Κεφ. 4.6. - Τράπεζα Θεμάτων 2022 - Γεωμετρία Α' Λυκείου

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ & ΛΥΣΕΙΣ

Η Τράπεζα Θεμάτων για τη Γεωμετρία Α' Λυκείου είναι μία μεγάλη «θάλασσα». Εμείς όμως έχουμε φροντίσει για εσένα, συγκεντρώνοντας εκείνα τα θέματα που αποτελούν τη «βάση» της γνώσης και για τα υπόλοιπα. Μελετώντας και κατανοώντας το μοτίβο σκέψης για τα συγκεκριμένα, μπορείς να λύσεις με επιτυχία και τα υπόλοιπα θέματα. Στην ιστοσελίδα μας www.arnos.gr για το Course της Γεωμετρίας, μελετάς και προετοιμάζεσαι με την αναλυτική διδασκαλία σε ασκήσεις και θέματα, στο ύφος της Τράπεζας.

Θέμα 2 - Κωδικοί:

1541, 1552, 1554, 1556, 1572, 1576, 1577, 1590, 1594, 1596, 1602

1603, 1604, 1607, 1623, 1635, 1637, 1639, 1640, 1641, 1645, 1661

1689, 1693, 1699, 1700, 1851, 12704, 12707, 12708, 12709, 13442,

13443, 13535, 13654, 13741, 14884

1. Θέμα 1541

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$). Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Δ. Φέρουμε τμήμα ΔΕ κάθετο στην πλευρά ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

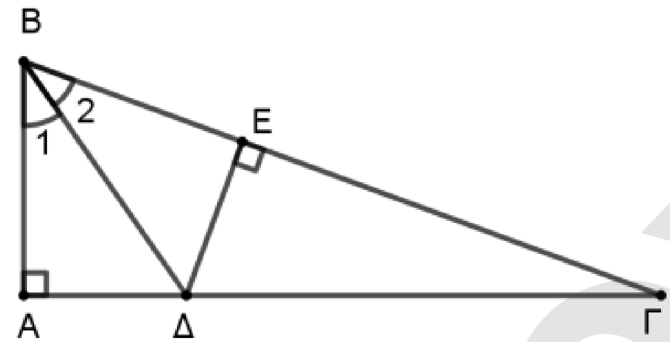
α) ΒΕ=ΑΒ. (Μονάδες 12)

β) Αν επιπλέον $B\hat{\Delta}A = 55°$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΓΔΕ. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}$ ορθή, ΒΔ η διχοτόμος της $\hat{B}$ και τμήμα ΔΕ κάθετο στη ΒΓ.

α)

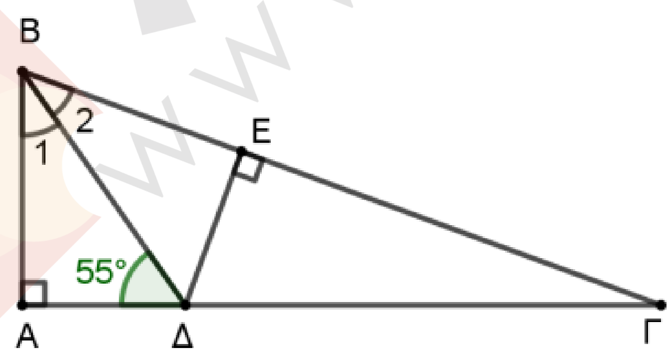


Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΔΕ έχουν:

- $\hat{A} = \hat{E} = 90°$ (Υπόθεση και ΔΕ⊥ΒΓ)
- ΒΔ κοινή πλευρά,
- $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$, επειδή ΒΔ διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία οξεία γωνία ίση. Οπότε οι πλευρές ΒΕ και ΑΒ είναι ίσες γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{B}_2$ και $\hat{B}_1$ αντίστοιχα.

β) Έστω ότι είναι $B\hat{\Delta}A = 55^0$.



Για τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΔ ισχύει ότι $55^o + \hat{B}_1 = 90^o$.

Άρα $\hat{B}_1 = 35^o = \hat{B}_2$ αφού ΒΔ διχοτόμος της $\hat{B}$, οπότε $\hat{B} = 70^o$.

Για τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ισχύει ότι $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 90^o$.

Άρα $\widehat{\Gamma} = 20^o$.

Για τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου ΓΔΕ ($\widehat{E} = 90^o$) ισχύει ότι

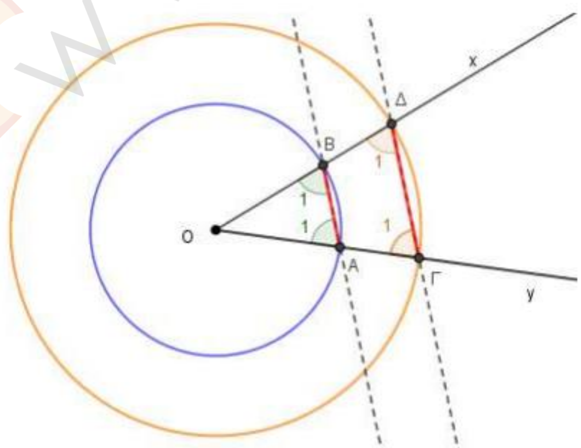
$\Gamma\widehat{\Delta}E + \widehat{\Gamma} = 90^0$.

Άρα $\Gamma\widehat{\Delta}E = 70^o$.

2. Θέμα 1552

Ένας μαθητής της Α' λυκείου βρήκε έναν τρόπο να κατασκευάζει παράλληλες ευθείες. Στην αρχή σχεδιάζει μια τυχαία γωνία $x\hat{O}y$. Στη συνέχεια με κέντρο την κορυφή Ο της γωνίας σχεδιάζει δυο ομόκεντρους διαφορετικούς κύκλους με τυχαίες ακτίνες. Ο μικρότερος κύκλος τέμνει τις πλευρές Ox και Oy της γωνίας στα σημεία Α, Β αντίστοιχα και ο μεγαλύτερος στα σημεία Γ, Δ. Ισχυρίζεται ότι οι ευθείες που ορίζονται από τις χορδές ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλες. Μπορείτε να το δικαιολογήσετε; (Μονάδες 25)

ΛΥΣΗ



Το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές διότι ΟΑ = ΟΒ ως ακτίνες του ίδιου κύκλου.

Άρα $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$ (1).

Για τις γωνίες του τριγώνου ΟΑΒ ισχύει ότι:

$$\widehat{O} + \widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 = 180^o$$

$$\widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 = 180^o - \widehat{O}$$

$$2\widehat{B}_1 = 180^o - \widehat{O} \text{ [λόγω της (1)]}$$

Άρα, $\widehat{B}_1 = \dfrac{180^o - \widehat{O}}{2}$ (2)

Το τρίγωνο ΟΓΔ είναι ισοσκελές διότι ΟΓ = ΟΔ, ως ακτίνες του ίδιου κύκλου.

Άρα $\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{\Delta}_1$ (3)

Για τις γωνίες του τριγώνου ΟΓΔ ισχύει ότι:

$$\widehat{O} + \widehat{\Gamma}_1 + \widehat{\Delta}_1 = 180^o$$

$$\widehat{\Gamma}_1 + \widehat{\Delta}_1 = 180^o - \widehat{O}$$

$$2\widehat{\Delta}_1 = 180^o - \widehat{O} \text{ [σχέση (3)]}$$

Άρα, $\widehat{\Delta}_1 = \dfrac{180^o - \widehat{O}}{2}$ (4)

Από τις σχέσεις (2) και (4) προκύπτει ότι $\widehat{B}_1 = \widehat{\Delta}_1$.

Όμως, οι γωνίες $\widehat{B}_1$ και $\widehat{\Delta}_1$ βρίσκονται εκτός, εντός των ευθειών ΑΒ και ΓΔ και προς το ίδιο μέρος με την τέμνουσα Οx των ευθειών.

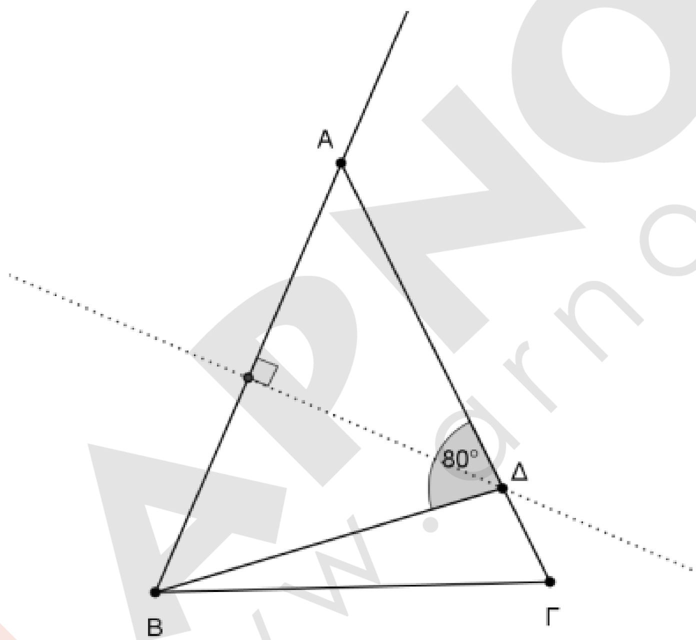
Οπότε οι ευθείες ΑΒ και ΓΔ θα είναι παράλληλες γιατί τεμνόμενες από την Οx σχηματίζουν δυο εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες. Άρα και οι χορδές ΑΒ και ΓΔ θα είναι παράλληλες ως τμήματα παράλληλων ευθειών.

