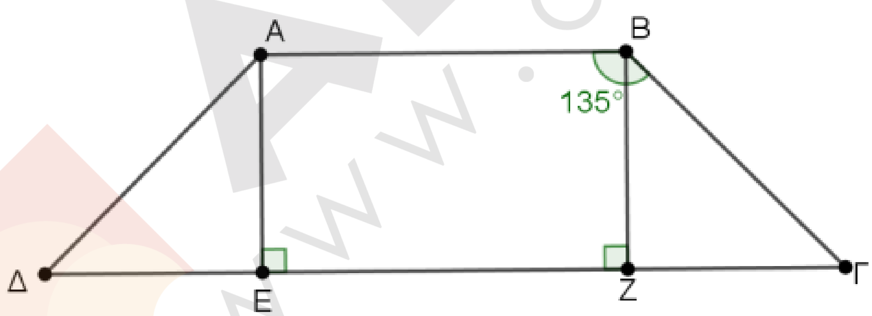
Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΓΔ>ΑΒ και $\hat{B} = 135^o$. Από τις κορυφές Α και Β φέρουμε τα ύψη του ΑΕ και ΒΖ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπεζίου. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι ΑΕ=ΕΔ=ΒΖ=ΓΖ (Μονάδες 15)



ΛΥΣΗ



α) Το τραπέζιο είναι ισοσκελές, άρα οι γωνίες κάθε βάσης του είναι ίσες.

Επομένως $B\hat{A}\Delta = A\hat{B}\Gamma = 135^o$.

Οι $A\hat{B}\Gamma$ και $B\hat{\Gamma}\Delta$ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΒΓ, άρα είναι παραπληρωματικές, δηλαδή:

$$A\hat{B}\Gamma + B\hat{\Gamma}\Delta = 180^o \Leftrightarrow 135^o + B\hat{\Gamma}\Delta = 180^o \Leftrightarrow B\hat{\Gamma}\Delta = 45^o$$

Επιπλέον, $A\hat{\Delta}\Gamma = B\hat{\Gamma}\Delta$ ως γωνίες προσκείμενες στη βάση ΓΔ του ισοσκελούς τραπεζίου ΑΒΓΔ. Άρα $A\hat{\Delta}\Gamma = 45^o$.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΖΓ είναι $\hat{\Gamma} = 45^o$ οπότε από το άθροισμα των γωνιών του βρίσκουμε:

$$Z\hat{B}\Gamma + \hat{\Gamma} = 90^o \Leftrightarrow Z\hat{B}\Gamma + 45^o = 90^o \Leftrightarrow Z\hat{B}\Gamma = 45^o$$

Οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές με ΒΖ = ΖΓ (1).

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΔ είναι $\hat{\Delta} = 45^o$ και από το άθροισμα των γωνιών του βρίσκουμε:

$$\Delta\hat{A}E + \hat{\Delta} = 90^o \Leftrightarrow \Delta\hat{A}E + 45^o = 90^o \Leftrightarrow \Delta\hat{A}E = 45^o$$

Οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές και έχει ΑΕ = ΕΔ (2).

Επίσης τα ύψη του τραπεζίου είναι ίσα, οπότε ΑΕ = ΒΖ (3).

Από (1), (2) και (3) έχουμε ΑΕ = ΕΔ = ΒΖ = ΓΖ.

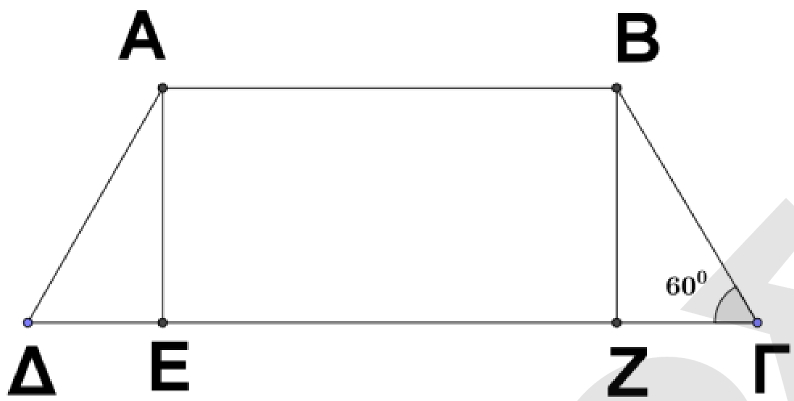
5. Θέμα 1634

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) , με ΑΒ=6, ΒΓ=4 και $\hat{\Gamma} = 60^0$. Δίνονται επίσης τα ύψη ΑΕ και ΒΖ από τις κορυφές Α και Β αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε τις υπόλοιπες γωνίες του τραπεζίου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε τα τρίγωνα ΑΕΔ, ΒΖΓ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του ΑΒΓΔ. (Μονάδες 9)



