Κεφ. 4.8. - Τράπεζα Θεμάτων 2022 - Γεωμετρία Α' Λυκείου

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ & ΛΥΣΕΙΣ

Η Τράπεζα Θεμάτων για τη Γεωμετρία Α' Λυκείου είναι μία μεγάλη «θάλασσα». Εμείς όμως έχουμε φροντίσει για εσένα, συγκεντρώνοντας εκείνα τα θέματα που αποτελούν τη «βάση» της γνώσης και για τα υπόλοιπα. Μελετώντας και κατανοώντας το μοτίβο σκέψης για τα συγκεκριμένα, μπορείς να λύσεις με επιτυχία και τα υπόλοιπα θέματα. Στην ιστοσελίδα μας www.arnos.gr για το Course της Γεωμετρίας, μελετάς και προετοιμάζεσαι με την αναλυτική διδασκαλία σε ασκήσεις και θέματα, στο ύφος της Τράπεζας.

Θέμα 2 - Κωδικοί:

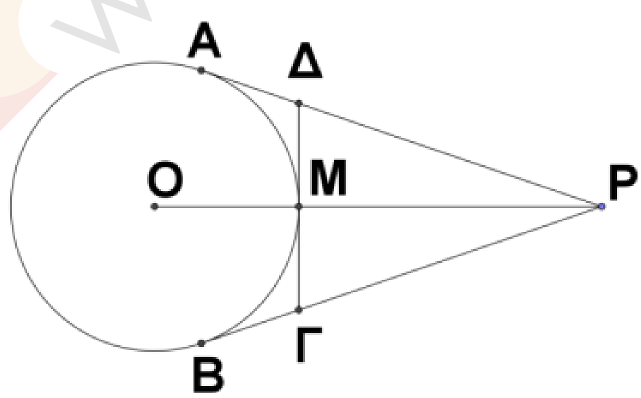
1636, 12640, 12644, 13619, 13749

1. Θέμα 1636

Δίνεται κύκλος κέντρου Ο, και από ένα σημείο Ρ εκτός αυτού φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Το τμήμα ΡΟ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Μ και η εφαπτομένη του κύκλου στο Μ τέμνει τα ΡΑ και ΡΒ στα σημεία Δ και Γ αντίστοιχα.

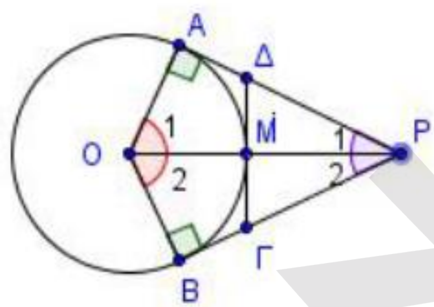
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΡΔΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 13)

β) Αν η γωνία ΑΡΒ είναι 40^0 να υπολογίσετε τη γωνία ΑΟΒ. (Μονάδες 12)



ΛΥΣΗ

α) Η ακτίνα ΟΜ έχει άκρο το σημείο επαφής Μ άρα είναι κάθετη στην εφαπτομένη ΔΓ. Η διακεντρική ευθεία ΡΟ διχοτομεί τη γωνία των εφαπτομένων ΡΑ και ΡΒ, δηλαδή την $A\hat{P}B$. Οπότε στο τρίγωνο ΡΓΔ η ΡΜ είναι ύψος και διχοτόμος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές.



β) Το άθροισμα των γωνιών του τετραπλεύρου ΟΑΡΒ είναι 360^0. Οπότε:

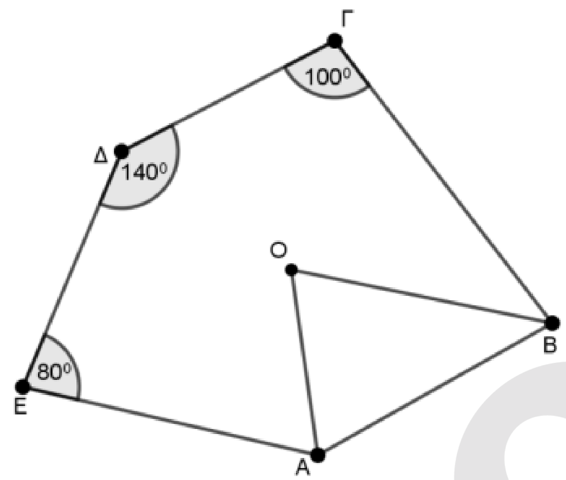
$\widehat{AOB} + \hat{A} + \hat{B} + \hat{P} = 360^0 \Leftrightarrow \widehat{AOB} + 90^0 + 90^0 + 40^0 = 360^0 \Leftrightarrow \widehat{AOB} = 140^0$.

2. Θέμα 12640

Στο κυρτό πολύγωνο ΑΒΓΔΕ, οι διχοτόμοι των γωνιών του Α και Β τέμνονται στο Ο. Αν η γωνία του Γ ισούται με 100^0, η γωνία του Δ ισούται με 140^0 και η γωνία του Ε ισούται με 80^0 τότε, να υπολογίσετε:

α) το μέτρο του αθροίσματος $\hat{A} + \hat{B}$. (Μονάδες 12)

β) το μέτρο της γωνίας ΑΟΒ. (Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ

α) Το άθροισμα των γωνιών ενός κυρτού πολυγώνου με ν πλευρές είναι 2·ν-4 ορθές.

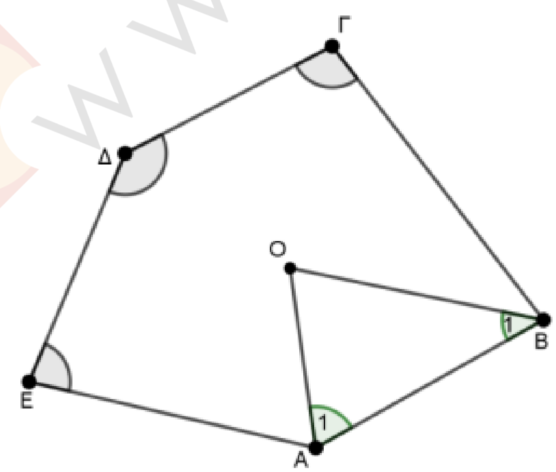
Έτσι για το πολύγωνο ΑΒΓΔΕ το άθροισμα των γωνιών του είναι:

$2\cdot 5-4 = 10-4 = 6$ ορθές ή $6\cdot 90^0 = 540^0$.

Δηλαδή έχουμε: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} + \widehat{\Delta} + \widehat{E} = 540^0$ η οποία λόγω των δεδομένων γράφεται:

$\widehat{A} + \widehat{B} + 100^0 + 140^0 + 80^0 = 540^0$ οπότε $\widehat{A} + \widehat{B} = 220^0$.

β)



Στο τρίγωνο ΑΟΒ είναι: $\hat{A}_1 + \hat{B}_1 + \hat{O} = 180^0$ (1).

Όμως ΑΟ και ΒΟ είναι διχοτόμοι των γωνιών Α και Β αντίστοιχα, άρα:

$\hat{A}_1 = \frac{\hat{A}}{2}$ και $\hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2}$. Έτσι $\hat{A}_1 + \hat{B}_1 = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}$ η οποία λόγω του (α) ερωτήματος

δίνει: $\hat{A}_1 + \hat{B}_1 = \frac{220^0}{2} = 110^0$ οπότε από την (1) παίρνουμε:

$110^0 + \hat{O} = 180^0$, επομένως $\hat{O} = 70^0$, δηλαδή $A\hat{O}B = 70^0$.