3. Θέμα 1554

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο $\hat{A}_{\varepsilon\xi} = 2A\hat{B}\Gamma$. Φέρουμε τη μεσοκάθετο της πλευράς ΑΒ, η οποία τέμνει την πλευρά ΑΓ στο Δ και σχηματίζεται γωνία ΑΔΒ ίση με 80˚.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ=ΑΓ. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 15)

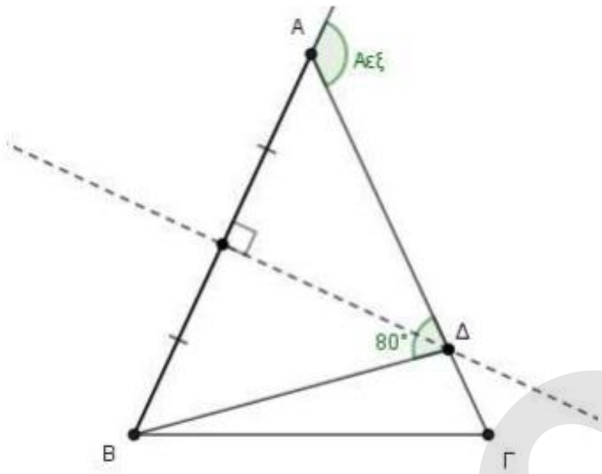


ΛΥΣΗ

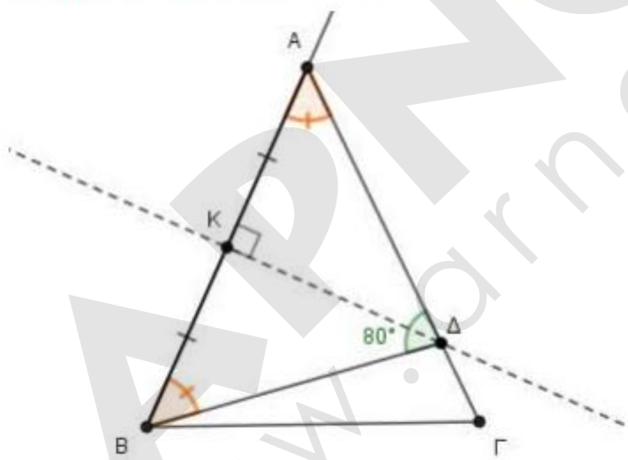
α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ η $\hat{A}_{\varepsilon\xi}$ θα είναι ίση με το άθροισμα των δυο απέναντι εσωτερικών γωνιών του, δηλαδή $\hat{A}_{\varepsilon\xi} = A\hat{B}\Gamma + \hat{\Gamma}$.

Επειδή από υπόθεση είναι $\hat{A}_{\varepsilon\xi} = 2A\hat{B}\Gamma$, άρα $2A\hat{B}\Gamma = A\hat{B}\Gamma + \hat{\Gamma}$, οπότε $A\hat{B}\Gamma = \hat{\Gamma}$.

Επομένως, το τρίγωνο ΑΒΓ έχει τις γωνίες που πρόσκεινται στην πλευρά του ΒΓ ίσες, άρα θα είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΓ, οπότε ΑΒ = ΑΓ.



β) Έστω Κ το σημείο τομής της μεσοκαθέτου της πλευράς ΑΒ του τριγώνου ΑΒΓ.



Επειδή στο τρίγωνο ΑΔΒ η ΔΚ είναι μεσοκάθετος στην πλευρά του ΑΒ, τότε θα είναι ύψος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο θα είναι ισοσκελές με βάση την ΑΒ. Άρα θα έχει ίσες και τις γωνίες του που πρόσκεινται στη βάση του, δηλαδή $\widehat{A} = A\widehat{B}\Delta$.

Για τις γωνίες του τριγώνου ΑΔΒ ισχύει ότι $A\widehat{\Delta}B + \widehat{A} + A\widehat{B}\Delta = 180^o$

Αφού είναι $A\widehat{\Delta}B = 80^0$ και $\widehat{A} = A\widehat{B}\Delta$, τότε έχουμε: $80^o + 2\widehat{A} = 180^o$ ή $2\widehat{A} = 100^o$,

άρα $\widehat{A} = 50^o$.

Για τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ ισχύει ότι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o$

Αφού είναι $\hat{A} = 50^o$ και $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, τότε έχουμε: $50^o + 2\hat{B} = 180^o$ ή $2\hat{B} = 130^o$, άρα $\hat{B} = 65^o$.

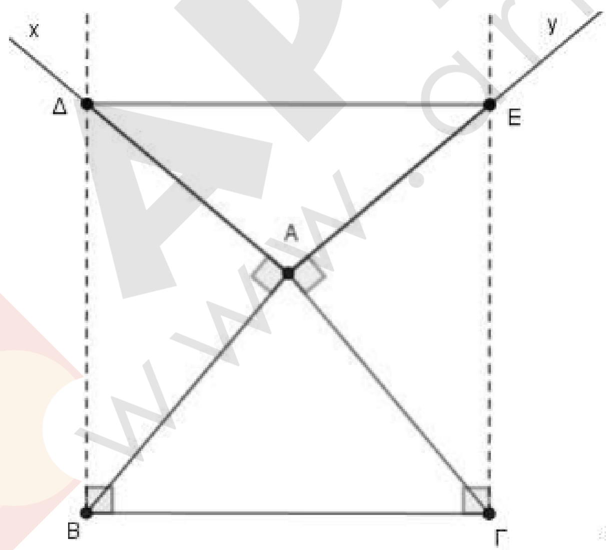
4. Θέμα 1556

Δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ. Φέρουμε, εκτός του τριγώνου, τις ημιευθείες Αx και Αy τέτοιες ώστε Αx⊥ΑΒ και Αy⊥ΑΓ, όπως στο σχήμα που ακολουθεί. Οι κάθετες στην πλευρά ΒΓ στα σημεία Β και Γ τέμνουν τις Αx και Αy στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι ΒΔ=ΓΕ. (Μονάδες 12)

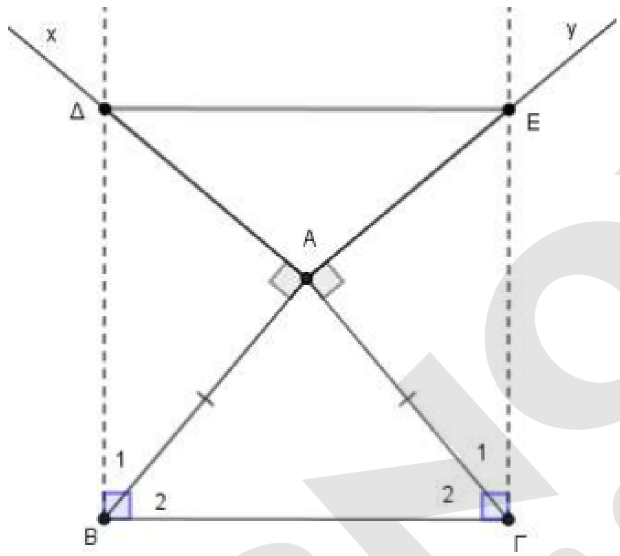
β) Αν η γωνία ΒΑΓ είναι ίση με 80^o, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΔΑΕ.

(Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ

α)



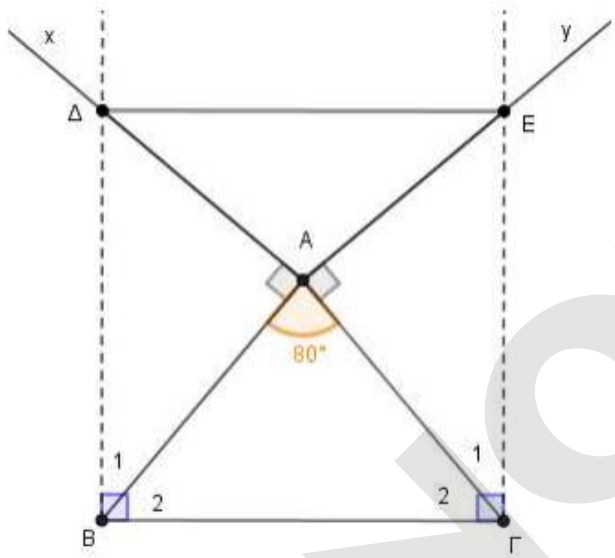
Αφού από υπόθεση είναι ΒΔ, ΓΕ κάθετες στη ΒΓ, τότε $\Delta\widehat{B}\Gamma = E\widehat{\Gamma}B = 90°$.

Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΕΓ έχουν:

- $B\widehat{A}\Delta = \Gamma\widehat{A}E = 90°$ γιατί $Ax \perp AB$ και $Ay \perp A\Gamma$ από υπόθεση
- ΑΒ = ΑΓ, από υπόθεση
- $\widehat{B}_1 = \widehat{\Gamma}_1$, ως συμπληρωματικές των ίσων γωνιών $\widehat{B}_2$, $\widehat{\Gamma}_2$ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ της υπόθεσης

Άρα τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΕΓ είναι ίσα ως ορθογώνια που έχουν μια κάθετη πλευρά και την προσκείμενη σε αυτήν την πλευρά οξεία γωνία ίσες μία προς μία. Οπότε έχουν και ΒΔ = ΓΕ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $B\widehat{A}\Delta$ και $\Gamma\widehat{A}E$ αντίστοιχα.

β)



Είναι $B\hat{A}\Gamma + \Gamma\hat{A}E + E\hat{A}\Delta + \Delta\hat{A}B = 360^o$, οπότε $80^o + 90^o + \Delta\hat{A}E + 90^o = 360^o$.

Άρα $\Delta\hat{A}E = 100^o$.

Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα θα ισχύει ότι ΑΔ = ΑΕ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από ίσες γωνίες $\hat{B}_1$ και $\hat{\Gamma}_1$ αντίστοιχα.

Οπότε το τρίγωνο ΔΑΕ είναι ισοσκελές με βάση ΔΕ άρα θα είναι $A\hat{\Delta}E = A\hat{E}\Delta$ ως γωνίες που πρόσκεινται στη βάση του ισοσκελούς.