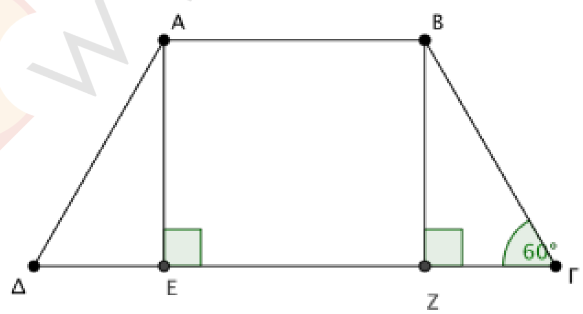
ΛΥΣΗ

α) Οι γωνίες της βάσης του ισοσκελούς τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι ίσες, άρα $\widehat{\Delta} = \widehat{\Gamma} = 60^o$.

Οι γωνίες $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΒΓ, άρα είναι παραπληρωματικές, δηλαδή:

$\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow \widehat{B} + 60^o = 180^o \Leftrightarrow \widehat{B} = 120^o$.

Άρα και $\widehat{A} = \widehat{B} = 120^o$ ως γωνίες στη βάση ΑΒ του ισοσκελούς τραπεζίου ΑΒΓΔ.



β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΖΓ έχουν:

ΑΔ = ΒΓ, διότι το τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΓΔ) είναι ισοσκελές

$\hat{\Delta} = \hat{\Gamma} = 60^o$

Άρα τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΖΓ είναι ίσα επειδή έχουν ίσες υποτείνουσες και προσκείμενες σ' αυτές οξείες γωνίες ίσες.

γ) Είναι $\hat{B} = 120^0$ και $A\hat{B}Z = 90^0$, άρα $Z\hat{B}\Gamma = \hat{B} - A\hat{B}Z = 30^0$.

Τότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΖΓ ισχύει ότι: $Z\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

Επειδή, τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΖΓ είναι ίσα, έχουν και ΔΕ = ΖΓ = 2.

Το τετράπλευρο ΑΒΖΕ είναι ορθογώνιο διότι οι γωνίες Ε και Ζ είναι ορθές και $E\hat{A}B = 90^0$ διότι οι γωνίες Ε και ΕΑΒ είναι παραπληρωματικές ως εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ και ΔΓ που τέμνονται από την ΑΕ.

Επομένως ισχύει ότι ΕΖ = ΑΒ = 6.

Οπότε: ΔΓ = ΔΕ + ΕΖ + ΖΓ = 2 + 6 + 2 = 10.

Η περίμετρος του ΑΒΓΔ είναι:

Π = ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΑ = 6 + 4 + 10 + 4 = 24.

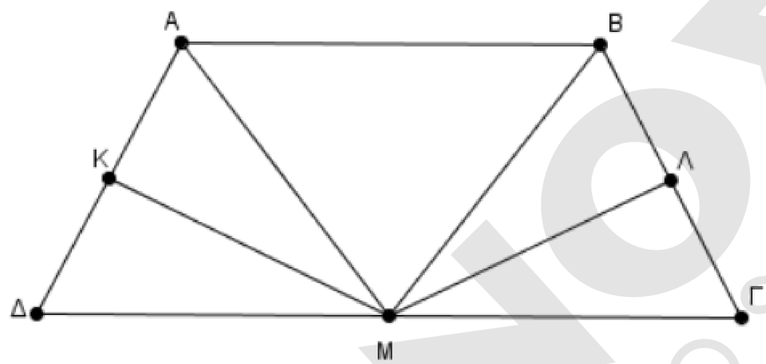
6. Θέμα 1669

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ, το σημείο Μ είναι το μέσο της πλευράς ΔΓ και τα σημεία Κ και Λ είναι τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών του ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τμήματα ΚΜ και ΛΜ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) Τα τμήματα ΑΜ και ΒΜ είναι ίσα. (Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ

α) Τα τρίγωνα ΚΔΜ και ΛΜΓ έχουν:

- ΔΜ = ΜΓ διότι Μ μέσο της ΓΔ
- ΚΔ = ΛΓ ως μισά των ίσων πλευρών ΑΔ και ΒΓ
- $\widehat{\Delta} = \widehat{\Gamma}$ ως γωνίες βάσης του ισοσκελούς τραπεζίου.