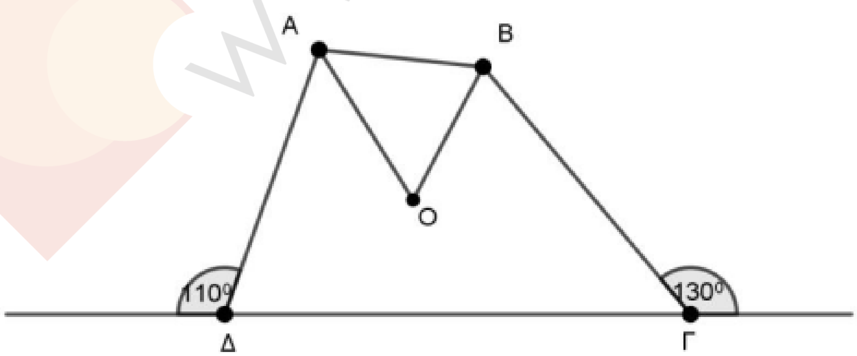
3. Θέμα 12644

Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ, η εξωτερική γωνία της Γ, ισούται με 130^0 και η εξωτερική γωνία της Δ ισούται με 110^0. Αν οι διχοτόμοι των γωνιών του Α και Β τέμνονται στο Ο τότε, να υπολογίσετε:

α) τα μέτρα των γωνιών Γ και Δ του τετραπλεύρου. (Μονάδες 9)

β) το μέτρο του αθροίσματος $\hat{A} + \hat{B}$. (Μονάδες 9)

γ) το μέτρο της γωνίας ΑΟΒ. (Μονάδες 7)



ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $\widehat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = 130^0$, $\widehat{\Delta}_{\varepsilon\xi} = 110^0$. Όμως $\widehat{\Gamma} + \widehat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = 180^0$ ή $\widehat{\Gamma} + 130^0 = 180^0$ άρα $\widehat{\Gamma} = 50^0$.

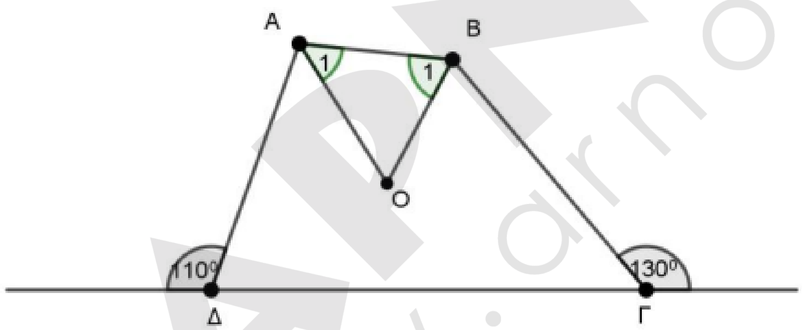
Επίσης $\widehat{\Delta} + \widehat{\Delta}_{\varepsilon\xi} = 180^0$ ή $\widehat{\Delta} + 110^0 = 180^0$ άρα $\widehat{\Delta} = 70^0$.

β) Το άθροισμα των γωνιών ενός κυρτού πολυγώνου με ν πλευρές είναι 2·ν-4 ορθές.

Έτσι για το τετράπλευρο ΑΒΓΔ, το άθροισμα των γωνιών του είναι:

$2\cdot4-4 = 8-4 = 4$ ορθές ή $4\cdot90^0 = 360^0$. Δηλαδή έχουμε: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} + \widehat{\Delta} = 360^0$ η οποία λόγω του (α) ερωτήματος γράφεται: $\widehat{A} + \widehat{B} + 50^0 + 70^0 = 360^0$ οπότε $\widehat{A} + \widehat{B} = 240^0$.

γ)



Στο τρίγωνο ΑΟΒ είναι: $\widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 + \widehat{O} = 180^0$ (1).

Όμως ΑΟ και ΒΟ είναι διχοτόμοι των γωνιών Α και Β αντίστοιχα, άρα:

$\widehat{A}_1 = \dfrac{\widehat{A}}{2}$ και $\widehat{B}_1 = \dfrac{\widehat{B}}{2}$. Έτσι $\widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 = \dfrac{\widehat{A}}{2} + \dfrac{\widehat{B}}{2} = \dfrac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2}$ η οποία λόγω του (β) ερωτήματος

γράφεται: $\widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 = \dfrac{240^0}{2} = 120^0$ οπότε από την (1) παίρνουμε:

$120^0 + \widehat{O} = 180^0$, επομένως $\widehat{O} = 60^0$, δηλαδή $\widehat{AOB} = 60^0$.