Για τις γωνίες του τριγώνου ΔΑΕ θα ισχύει $\Delta\hat{A}E + A\hat{\Delta}E + A\hat{E}\Delta = 180^o$ και αφού

$A\hat{\Delta}E = A\hat{E}\Delta$ και $\Delta\hat{A}E = 100^o$ τότε θα έχουμε $100^o + 2A\hat{\Delta}E = 180^o$.

Άρα $A\hat{\Delta}E = 40^o = A\hat{E}\Delta$.

5. Θέμα 1572

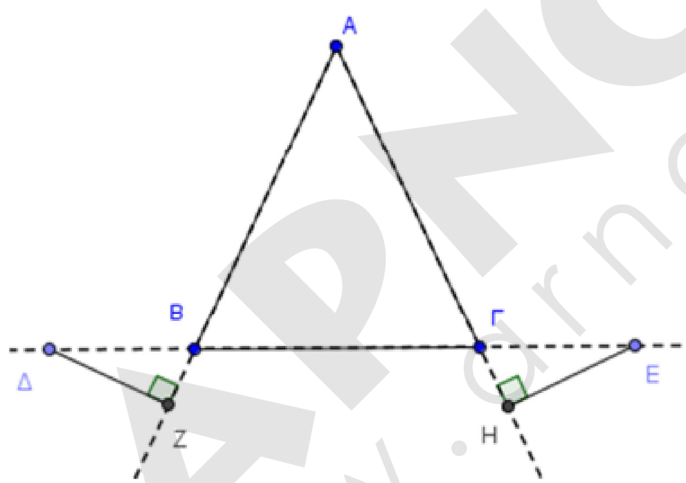
Θωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και σημεία Δ και Ε στην ευθεία ΒΓ τέτοια, ώστε ΒΔ=ΓΕ. Έστω ότι $ΔZ \perp AB$ και $EH \perp AΓ$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. ΒΖ=ΓΗ. (Μονάδες 10)

ii. Το τρίγωνο ΑΖΗ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) Αν $\hat{A} = 50^0$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΖΗ. (Μονάδες 8)

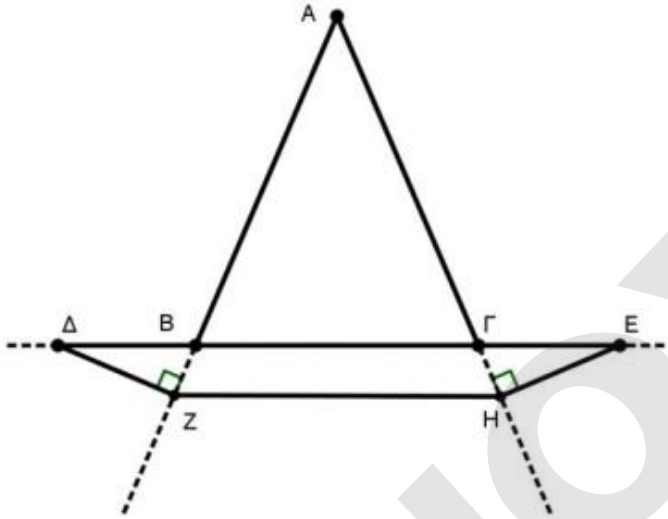


ΛΥΣΗ

α) i. Τα τρίγωνα ΔΒΖ και ΕΗΓ είναι ορθογώνια και έχουν:

- ΒΔ = ΓΕ, από υπόθεση
- $Δ\hat{B}Z = E\hat{Γ}H$, ως κατακορυφήν των ίσων γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{Γ}$ ($\hat{B} = \hat{Γ}$ στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ).

Τα τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μία οξεία γωνία ίσες μία προς μία, άρα είναι ίσα. Οπότε έχουν και τις αντίστοιχες πλευρές τους ΒΖ και ΓΗ ίσες, δηλ. ΒΖ = ΓΗ .



ii. Επειδή ΑΒ = ΑΓ και ΒΖ = ΓΗ, τότε ΑΒ + ΒΖ = ΑΓ + ΓΗ, οπότε ΑΖ = ΑΗ.

Άρα το τρίγωνο ΑΖΗ είναι ισοσκελές.

β) Επειδή το τρίγωνο ΑΖΗ είναι ισοσκελές με βάση τη ΖΗ, είναι $\hat{Z} = \hat{H}$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΖΗ έχουμε:

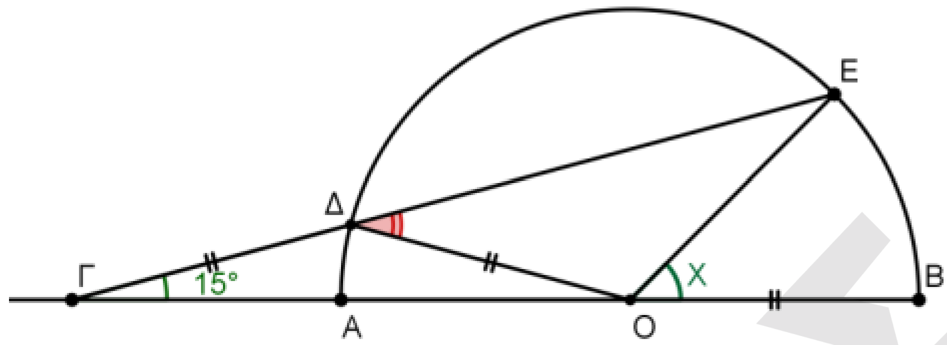
$\hat{A} + \hat{Z} + \hat{H} = 180^o$, ή $50^o + 2\hat{Z} = 180^o$, ή $2\hat{Z} = 130^o$, οπότε $\hat{Z} = 65^o = \hat{H}$

6. Θέμα 1576

Σε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ προεκτείνουμε την ΑΒ προς το μέρος του Α και παίρνουμε ένα σημείο Γ. Θεωρούμε Ε ένα σημείο του ημικυκλίου και έστω Δ το σημείο τομής του τμήματος ΓΕ με το ημικύκλιο. Αν το τμήμα ΓΔ είναι ίσο με το ΟΒ και η γωνία $B\hat{\Gamma}E$ είναι $15°$, τότε

α) να αποδείξετε ότι $O\hat{\Delta}E = 30°$ (Μονάδες 13)

β) να υπολογίσετε τη γωνία $E\hat{O}B = x$. (Μονάδες 12)



ΛΥΣΗ

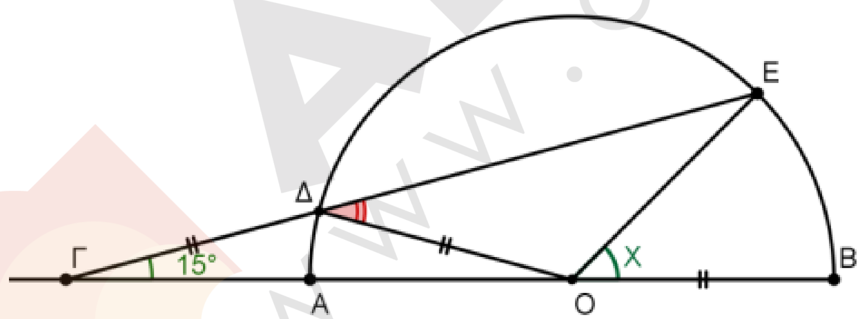
α) Έστω ρ η ακτίνα του ημικυκλίου.

Το τρίγωνο ΟΓΔ είναι ισοσκελές διότι ΟΔ = ΓΔ = ρ.

Άρα $\Delta\hat{O}A = \hat{\Gamma} = 15^o$.

Η γωνία $\hat{\Delta}_1$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΟΓΔ,

άρα $O\hat{\Delta}E = \Delta\hat{O}A + \hat{\Gamma} = 2\cdot 15^o = 30^o$



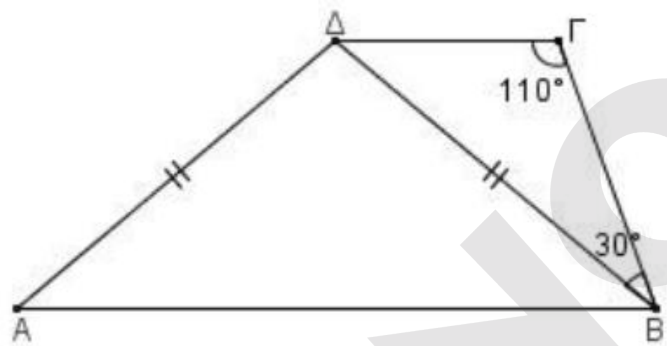
Το τρίγωνο ΟΔΕ είναι ισοσκελές διότι ΟΔ = ΟΕ = ρ. Άρα $\hat{E} = O\hat{\Delta}E = 30^o$

Η γωνία $B\hat{O}E$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΓΟΕ, άρα

$B\hat{O}E = \hat{E} + \hat{\Gamma}$, δηλαδή $x = 30^o + 15^o = 45^o$

7. Θέμα 1577

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ // ΓΔ στο οποίο η διαγώνιος ΒΔ είναι ίση με την πλευρά ΑΔ. Αν η γωνία $\hat{\Gamma} = 110°$ και η γωνία $\widehat{\Delta B \Gamma} = 30°$, να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{A\Delta B}$. (Μονάδες 25)



ΛΥΣΗ

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΔΓΒ βρίσκουμε:

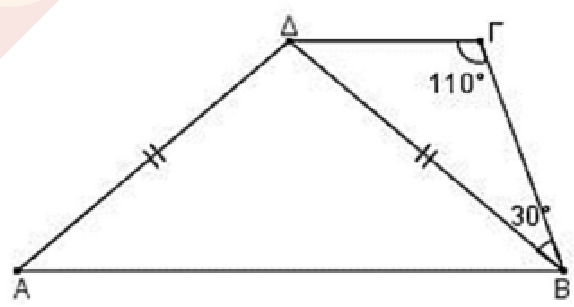
$\Gamma\hat{\Delta}B + \hat{\Gamma} + \Delta\hat{B}\Gamma = 180°$, δηλαδή $\Gamma\hat{\Delta}B + 110° + 30° = 180°$, οπότε $\Gamma\hat{\Delta}B = 40°$

Είναι $\Delta\hat{B}A = \Gamma\hat{\Delta}B = 40°$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΒΔ.