Σύμφωνα με το κριτήριο Π – Γ – Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και ΚΜ = ΛΜ ως απέναντι πλευρές από τις ίσες γωνίες $\widehat{\Delta}$ και $\widehat{\Gamma}$.

β) Τα τρίγωνα ΑΔΜ και ΜΒΓ έχουν:

- ΜΔ = ΜΓ
- $\widehat{\Delta} = \widehat{\Gamma}$
- ΑΔ = ΒΓ

Σύμφωνα με το κριτήριο Π – Γ – Π τα τρίγωνα ΑΔΜ και ΜΒΓ είναι ίσα, οπότε ισχύει ΑΜ = ΒΜ ως απέναντι πλευρές από τις ίσες γωνίες $\widehat{\Delta}$ και $\widehat{\Gamma}$.

7. Θέμα 1694

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΑΒ=8 και ΔΓ=12. Αν ΑΗ και ΒΘ τα ύψη του τραπεζίου,

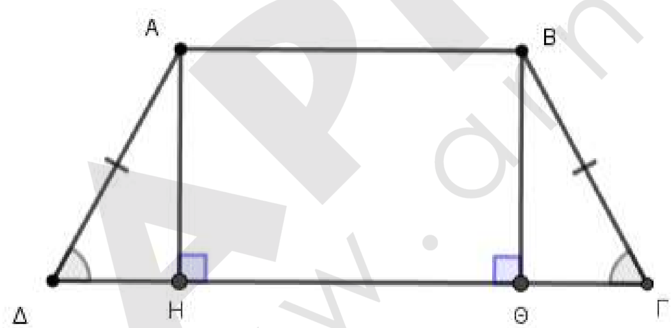
α) να αποδείξετε ότι ΔΗ = ΘΓ. (Μονάδες 12)

β) να υπολογίσετε τη διάμεσο του τραπεζίου. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

Έστω ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) και ΑΗ, ΒΘ τα ύψη του.

α)



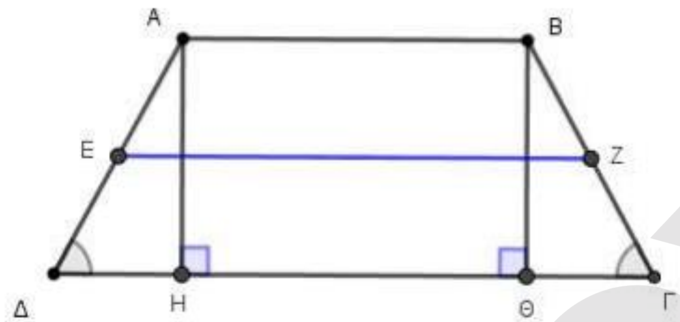
Επειδή ΑΗ και ΒΘ είναι ύψη τραπεζίου είναι ΑΗ ⊥ ΔΓ και ΒΘ ⊥ ΔΓ.

Οπότε, τα τρίγωνα ΑΗΔ και ΒΘΓ είναι ορθογώνια με $A\hat{H}\Delta = B\hat{\Theta}\Gamma = 90^0$ και έχουν:

- $A\Delta = B\Gamma$, ως πλευρές (μη παράλληλες) του ισοσκελούς τραπεζίου.
- $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$, ως γωνίες προσκείμενες σε βάση ισοσκελούς τραπεζίου.

Άρα, τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΗΔ και ΒΘΓ είναι ίσα γιατί έχουν την υποτείνουσα και την προσκείμενη σε αυτήν γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία, οπότε και ΔΗ = ΘΓ.

β)



Έστω ΕΖ η διάμεσος του τραπεζίου, τότε η ΕΖ θα ισούται με το ημιάθροισμα των βάσεων του τραπεζίου, δηλαδή $\mathrm{EZ} = \dfrac{\mathrm{AB}+\Gamma\Delta}{2}$.

Οπότε, $\mathrm{EZ} = \dfrac{8+12}{2} = \dfrac{20}{2} = 10$.