4. Θέμα 13619

Θεωρούμε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος με $\widehat{A}_{εξ} = 100^o$ και $\widehat{B} + \widehat{Γ} = 220^o$.

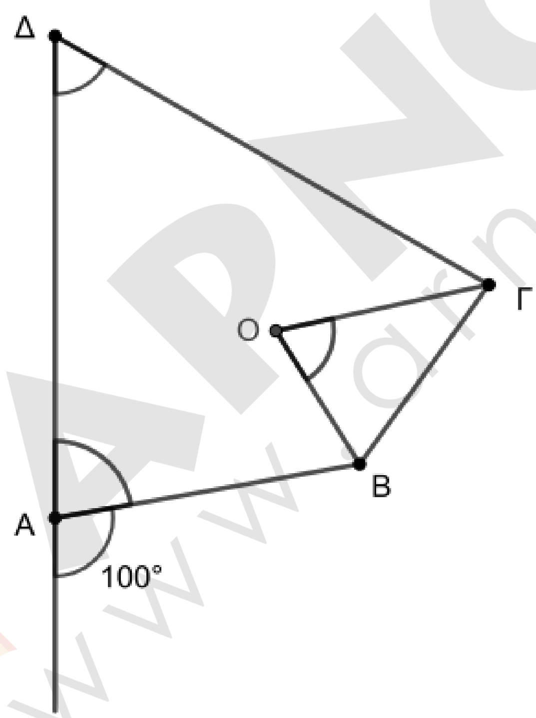
Αν οι διχοτόμοι των γωνιών $\widehat{B}$ και $\widehat{Γ}$ τέμνονται στο Ο, τότε:

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{Δ}$ του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $B\widehat{O}Γ = 70^o$.

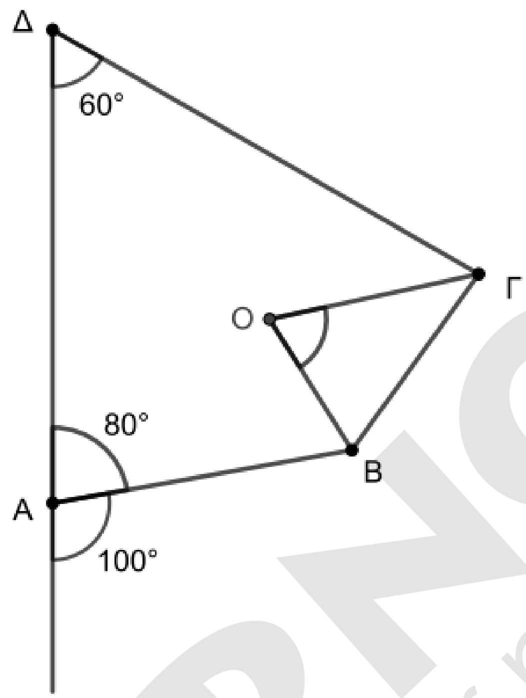
(Μονάδες 15)



ΛΥΣΗ

Έστω τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $\widehat{A}_{εξ} = 100^o$ και $\widehat{B} + \widehat{Γ} = 220^o$. Φέρουμε τις διχοτόμους των γωνιών $\widehat{B}$ και $\widehat{Γ}$ οι οποίες τέμνονται στο σημείο Ο.

α)



Για τις γωνίες $\widehat{A}_{\varepsilon\xi}$ και $\widehat{A}$ ισχύει:

$\widehat{A}_{\varepsilon\xi} + \widehat{A} = 180^o$ ή $100^o + \widehat{A} = 180^o$.

Άρα, $\widehat{A} = 180^o - 100^o = 80^o$.

Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ ισχύει:

$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} + \widehat{\Delta} = 360^o$ ή $80^o + 220^o + \widehat{\Delta} = 360^o$.

Άρα, $\widehat{\Delta} = 360^o - 80^o - 220^o = 60^o$.