Επειδή ΔΑ = ΔΒ, το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ισοσκελές, άρα $\hat{A} = \Delta\hat{B}A = 40°$

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΔΒ έχουμε:

$A\hat{\Delta}B + \hat{A} + \Delta\hat{B}A = 180$ ή $A\hat{\Delta}B + 2 \cdot 40° = 180°$, οπότε $A\hat{\Delta}B = 80°$

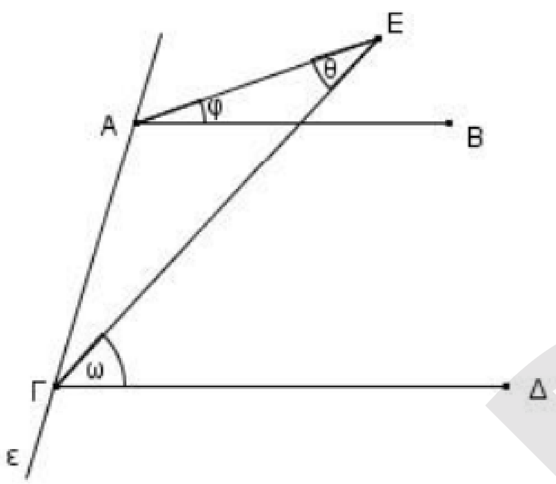


8. Θέμα 1590

Δίνεται ευθεία ε του επιπέδου. Τα παράλληλα τμήματα ΑΒ και ΓΔ καθώς και ένα τυχαίο σημείο Ε βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο της ε.

Να αποδείξετε ότι:

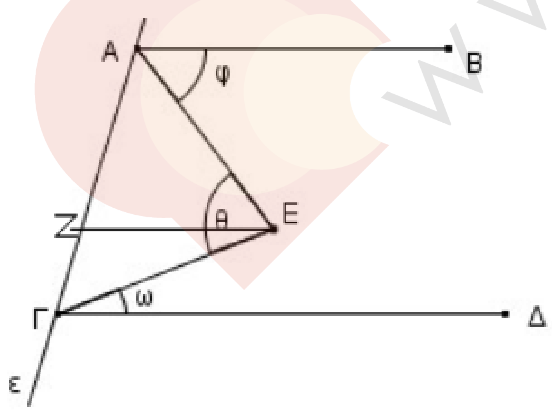
α) Αν το Ε είναι εκτός των τμημάτων ΑΒ και ΓΔ τότε: $\hat{\omega} = \hat{\varphi}+\hat{\theta}$



(Μονάδες 10)

β) Αν το Ε είναι ανάμεσα στα τμήματα ΑΒ και ΓΔ και ΕΖ//ΑΒ, τότε να αποδείξετε ότι

$\hat{\theta} = \hat{\omega} + \hat{\varphi}$



(Μονάδες 15)

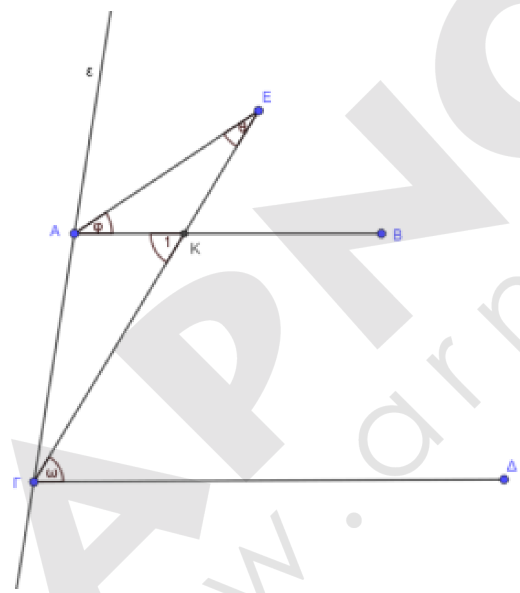
ΛΥΣΗ

α) Έστω Κ το σημείο τομής των ΕΓ, ΑΒ. Είναι $\widehat{K}_1 = \widehat{\omega}$ (1)

ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΕΓ.

Η γωνία $\widehat{K}_1$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΚΕ, οπότε $\widehat{K}_1 = \widehat{\theta} + \widehat{\varphi}$

Άρα λόγω της (1) βρίσκουμε $\widehat{\omega} = \widehat{\varphi} + \widehat{\theta}$



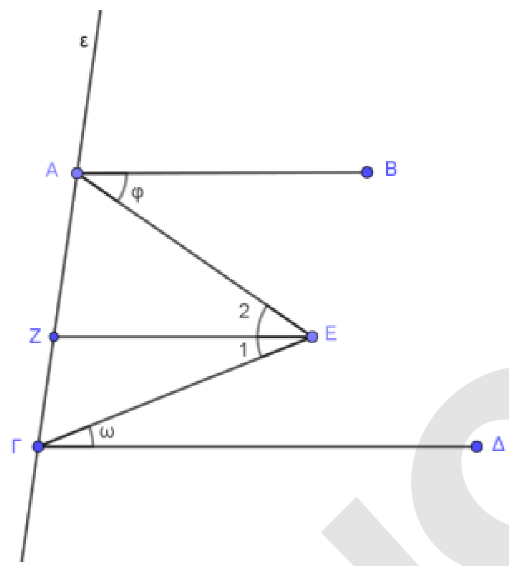
β) Είναι $\widehat{\omega} = \widehat{E}_1$

ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΕΖ, ΓΔ που τέμνονται από την ΕΓ.

Επίσης $\widehat{\varphi} = \widehat{E}_2$

ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΕΖ που τέμνονται από την ΑΕ. Τότε

$\widehat{\varphi} + \widehat{\omega} = \widehat{E}_2 + \widehat{E}_1 = \widehat{\theta}$



9. Θέμα 1594

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90^o$). Έστω Δ σημείο της πλευράς ΑΓ τέτοιο ώστε, η διχοτόμος ΔΕ της γωνίας $A\widehat{\Delta}B$ να είναι παράλληλη στην πλευρά ΒΓ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $E\widehat{\Delta}B = \Delta\widehat{B}\Gamma$ και $E\widehat{\Delta}A = \widehat{\Gamma}$

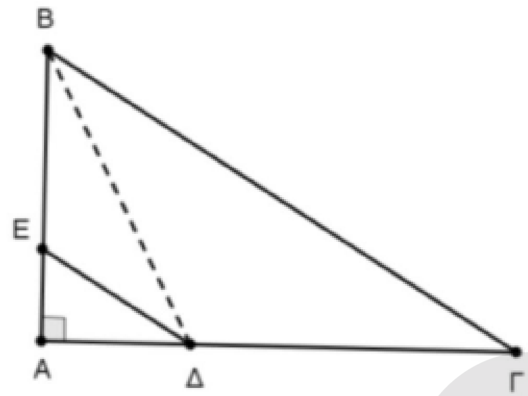
(Μονάδες 4 + 4)

ii) Το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 8)

β) Αν $A\widehat{\Delta}B = 60^o$ να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{\Gamma}$.

(Μονάδες 9)



ΛΥΣΗ

α) i) Ισχύει ότι:

- $E\hat{\Delta}B = \Delta\hat{B}\Gamma$ (1), ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ που τέμνονται από τη ΒΔ
- $E\hat{\Delta}A = \hat{\Gamma}$ (2), ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ που τέμνονται από την ΑΓ

ii) Ισχύει ότι $E\hat{\Delta}B = E\hat{\Delta}A$ (3), διότι η ΔΕ είναι διχοτόμος της $A\hat{\Delta}B$.

Από (1), (2) και (3) προκύπτει ότι $\Delta\hat{B}\Gamma = \hat{\Gamma}$ (4)

Άρα το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές με ΔΒ = ΔΓ.

β) Η $A\hat{\Delta}B$ είναι εξωτερική του τριγώνου ΔΒΓ οπότε ισχύει $A\hat{\Delta}B = \hat{\Gamma} + \Delta\hat{B}\Gamma$

Λόγω της (4) βρίσκουμε $60^o = \hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} \Leftrightarrow 60^o = 2\hat{\Gamma} \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 30^o$

10. Θέμα 1596

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ. Έστω Αx η διχοτόμος της εξωτερικής του γωνίας $\widehat{A}_{\varepsilon\xi} = 120^o$. Από την κορυφή Β φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην Αx, η οποία τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Δ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $A\widehat{B}\Delta = 60^o$

(Μονάδες 5)

ii. Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο.

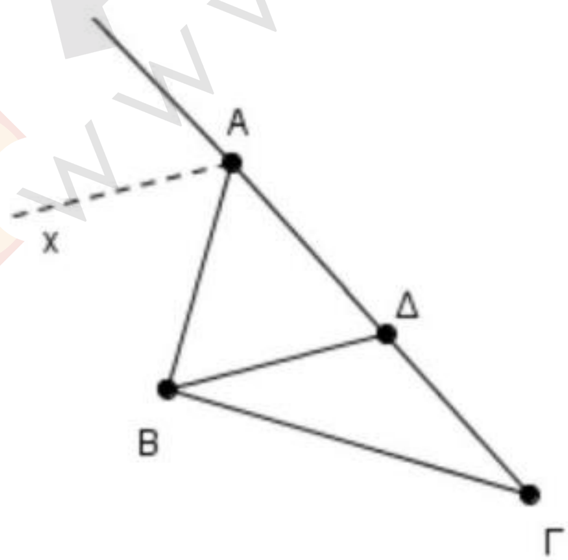
(Μονάδες 5)

iii. ΑΓ – ΑΒ = ΔΓ

(Μονάδες 5)

β) Αν η γωνία $B\widehat{\Delta}A$ είναι διπλάσια της γωνίας $\widehat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΔΓ.