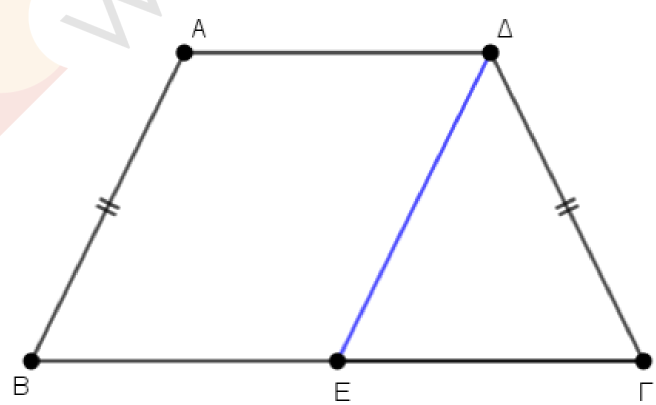
8. Θέμα 13497

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΔ//ΒΓ) με ΒΓ > ΔΓ.

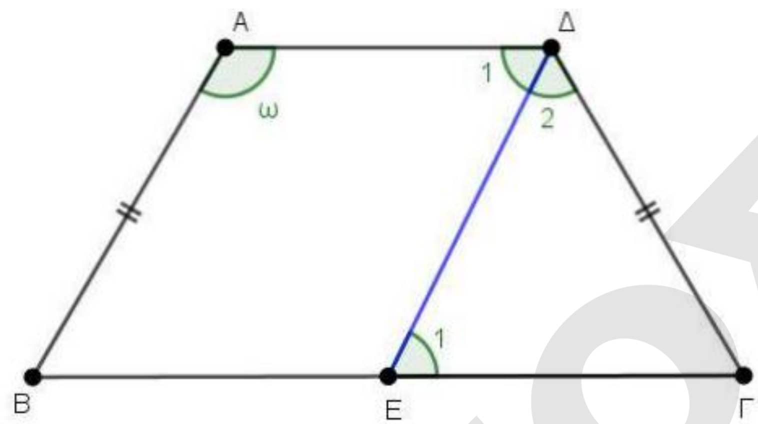
Στην πλευρά ΒΓ θεωρούμε σημείο Ε, τέτοιο ώστε ΓΕ = ΓΔ.

α) Να αποδείξετε ότι η ΔΕ είναι διχοτόμος της $\mathrm{A}\widehat{\Delta}\Gamma$. (Μονάδες 12)

β) Αν $\widehat{\mathrm{A}}=120^{\mathrm{o}}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ



α) $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{E}_1$ (1), γιατί είναι γωνίες εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΔ και ΒΓ με τέμνουσα την ΔΕ.

$\widehat{\Delta}_2=\widehat{E}_1$ (2), γιατί είναι γωνίες προσκείμενες στη βάση ΔΕ του ισοσκελούς τριγώνου ΔΓΕ.

Από (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι $\widehat{\Delta}_1=\widehat{\Delta}_2$, άρα η ΔΕ είναι διχοτόμος της $A\widehat{\Delta}\Gamma$.

β) Αν $\widehat{A}=120^o$, τότε, επειδή το τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές, θα είναι $A\widehat{\Delta}\Gamma = 120^o$.

Επειδή αποδείξαμε στο α) ότι η ΔΕ είναι διχοτόμος της $A\widehat{\Delta}\Gamma$,

θα είναι $\widehat{\Delta}_2=60^o$ και λόγω της σχέσης (2), $\widehat{E}_1=60^o$.

Άρα, το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ισόπλευρο, γιατί έχει δύο γωνίες 60ο, οπότε και η τρίτη γωνία $\widehat{\Gamma}$ θα είναι 60ο.

Θέμα 3 - Κωδικοί:

12418

9. Θέμα 12418

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΑΒ>ΓΔ. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τραπεζίου ΑΒΓΔ ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΕ με βάση ΑΒ. Αν Μ είναι το μέσο της βάσης ΓΔ, να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΕΓ είναι ίσα.

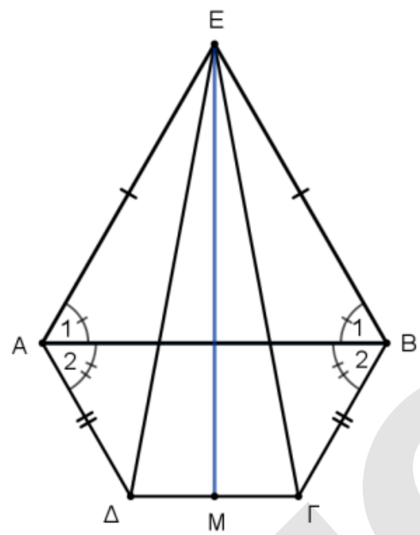
(Μονάδες 11)

β) Η διάμεσος ΕΜ του τριγώνου ΕΔΓ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{A\hat{E}B}$.