β) Στο τρίγωνο ΒΓΟ ισχύει:

$$O\widehat{B}\Gamma + B\widehat{\Gamma}O + B\widehat{O}\Gamma = 180^o \quad (1)$$

Όμως

$$O\widehat{B}\Gamma + B\widehat{\Gamma}O = \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{\Gamma}}{2} = \frac{\widehat{B} + \widehat{\Gamma}}{2} = \frac{220^o}{2} = 110^o$$

Οπότε, από τη σχέση (1) έχουμε:

$$110^o + B\hat{O}\Gamma = 180^o$$

Άρα, $B\hat{O}\Gamma = 180^o - 110^o = 70^o$.

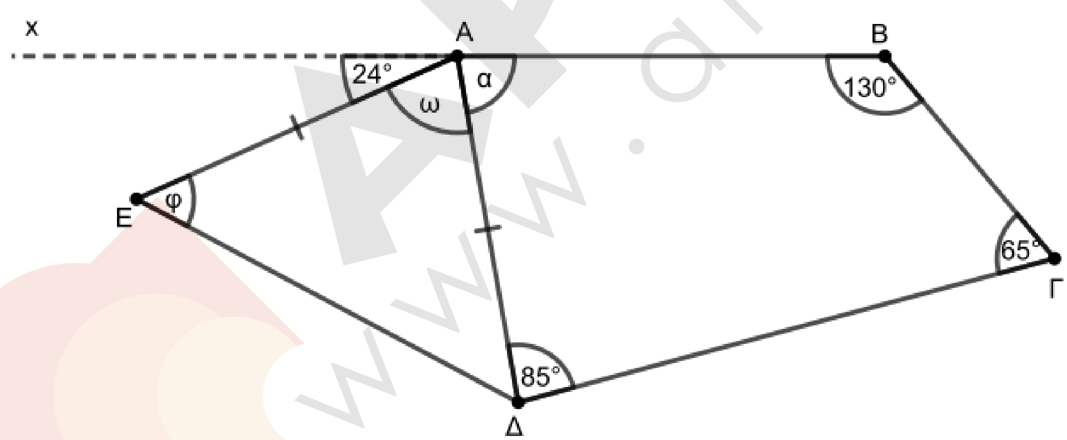
5. Θέμα 13749

Στο παρακάτω σχήμα το ΑΒΓΔΕ είναι ένα πεντάγωνο στο οποίο η διαγώνιος ΑΔ είναι ίση με την πλευρά ΑΕ και η ημιευθεία Αx είναι προέκταση της ΒΑ προς το Α. Να υπολογίσετε δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας:

α) Τη γωνία $\hat{\alpha}$. (Μονάδες 08)

β) Τη γωνία $\hat{\omega}$. (Μονάδες 08)

γ) Τη γωνία $\hat{\varphi}$. (Μονάδες 09)



ΛΥΣΗ

α) Γνωρίζουμε ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τετραπλεύρου ισούται με 360^o, οπότε επειδή η γωνία $\hat{\alpha}$ είναι η $4^η$ γωνία του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ έχουμε:

$\hat{\alpha} + 130^o + 65^o + 85^o = 360^o$ ή $\hat{\alpha} = 360^o - 280^o$. Άρα $\hat{\alpha} = 80^o$.

β) Η γωνία των 24^o με τη γωνία $\widehat{\omega}$ και τη γωνία $\widehat{\alpha}$ που υπολογίσαμε στο α) ερώτημα σχηματίζουν ευθεία γωνία. Άρα $24^o + \widehat{\omega} + \widehat{\alpha} = 180^o$ ή $24^o + \widehat{\omega} + 80^o = 180^o$. Άρα $\widehat{\omega} = 76^o$.

γ) Η διαγώνιος ΑΔ του πενταγώνου ΑΒΓΔΕ είναι ίση με την πλευρά ΑΕ, άρα το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά ΕΔ. Η γωνία $\widehat{\varphi}$ είναι ίση με τη γωνία $A\widehat{\Delta}E$, ως γωνίες της βάσης του ισοσκελούς τριγώνου ΑΔΕ, του οποίου η γωνία της κορυφής είναι η $\widehat{\omega}$ με $\widehat{\omega} = 76^o$ από το β) ερώτημα. Επομένως $\widehat{\varphi} = \frac{180° - \omega}{2} = \frac{180° - 76°}{2} = 52^o$.