(Μονάδες 10)



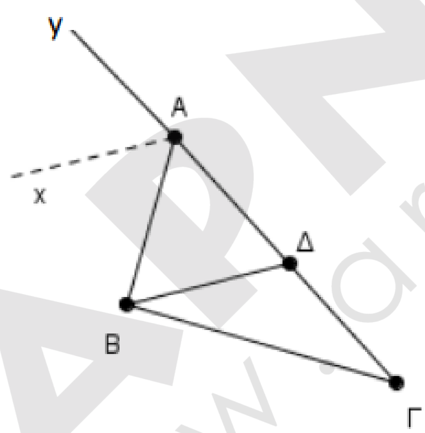
α) i. Είναι $A\hat{\Delta}B = y\hat{A}x = \frac{\hat{A}_{\varepsilon\xi}}{2} = 60^o$

ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων Αx, ΒΔ που τέμνονται από την ΑΔ.

Επίσης $A\hat{B}\Delta = x\hat{A}B = \frac{\hat{A}_{\varepsilon\xi}}{2} = 60^o$

ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων Αx, ΒΔ που τέμνονται από την ΑΒ.

ii. Επειδή στο τρίγωνο ΑΒΔ δύο γωνίες του είναι ίσες με 60^o, θα είναι και η τρίτη του γωνία 60^o οπότε το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.



iii. Επειδή το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο, ισχύει ότι ΑΒ = ΑΔ = ΒΔ.

Τότε ΔΓ = ΑΓ – ΑΔ = ΑΓ – ΑΒ.

β) Είναι $B\hat{\Delta}A = 60^o$ και $B\hat{\Delta}A = 2\hat{\Gamma} \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 30^o$

Επίσης $B\hat{\Delta}\Gamma = 180^o - B\hat{\Delta}A = 180^o - 60^o = 120^o$

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΒΔΓ, βρίσκουμε:

$\Delta\hat{B}\Gamma + \hat{\Gamma} + B\hat{\Delta}\Gamma = 180^o \Leftrightarrow \Delta\hat{B}\Gamma + 30^o + 120^o = 180^o \Leftrightarrow$

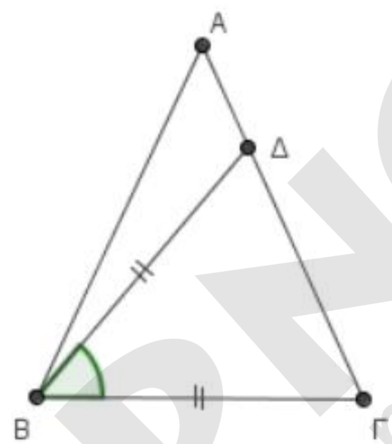
$\Leftrightarrow \Delta\hat{B}\Gamma + 150^o = 180^o \Leftrightarrow \Delta\hat{B}\Gamma = 30^o$

11. Θέμα 1602

Δίνεται τρίγωνο ισοσκελές ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) με γωνία $\hat{A} = 50^0$. Έστω Δ είναι σημείο της πλευράς ΑΓ, τέτοιο ώστε ΒΔ=ΒΓ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\widehat{\Delta B \Gamma}$ είναι ίση με τη γωνία $\hat{A}$. (Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ

α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ, ισχύει ότι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ, έχουμε:

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow 50^o + 2\hat{B} = 180^o \Leftrightarrow 2\hat{B} = 130^o \Leftrightarrow \hat{B} = 65^o$.

Άρα και $\hat{\Gamma} = 65^o$.

β) Το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές διότι ΒΔ = ΒΓ. Τότε $B\hat{\Delta}\Gamma = \hat{\Gamma} = 65^o$

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΔΒΓ έχουμε:

$\Delta\hat{B}\Gamma + B\hat{\Delta}\Gamma + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow \Delta\hat{B}\Gamma + 65^o + 65^o = 180^o \Leftrightarrow \Delta\hat{B}\Gamma + 130^o = 180^o$

Άρα $\Delta\hat{B}\Gamma = 50^o = \hat{A}$

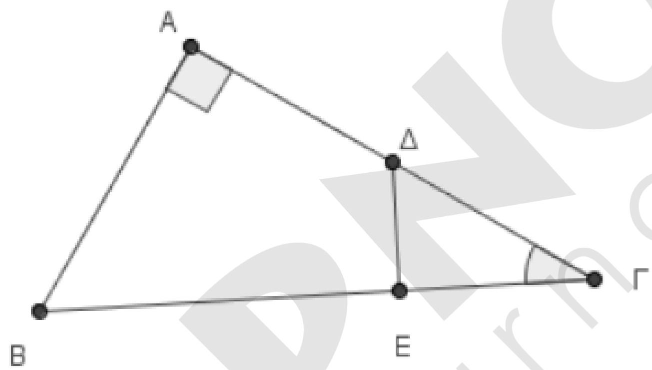
12. Θέμα 1603

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$) με $\hat{\Gamma} = 40^0$. Έστω Δ τυχαίο σημείο της πλευράς ΑΓ και $\Delta E \perp B\Gamma$.

Να υπολογίσετε:

α) τις γωνίες του τριγώνου ΔΕΓ. (Μονάδες 10)

β) τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΔΕΒ. (Μονάδες 15)



ΛΥΣΗ

α) Επειδή ΔΕ⊥ΒΓ είναι $\Delta\hat{E}\Gamma = 90^o$

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΔΕΓ, έχουμε:

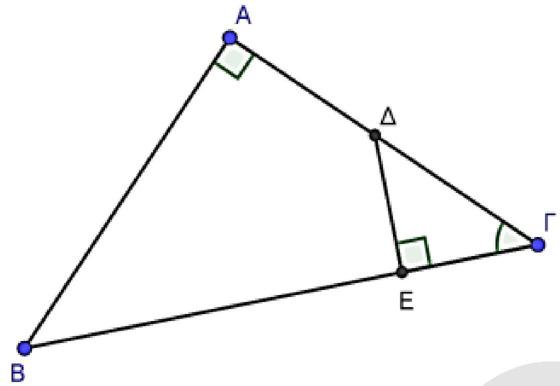
$E\hat{\Delta}\Gamma + \Delta\hat{E}\Gamma + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow E\hat{\Delta}\Gamma + 90^o + 40^o = 180^o \Leftrightarrow E\hat{\Delta}\Gamma = 50^o$

β) Είναι $\hat{A} = \hat{E} = 90^o$. Οι γωνίες $A\hat{\Delta}E$ και $E\hat{\Delta}\Gamma$ είναι παραπληρωματικές οπότε:

$A\hat{\Delta}E + E\hat{\Delta}\Gamma = 180^o \Leftrightarrow A\hat{\Delta}E + 50^o = 180^o \Leftrightarrow A\hat{\Delta}E = 130^o$

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, έχουμε:

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow 90^o + \hat{B} + 40^o = 180^o \Leftrightarrow \hat{B} = 50^o$



13. Θέμα 1604

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) με γωνία κορυφής $\hat{A} = 40^0$. Στην προέκταση της ΓΒ (προς το Β) παίρνουμε τμήμα ΒΔ τέτοιο ώστε $B\Delta = AB$.

Να υπολογίσετε

α) τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 10)

β) τη γωνία $\widehat{\Delta A \Gamma}$. (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ, ισχύει ότι $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ, έχουμε:

$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow 40^o + 2\widehat{B} = 180^o \Leftrightarrow 2\widehat{B} = 140^o \Leftrightarrow \widehat{B} = 70^o$

Τότε και $\widehat{\Gamma} = 70^o$.

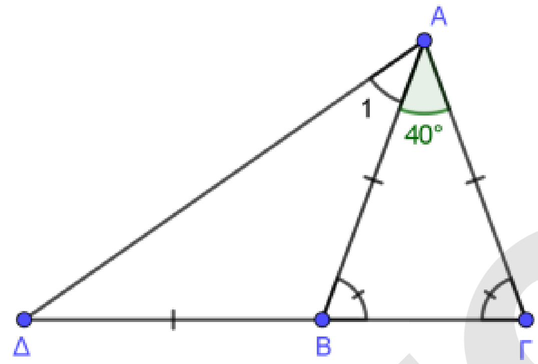
β) Επειδή ΒΔ = ΑΒ, το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές, άρα ισχύει $\widehat{\Delta} = \widehat{A}_1$.

Η γωνία $\widehat{B}$ του τριγώνου ΑΒΓ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΒΔ, οπότε ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών, δηλαδή

$\widehat{B} = \widehat{\Delta} + \widehat{A}_1 \Leftrightarrow 70^o = 2\widehat{\Delta} \Leftrightarrow \widehat{\Delta} = 35^o$ οπότε και $\widehat{A}_1 = 35^o$

Ισχύει ότι

$\Delta\widehat{A}\Gamma = \widehat{A} + \widehat{A}_1 = 40^o + 35^o = 75^o$



14. Θέμα 1607

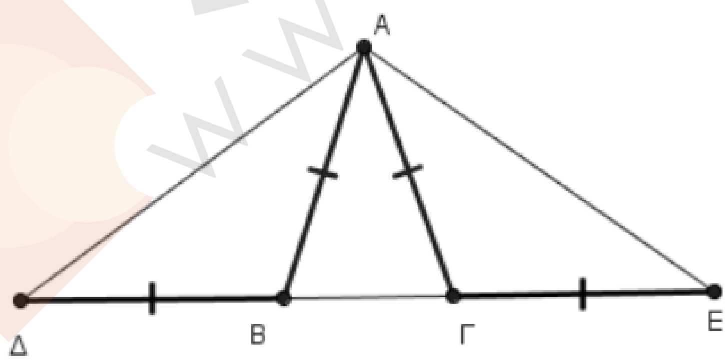
Στο παρακάτω σχήμα ισχύουν ΔΒ=ΒΑ=ΑΓ=ΓΕ και $\widehat{BA\Gamma} = 40^0$.