(Μονάδες 14)

ΛΥΣΗ

Έστω ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΑΒ>ΓΔ και Μ το μέσο της βάσης ΓΔ. Επομένως, ΑΔ=ΒΓ (1) και $\hat{A}_2 = \hat{B}_2$ (2) (ως προσκείμενες στη βάση ΑΒ). Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τραπεζίου ΑΒΓΔ ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΕ με βάση ΑΒ. Οπότε ΑΕ=ΒΕ (3) και $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ (4) (ως προσκείμενες στη βάση ΑΒ).



α) Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΕΓ έχουν:

ΑΔ=ΒΓ από (1)

ΑΕ=ΒΕ από (3)

$E\hat{A}\Delta = E\hat{B}\Gamma$ ως αθροίσματα ίσων γωνιών ($E\hat{A}\Delta = \hat{A}_1 + \hat{A}_2$, $E\hat{B}\Gamma = \hat{B}_1 + \hat{B}_2$ με $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$, $\hat{A}_2 = \hat{B}_2$).

Επομένως, είναι ίσα αφού έχουν δύο πλευρές ίσες μια προς μια και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (Π-Γ-Π).

β) Από την ισότητα των τριγώνων ΑΕΔ και ΒΕΓ προκύπτει ότι ΕΔ=ΕΓ (5) (ως πλευρές απέναντι από τις ίσες γωνίες $E\hat{A}\Delta$ και $E\hat{B}\Gamma$ αντίστοιχα) και $A\hat{E}\Delta = B\hat{E}\Gamma$ (6) (ως γωνίες απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα).

Από την ισότητα (5) συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο ΕΔΓ είναι ισοσκελές με βάση ΓΔ, οπότε η διάμεσος ΕΜ (το Μ είναι μέσο της πλευράς ΓΔ) είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{E}\Gamma$. Επομένως, $\Delta\hat{E}M = \Gamma\hat{E}M$ (7). Προσθέτοντας τις σχέσεις (6) και (7) κατά μέλη προκύπτει ότι $A\hat{E}\Delta + \Delta\hat{E}M = B\hat{E}\Gamma + \Gamma\hat{E}M$ και άρα $A\hat{E}M = B\hat{E}M$. Επομένως, η διάμεσος ΕΜ του τριγώνου ΕΔΓ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{E}B$.

Θέμα 4 - Κωδικοί:

1722, 1834, 1861, 1884

10. Θέμα 1722

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$) και η διχοτόμος του ΒΔ. Από το Δ φέρουμε $ΔΕ \perp ΒΓ$ και ονομάζουμε Ζ το σημείο στο οποίο η ευθεία ΕΔ τέμνει την προέκταση της ΒΑ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

β)Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΕΖ είναι ίσα. (Μονάδες 6)

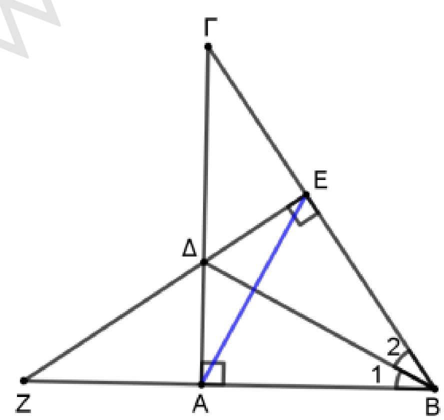
γ) Η ευθεία ΒΔ είναι μεσοκάθετη των τμημάτων ΑΕ και ΖΓ. (Μονάδες 6)

δ)Το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} = 90°$, ΒΔ η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B}$ και ΔΕ το κάθετο τμήμα στη ΒΓ που τέμνει την προέκταση της ΒΑ στο Ζ.

α)



Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΒΕΔ έχουν:

- $\widehat{A} = \widehat{E} = 90°$ (Υπόθεση και $ΔΕ \perp ΒΓ$)
- ΒΔ κοινή πλευρά
- $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$ γιατί η ΒΔ είναι διχοτόμος της $\widehat{B}$.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία οξεία γωνία ίση. Οπότε θα είναι ίσες και οι κάθετες πλευρές ΑΒ και ΒΕ στις οποίες είναι προσκείμενες οι ίσες γωνίες $\widehat{B}_1$ και $\widehat{B}_2$ αντίστοιχα. Άρα το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές.

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΕΖ έχουν:

- $\widehat{A} = \widehat{E} = 90°$
- ΑΒ=ΒΕ (ΑΒΕ ισοσκελές – α) ερώτημα)
- $\widehat{B}$ κοινή γωνία

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίση μία κάθετη πλευρά τους και την προσκείμενη οξεία γωνία ίση.

11. Θέμα 1834

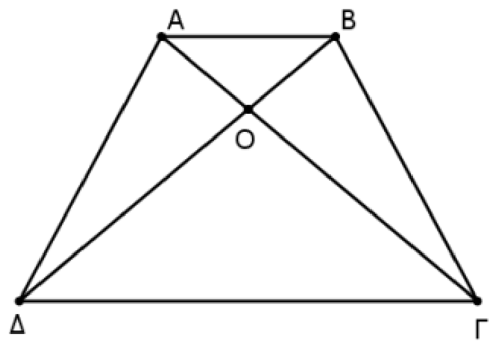
Στο παρακάτω τετράπλευρο ΑΒΓΔ ισχύουν: $ΑΔ = ΒΓ$, $ΑΓ = ΒΔ$, και ΑΒ<ΓΔ .

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΔΟΓ είναι ισοσκελή. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι $Δ\widehat{A}B = A\widehat{B}Γ$ (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ

α) Τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΒΓΔ έχουν:

- ΓΔ κοινή πλευρά
- ΑΔ = ΒΓ, από υπόθεση
- ΑΓ = ΒΔ, από υπόθεση

Σύμφωνα με το κριτήριο Π – Π – Π τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΒΓΔ είναι ίσα οπότε:
$Α\hat{Γ}Δ = Β\hat{Δ}Γ$ αφού είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΔ και ΒΓ. Άρα το τρίγωνο ΟΓΔ είναι ισοσκελές με ΟΓ = ΟΔ (1).

Ισχύει ακόμη ότι: $ΑΓ = ΒΔ \Leftrightarrow ΟΓ + ΟΑ = ΟΒ + ΟΔ \overset{(1)}{\Leftrightarrow} ΟΑ = ΟΒ$
Επομένως και το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές.

β) Στο τρίγωνο ΑΒΟ, επειδή ΟΑ=ΟΒ από το (α) ερώτημα, οι γωνίες $Γ\hat{Α}Β$, $Α\hat{Β}Δ$ είναι ίσες.
Από την ισότητα των τριγώνων ΑΓΔ και ΒΓΔ, οι γωνίες $Δ\hat{Α}Γ$ και $Δ\hat{Β}Γ$ είναι ίσες αφού είναι απέναντι από την κοινή πλευρά ΓΔ.
Άρα $Δ\hat{Α}Β = Δ\hat{Α}Γ + Γ\hat{Α}Β = Δ\hat{Β}Γ + Α\hat{Β}Δ = Α\hat{Β}Γ$

γ) Από την ισότητα των τριγώνων ΑΓΔ και ΒΓΔ, οι γωνίες $Α\hat{Δ}Γ$ και $Β\hat{Γ}Δ$ είναι ίσες, αφού είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΓ και ΒΔ.
Από το άθροισμα γωνιών του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ έχουμε:
$Δ\hat{Α}Β + Α\hat{Β}Γ + Α\hat{Δ}Γ + Β\hat{Γ}Δ = 360^{o} \Leftrightarrow 2Δ\hat{Α}Β + 2Α\hat{Δ}Γ = 360^{o} \Leftrightarrow Δ\hat{Α}Β + Α\hat{Δ}Γ = 180^{o}$
Οι γωνίες $Δ\hat{Α}Β$ και $Α\hat{Δ}Γ$ είναι εντός και επι τα αυτά μέρη των ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΑΔ. Επειδή είναι παραπληρωματικές, οι ευθείες ΑΒ, ΓΔ είναι παράλληλες (1).

Αν υποθέσουμε ότι ΑΔ // ΒΓ, τότε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ θα ήταν παραλληλόγραμμο και θα είχε ΑΒ = ΓΔ που είναι άτοπο αφού ΑΒ<ΓΔ. Άρα οι ΑΔ, ΒΓ δεν είναι παράλληλες (2).
Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι το ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο και επειδή ΑΔ=ΒΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

12. Θέμα 1861

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB//\Gamma\Delta$ και ΑΔ= ΒΓ =ΑΒ. Φέρουμε τμήματα ΑΕ και ΒΖ κάθετα στις διαγώνιες ΒΔ και ΑΓ αντίστοιχα.