Να αποδείξετε ότι

α) $\widehat{AB\Delta} = \widehat{A\Gamma E} = 110^0$. (Μονάδες 10)

β) τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

γ) το τρίγωνο ΔΑΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 5)



ΛΥΣΗ

α) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές διότι ΑΒ = ΑΓ. Άρα $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ, βρίσκουμε:

$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow 40^o + 2\widehat{B} = 180^o \Leftrightarrow 2\widehat{B} = 140^o \Leftrightarrow \widehat{B} = 70^o$

Οι γωνίες $A\widehat{B}\Delta$ και $A\widehat{\Gamma}E$ είναι παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$, οπότε

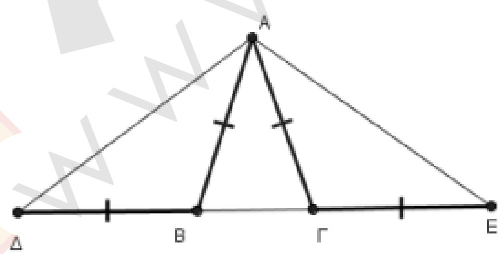
$A\widehat{B}\Delta = A\widehat{\Gamma}E = 180^o - 70^o = 110^o$

β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ έχουν:

- ΔΒ = ΓΕ, από υπόθεση
- ΒΑ = ΑΓ, από υπόθεση
- $A\widehat{B}\Delta = A\widehat{\Gamma}E = 110^o$

Από το κριτήριο Π – Γ – Π τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα.

γ) Από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΓΕ συμπεραίνουμε ότι οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $A\widehat{B}\Delta$ και $A\widehat{\Gamma}E$ είναι ίσες, δηλαδή ΑΔ = ΑΕ. Άρα το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.



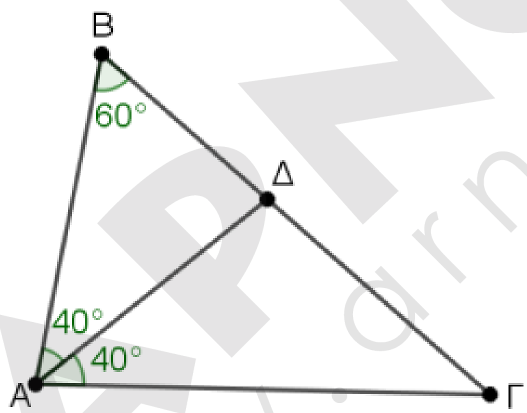
15. Θέμα 1623

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 80^\circ$ και $\hat{B} = 20^\circ + \hat{\Gamma}$, και ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$. (Μονάδες 12)

β) Φέρουμε από το Δ ευθεία παράλληλη στην ΑΒ, που τέμνει την ΑΓ στο Ε. Να υπολογίσετε τις γωνίες $A\hat{\Delta}E$, $E\hat{\Delta}\Gamma$. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ



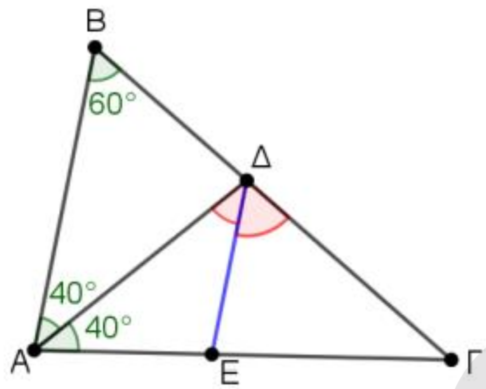
α) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ έχουμε:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 80^\circ + 20^\circ + \hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma} = 80^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 40^\circ$$

Άρα $\hat{B} = 20^\circ + \hat{\Gamma} = 20^\circ + 40^\circ = 60^\circ$.

β) Η ΑΔ διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$, άρα ισχύει ότι $B\hat{A}\Delta = \Gamma\hat{A}\Delta = \frac{\hat{A}}{2} = 40^\circ$.

Φέρνουμε την ΔΕ // ΑΒ.



Είναι $E\hat{\Delta}A = B\hat{A}\Delta = 40^o$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔΕ, ΑΒ που τέμνονται από την ΑΔ. Επίσης $E\hat{\Delta}\Gamma = \hat{B} = 60^o$, ως εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔΕ, ΑΒ που τέμνονται από την ΒΔ.

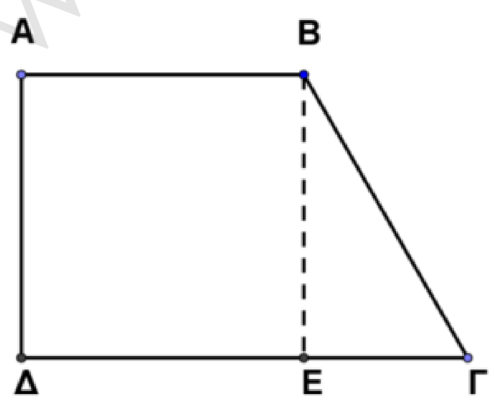
16. Θέμα 1635

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) , με ΑΒ=ΒΓ=4, $\hat{A} = 90^0$ και $\hat{\Gamma} = 60^0$. Δίνεται επίσης το ύψος ΒΕ από τη κορυφή Β.

α) Να υπολογίσετε τις άλλες δυο γωνίες του τραπεζίου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε 2ΕΓ=ΒΓ. (Μονάδες 9)

γ) Αν Μ,Ν τα μέσα των πλευρών ΑΔ, ΒΓ αντίστοιχα να βρείτε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΜΝ. (Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ

α) Είναι ΑΔ $\perp$ ΑΒ και ΑΒ // ΓΔ, άρα και ΑΔ $\perp$ ΓΔ, οπότε $\widehat{\Delta} = 90^o$.

Οι γωνίες $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΒΓ, οπότε είναι παραπληρωματικές, δηλαδή:

$\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow \widehat{B} + 60^o = 180^o \Leftrightarrow \widehat{B} = 120^o$.

β) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΒΕΓ, έχουμε:

$E\widehat{B}\Gamma + \widehat{\Gamma} = 90^o \Leftrightarrow E\widehat{B}\Gamma + 60^o = 90^o \Leftrightarrow E\widehat{B}\Gamma = 30^o$.

Άρα η απέναντι κάθετη πλευρά ΕΓ της $E\widehat{B}\Gamma$ στο τρίγωνο ΒΕΓ ισούται με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή: $E\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\Gamma = 2E\Gamma$.

γ) Είναι $E\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

Τα τμήματα ΑΔ και ΒΕ σχηματίζουν ορθές γωνίες με τις παράλληλες πλευρές ΑΒ και ΔΓ του τραπεζίου ΑΒΓΔ άρα το τετράπλευρο ΑΒΕΔ είναι ορθογώνιο, οπότε

ΑΒ = ΔΕ = 4.

Το τμήμα ΜΝ ενώνει τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών του τραπεζίου, οπότε είναι διάμεσος του τραπεζίου ΑΒΓΔ και ισχύει ότι:

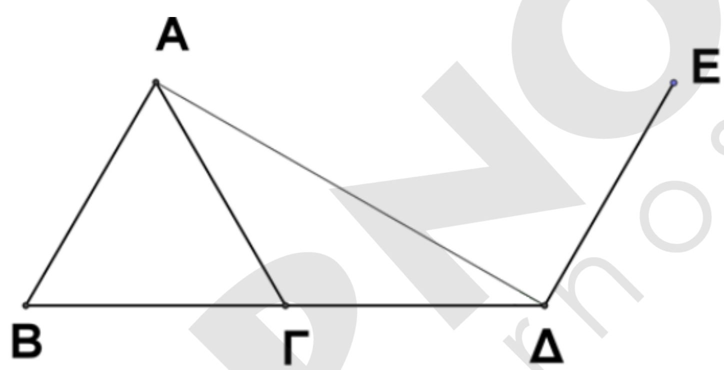
$MN = \frac{AB+\Gamma\Delta}{2} = \frac{AB+\Delta E+E\Gamma}{2} = \frac{4+4+2}{2} = 5$.

17. Θέμα 1637

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ . Στην προέκταση της ΒΓ (προς το μέρος του Γ) θεωρούμε τμήμα ΓΔ=ΒΓ. Φέρουμε τμήμα ΔΕ κάθετο στην ΑΔ στο σημείο της Δ , τέτοιο ώστε ΔΕ=ΒΓ. (Α και Ε στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ΒΔ).

α) Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΔ. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι ΑΒΔΕ παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ

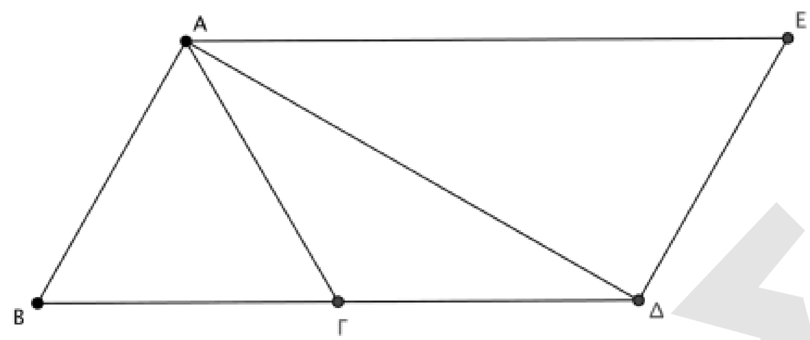
α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, ισχύει ότι $B\hat{A}\Gamma = A\hat{B}\Gamma = A\hat{\Gamma}B = 60^o$. Τότε $A\hat{\Gamma}\Delta = 180^o - A\hat{\Gamma}B = 120^o$.