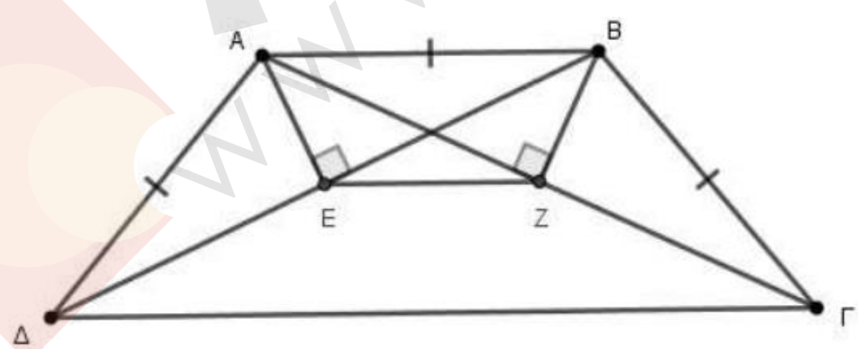
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα σημεία Ζ και Ε είναι μέσα των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα. (Μονάδες 5)

β) ΑΕ =ΒΖ . (Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο ΑΕΖΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 7)

δ) Η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ. (Μονάδες 5)



ΛΥΣΗ

α) Επειδή ΑΔ = ΑΒ, το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ισοσκελές οπότε το ύψος ΑΕ είναι και διάμεσος, δηλαδή το Ε είναι μέσο της ΒΔ. Όμοια, επειδή ΑΒ = ΒΓ, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές οπότε το ύψος ΒΖ είναι και διάμεσος, δηλαδή το Ζ είναι μέσο της ΑΓ.

β) Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΒΖ είναι ορθογώνια, αφού από υπόθεση είναι ΑΕ ⊥ ΒΔ και ΒΖ ⊥ ΑΓ, και έχουν:

- ΑΒ κοινή πλευρά
- ΑΖ = ΑΕ, ως μισά των ίσων διαγωνίων ΑΓ, ΒΔ του ισοσκελούς τραπεζίου.

Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΒΖ είναι ίσα γιατί έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία. Οπότε έχουν και τις άλλες κάθετες πλευρές τους ίσες, δηλαδή ΑΕ = ΒΖ (1).

γ) Τα σημεία Ε και Ζ είναι μέσα των διαγωνίων του τραπεζίου ΑΒΓΔ, άρα θα ισχύει ότι ΕΖ // ΑΒ // ΓΔ.

Επειδή είναι $A\hat{E}Z = 90^0 + B\hat{E}Z$ και $B\hat{Z}E = 90^0 + A\hat{Z}E$ θα είναι $A\hat{E}Z + B\hat{Z}E > 180^0$. Επομένως, οι ΑΕ και ΒΖ δεν είναι παράλληλες. Άρα, το τετράπλευρο ΑΕΖΒ είναι τραπέζιο γιατί έχει μόνο δυο πλευρές του παράλληλες.

Επειδή είναι ΑΕ = ΒΖ (λόγω της (1)) προκύπτει ότι το τραπέζιο ΑΕΖΒ είναι ισοσκελές.

δ) Επειδή το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ισοσκελές με βάση την ΒΔ, ισχύει ότι:

$A\hat{\Delta}B = A\hat{B}\Delta$ (2)

Ισχύει επίσης ότι $A\hat{B}\Delta = B\hat{\Delta}\Gamma$ (3) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΒΔ.

Άρα από τις (2), (3) προκύπτει ότι $\text{Α}\hat{\Delta}\text{Β} = \text{Β}\hat{\Delta}\Gamma$, δηλαδή η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta}$.