Επειδή ΓΔ = ΒΓ = ΑΓ, το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισοσκελές, άρα $\Gamma\hat{A}\Delta = A\hat{\Delta}\Gamma$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΓΔ έχουμε:

$\Gamma\hat{A}\Delta + A\hat{\Gamma}\Delta + A\hat{\Delta}\Gamma = 180^o \Leftrightarrow 2A\hat{\Delta}\Gamma + 120^o = 180^o \Leftrightarrow 2A\hat{\Delta}\Gamma = 60^o \Leftrightarrow A\hat{\Delta}\Gamma = 30^o$

άρα και $\Gamma\hat{A}\Delta = 30^o$. Τότε: $B\hat{A}\Delta = B\hat{A}\Gamma + \Gamma\hat{A}\Delta = 60^o + 30^o = 90^o$.



β) Επειδή, ΑΒ ⊥ ΑΔ και ΕΔ ⊥ ΑΔ είναι ΑΒ // ΕΔ.

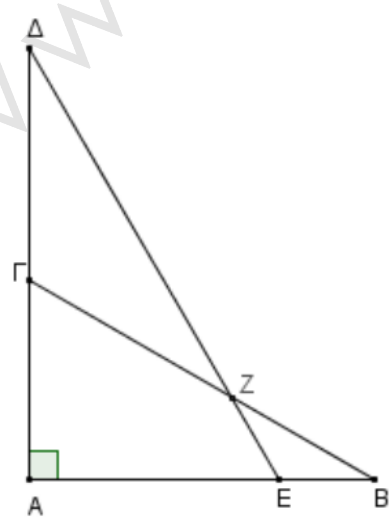
Όμως ΑΒ = ΒΓ = ΕΔ και ΑΒ // ΕΔ, οπότε το τετράπλευρο ΑΒΔΕ έχει τις απέναντι πλευρές του ΑΒ και ΔΕ ίσες και παράλληλες και συνεπώς είναι παραλληλόγραμμο.

18. Θέμα 1639

Στα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ (γωνία Α ορθή) του παρακάτω σχήματος ισχύει $\hat{B} = \hat{\Delta} = 30^o$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΕΖΓ. (Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΓΖΔ και ΕΒΖ είναι ισοσκελή. (Μονάδες 12)



ΛΥΣΗ

α) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ είναι:

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow 90^o + 30^o + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 60^o$.

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΔΕ, είναι:

$\hat{A} + \hat{\Delta} + A\hat{E}\Delta = 180^o \Leftrightarrow 90^o + 30^o + A\hat{E}\Delta = 180^o \Leftrightarrow A\hat{E}\Delta = 60^o$.

Η γωνία $A\hat{E}\Delta$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΕΖΒ, οπότε ισχύει:

$A\hat{E}\Delta = E\hat{Z}B + \hat{B} \Leftrightarrow 60^o = E\hat{Z}B + 30^o \Leftrightarrow E\hat{Z}B = 30^o$.

Οι γωνίες $\Gamma\hat{Z}E$ και $E\hat{Z}B$ είναι παραπληρωματικές οπότε ισχύει:

$\Gamma\hat{Z}E + E\hat{Z}B = 180^o \Leftrightarrow \Gamma\hat{Z}E + 30^o = 180^o \Leftrightarrow \Gamma\hat{Z}E = 150^o$.

β) Επειδή $E\hat{Z}B = \hat{B} = 30^o$, το τρίγωνο ΕΒΖ είναι ισοσκελές.

Επειδή οι γωνίες $E\hat{Z}B$ και $\Gamma\hat{Z}\Delta$ είναι κατακορυφήν, ισχύει ότι $\Gamma\hat{Z}\Delta = E\hat{Z}B = 30^o$.

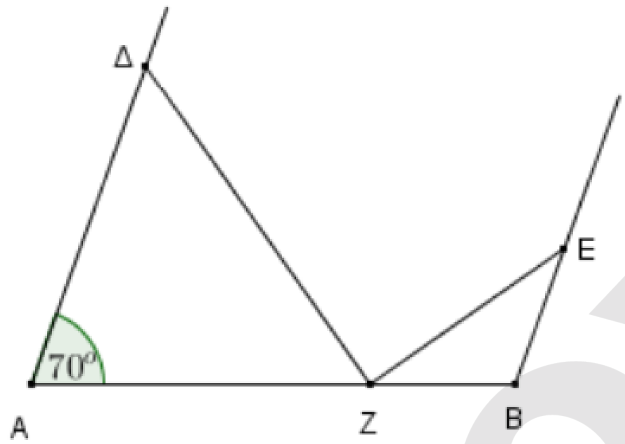
Άρα $\Gamma\hat{Z}\Delta = \hat{\Delta}$, οπότε το τρίγωνο ΓΖΔ είναι ισοσκελές.

19. Θέμα 1640

Στο παρακάτω σχήμα, οι ΑΔ και ΒΕ είναι παράλληλες. Επιπλέον ισχύουν ΑΔ=ΑΖ , ΒΕ=ΒΖ και $\hat{A} = 70^o$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων ΑΔΖ και ΒΖΕ. (Μονάδες 16)

β) Να αποδείξετε ότι $\Delta\hat{Z}E = 90^o$. (Μονάδες 9)



ΛΥΣΗ

α) Επειδή ΑΔ = ΔΖ, το τρίγωνο ΑΔΖ είναι ισοσκελές οπότε $\widehat{\Delta} = \Delta\hat{Z}A$ (1).

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΔΖ, και τη σχέση (1) έχουμε:

$\widehat{A} + \widehat{\Delta} + \Delta\hat{Z}A = 180^o \Leftrightarrow 70^o + 2\widehat{\Delta} = 180^o \Leftrightarrow 2\widehat{\Delta} = 110^o \Leftrightarrow \widehat{\Delta} = 55^o$. Οπότε $\Delta\hat{Z}A = \widehat{\Delta} = 55^o$.

Οι γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{B}$ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΔ, ΒΕ που τέμνονται από την ΑΒ, οπότε είναι παραπληρωματικές. Άρα:

$\widehat{A} + \widehat{B} = 180^o \Leftrightarrow 70^o + \widehat{B} = 180^o \Leftrightarrow \widehat{B} = 110^o$.

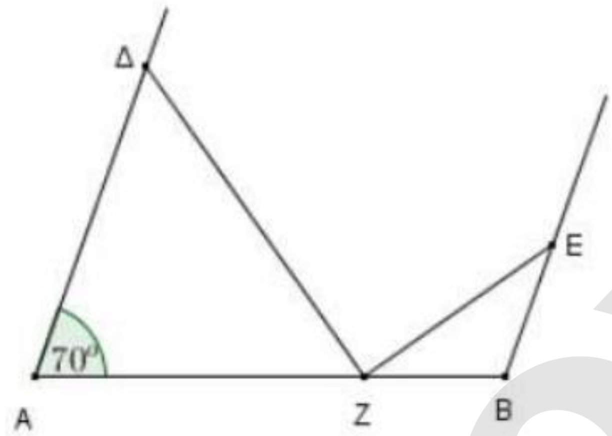
Επειδή, ΒΕ = ΒΖ, το τρίγωνο ΒΕΖ είναι ισοσκελές, άρα $E\hat{Z}B = \hat{E}$ (2).

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΒΕΖ έχουμε:

$\widehat{B} + \hat{E} + E\hat{Z}B = 180^o \overset{(2)}{\Leftrightarrow} 110^o + 2\hat{E} = 180^o \Leftrightarrow 2\hat{E} = 70^o \Leftrightarrow \hat{E} = 35^o$.

Οπότε $E\hat{Z}B = \hat{E} = 35^o$.

β) Ισχύει ότι: $\Delta\hat{Z}E = 180^o - \Delta\hat{Z}A - E\hat{Z}B = 180^o - 55^o - 35^o = 90^o$.



20. Θέμα 1641

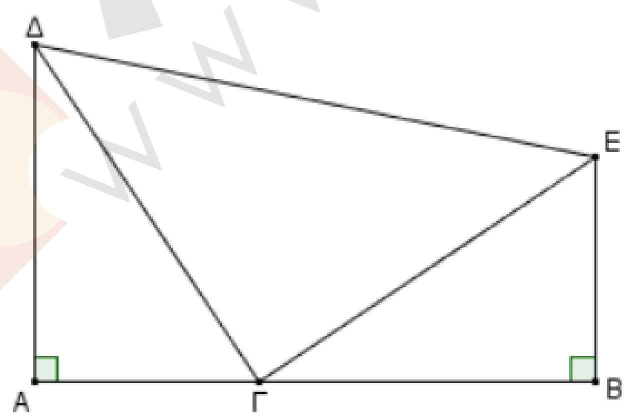
Στο παρακάτω σχήμα οι γωνίες $\hat{A}, \hat{B}$ είναι ορθές και επιπλέον ΑΔ=ΒΓ και ΑΓ=ΒΕ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΒΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) Αν η γωνία $E\hat{\Gamma}B = 40^o$ τότε το τρίγωνο ΔΓΕ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

(Μονάδες 12)



ΛΥΣΗ

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΓΔ και ΒΓΕ έχουν:

ΑΔ = ΒΓ, από υπόθεση

ΑΓ = ΒΕ , από υπόθεση

Οπότε τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΒΓΕ είναι ίσα αφού έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες .

β) Από την ισότητα των τριγώνων ΑΓΔ και ΒΓΕ προκύπτει ότι ΔΓ = ΓΕ, οπότε το τρίγωνο ΔΓΕ είναι ισοσκελές. Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΒΓΕ είναι:

$E\hat{\Gamma}B + \hat{B} + B\hat{E}\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 40^\circ + 90^\circ + B\hat{E}\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow B\hat{E}\Gamma = 50^\circ$.

Από την ισότητα των τριγώνων ΑΓΔ και ΒΓΕ προκύπτει ότι $\Delta\hat{\Gamma}A = B\hat{E}\Gamma$ (ως απέναντι των ίσων πλευρών ΑΔ και ΒΓ). Άρα $\Delta\hat{\Gamma}A = B\hat{E}\Gamma = 50^\circ$.