13. Θέμα 1884

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\Delta}{\text{ΑΒΓ}}$ $(\text{ΑΒ} = \text{ΑΓ})$ και ΑΔ διάμεσος. Στο τμήμα ΑΔ θεωρούμε τυχαίο σημείο Κ από το οποίο φέρνουμε τα τμήματα ΚΖ και ΚΕ κάθετα στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΚΒΓ και ΚΖΕ είναι ισοσκελή. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΖΕΓΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 10)

γ) Ένας μαθητής στην πορεία της λύσης του έδωσε το εξής επιχείρημα:

«Το τμήμα ΑΔ είναι διάμεσος στη βάση ισοσκελούς άρα ύψος και διχοτόμος του τριγώνου $\overset{\Delta}{\text{ΑΒΓ}}$ *και μεσοκάθετος του ΒΓ. Οπότε και το τρίγωνο* $\overset{\Delta}{\text{ΒΚΓ}}$ *είναι ισοσκελές.*

Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{\text{ΑΒΚ}}$, $\overset{\Delta}{\text{ΑΓΚ}}$ *έχουν*

1. $\text{ΒΚ} = \text{ΚΓ}$

2. $\text{Β}\hat{\text{Α}}\text{Κ} = \Gamma\hat{\text{Α}}\text{Κ}$ *επειδή ΑΚ διχοτόμος της* $\hat{\text{Α}}$

3. $\text{Α}\hat{\text{Β}}\text{Κ} = \text{Α}\hat{\Gamma}\text{Κ}$ *ως διαφορές ίσων γωνιών ισοσκελών τριγώνων.*

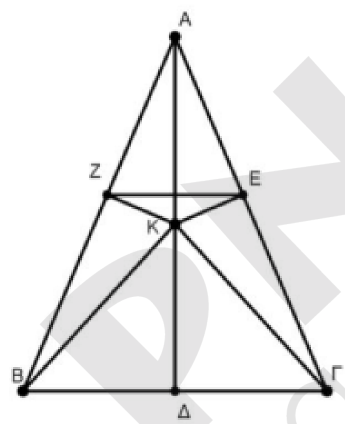
Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα βάση του κριτηρίου Γωνία Πλευρά Γωνία.»

Ο καθηγητής είπε ότι η απάντησή του είναι ελλιπής. Να συμπληρώσετε την απάντηση του μαθητή ώστε να ικανοποιεί το κριτήριο Γωνία –Πλευρά- Γωνία διατηρώντας τις πλευρές ΒΚ και ΚΓ. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Η ΑΔ είναι διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου, άρα είναι και διχοτόμος και ύψος. Επειδή το Κ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΒΓ θα ισαπέχει από τα άκρα του, δηλαδή ΚΒ=ΚΓ, οπότε το τρίγωνο ΚΒΓ είναι ισοσκελές.

Επειδή το Κ ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{A}$, ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας. Άρα ΖΚ = ΚΕ, οπότε το τρίγωνο ΖΚΕ είναι ισοσκελές.



β) Τα τρίγωνα ΒΖΚ και ΚΕΓ είναι ορθογώνια και έχουν:

- ΖΚ = ΚΕ, από το ερώτημα (α)
- ΚΒ = ΚΓ, από το ερώτημα (α)

Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΖΚ και ΚΕΓ έχουν τις υποτείνουσες και από μία κάθετη πλευρά ίσες μία προς μία, άρα είναι ίσα. Οπότε ισχύει ΒΖ = ΓΕ.

Αφού ΑΒ = ΑΓ και ΒΖ = ΓΕ θα είναι και ΑΖ = ΑΕ. Επομένως το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισοσκελές και έχει $A\hat{Z}E = A\hat{E}Z$ (1). Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΖΕ, έχουμε: $A\hat{Z}E = A\hat{E}Z = \frac{1}{2}(180^o - \hat{A})$

Ομοίως, από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ, έχουμε: $\widehat{B} = \frac{1}{2}(180^o - \widehat{A})$.

Οπότε $A\widehat{Z}E = \widehat{B}$ και επειδή οι γωνίες αυτές είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των ΖΕ, ΒΓ που τέμνονται από την ΑΒ, συμπεραίνουμε ότι ΖΕ // ΒΓ. Και αφού οι ΒΖ και ΓΕ δεν είναι παράλληλες, το ΒΖΕΓ είναι τραπέζιο.

Επιπλέον ισχύει ΒΖ = ΓΕ άρα το ΒΖΕΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

γ) Η απάντηση είναι ελλιπής διότι ο μαθητής έλαβε υπόψη του γωνίες που δεν είναι προσκείμενες σε κάθε πλευρά. Έπρεπε να αναφέρει ότι αφού τα δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες, θα έχουν και τις τρίτες τους γωνίες ίσες, δηλαδή $A\widehat{K}B = A\widehat{K}\Gamma$. Οπότε τα τρίγωνα είναι ίσα με το κριτήριο ΓΠΓ.