Ισχύει ότι:

$\Delta\hat{\Gamma}A + \Delta\hat{\Gamma}E + E\hat{\Gamma}B = 180^\circ \Leftrightarrow 50^\circ + \Delta\hat{\Gamma}E + 40^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \Delta\hat{\Gamma}E = 90^\circ$.

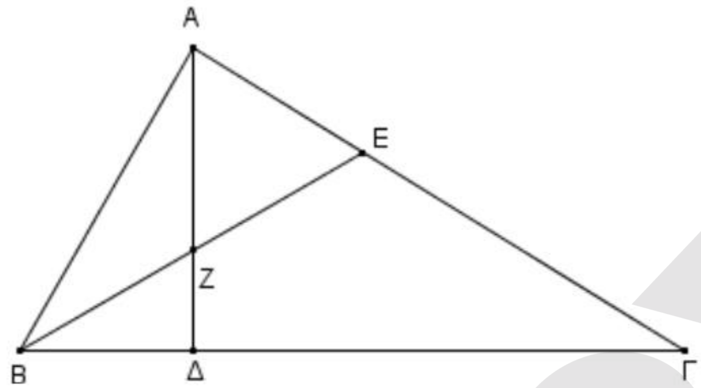
Άρα το τρίγωνο ΔΓΕ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

21. Θέμα 1645

Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2\hat{B}$ και $\hat{A} = 3\hat{\Gamma}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία Β είναι 60° . (Μονάδες 10)

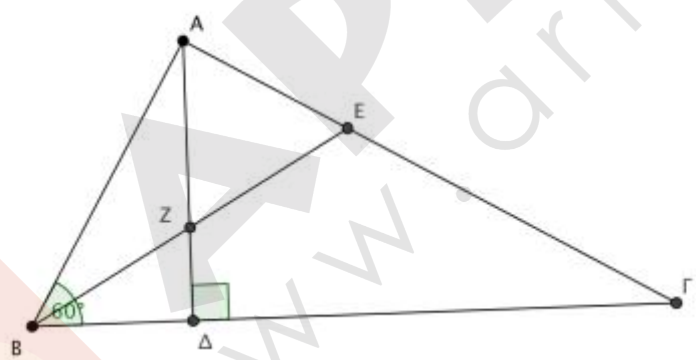
β) Αν το ύψος του ΑΔ και η διχοτόμος του ΒΕ τέμνονται στο σημείο Ζ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 15)



ΛΥΣΗ

α) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ έχουμε:

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow \hat{B} + 2\hat{B} = 180^o \Leftrightarrow 3\hat{B} = 180^o \Leftrightarrow \hat{B} = 60^o$.



β) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ έχουμε:

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow 3\hat{\Gamma} + 60^o + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow 4\hat{\Gamma} = 120^o \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 30^o$.

Τότε: $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2\hat{B} \Leftrightarrow \hat{A} + 30^o = 2 \cdot 60^o \Leftrightarrow \hat{A} = 90^o$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΕ έχουμε:

$\hat{A} + A\hat{B}E + A\hat{E}B = 180^o \Leftrightarrow 90^o + \frac{\hat{B}}{2} + A\hat{E}B = 180^o \Leftrightarrow \frac{60^o}{2} + A\hat{E}B = 90^o \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 30^o + A\hat{E}B = 90^o \Leftrightarrow A\hat{E}B = 60^o$.

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΔΓ έχουμε:

$\Gamma\hat{A}\Delta + \hat{\Delta} + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow \Gamma\hat{A}\Delta + 90^o + 30^o = 180^o \Leftrightarrow \Gamma\hat{A}\Delta + 120^o = 180^o \Leftrightarrow \Gamma\hat{A}\Delta = 60^o$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΖΕ έχουμε:

$Z\hat{A}E + A\hat{Z}E + A\hat{E}Z = 180^o \Leftrightarrow 60^o + A\hat{Z}E + 60^o = 180^o \Leftrightarrow 120^o + A\hat{Z}E = 180^o \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A\hat{Z}E = 60^o$.

Το τρίγωνο ΑΖΕ έχει όλες τις γωνίες του ίσες οπότε είναι ισόπλευρο.

22. Θέμα 1661

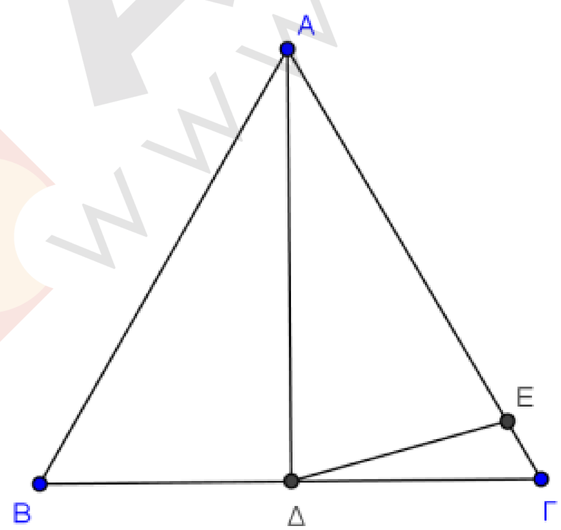
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και η διάμεσός του ΑΔ τέτοια ώστε $B\hat{A}\Delta = 30^o$.

Θεωρούμε σημείο Ε στην ΑΓ τέτοιο ώστε ΑΔ = ΑΕ.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΔΕ. (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία ΕΔΓ. (Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ

α) Επειδή ΑΒ =ΑΓ, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, άρα η διάμεσος ΑΔ είναι ύψος και διχοτόμος του τριγώνου.

Επειδή η ΑΔ είναι διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ, είναι $\Delta\widehat{A}\Gamma = B\widehat{A}\Delta = 30^o$, οπότε $\widehat{A} = 60^o$.

Ισχύει ότι:

$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow 60^o + \widehat{B} + \widehat{B} = 180^o \Leftrightarrow 2\widehat{B} = 120^o \Leftrightarrow \widehat{B} = 60^o$

Για το τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{\Gamma} = 60^o$, άρα είναι ισόπλευρο.

β) Επειδή ΑΔ=ΑΕ το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές, οπότε $A\widehat{\Delta}E = A\widehat{E}\Delta$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΔΕ, έχουμε:

$\Delta\widehat{A}\Gamma + A\widehat{\Delta}E + A\widehat{E}\Delta = 180^o \Leftrightarrow 30^o + 2A\widehat{\Delta}E = 180^o \Leftrightarrow A\widehat{\Delta}E = 75^o = A\widehat{E}\Delta$

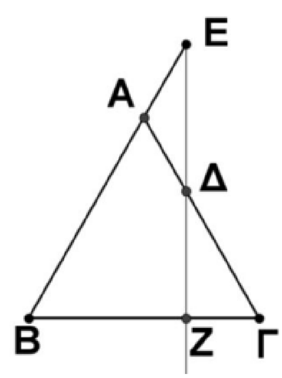
γ) $E\widehat{\Delta}\Gamma = A\widehat{\Delta}\Gamma - A\widehat{\Delta}E = 90^o - 75^o = 15^o$

23. Θέμα 1689

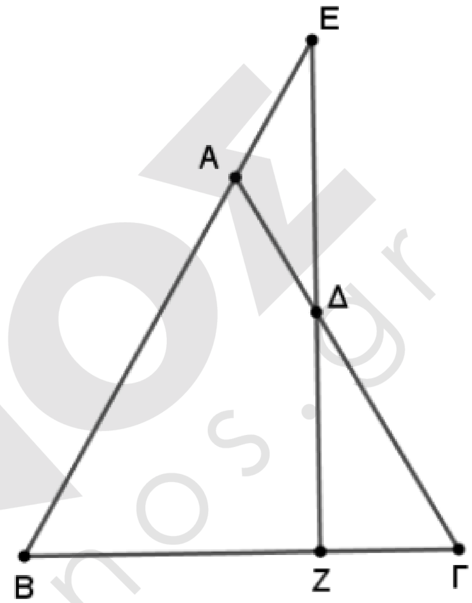
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Θεωρούμε σημείο Ε στην προέκταση της ΒΑ (προς το Α) και σημείο Δ στο εσωτερικό της πλευράς ΑΓ, ώστε ΑΕ=ΑΔ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΔΕ. (Μονάδες 10)

β) Αν Ζ είναι το σημείο τομής της προέκτασης της ΕΔ (προς το Δ) με την ΒΓ, να αποδείξετε ότι η ΕΖ είναι κάθετη στην ΒΓ. (Μονάδες 15)



ΛΥΣΗ



α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, είναι $\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = 60^o$.

Τότε $\Delta\hat{A}E = 180^o - \hat{A} = 180^o - 60^o = 120^o$.

Επειδή το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές, ισχύει ότι

$A\hat{\Delta}E = \hat{E}$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΔΕ έχουμε:

$A\hat{\Delta}E + \hat{E} + \Delta\hat{A}E = 180^o \Leftrightarrow 2A\hat{\Delta}E + 120^o = 180^o \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2A\hat{\Delta}E = 60^o \Leftrightarrow A\hat{\Delta}E = 30^o = \hat{E}$

β) Είναι $A\hat{\Delta}E = Z\hat{\Delta}\Gamma = 30^o$ ως κατακορυφήν και $\hat{\Gamma} = 60^o$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΔΖΓ προκύπτει ότι:

$Z\hat{\Delta}\Gamma + \Delta\hat{Z}\Gamma + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow 30^o + \Delta\hat{Z}\Gamma + 60^o = 180^o \Leftrightarrow \Delta\hat{Z}\Gamma = 90^o$, άρα $EZ \perp B\Gamma$.

24. Θέμα 1693

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$) και ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας Α. Από το σημείο Δ φέρουμε την παράλληλη προς την ΑΒ που τέμνει την ΑΓ στο Ε.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΕΔΓ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 9)

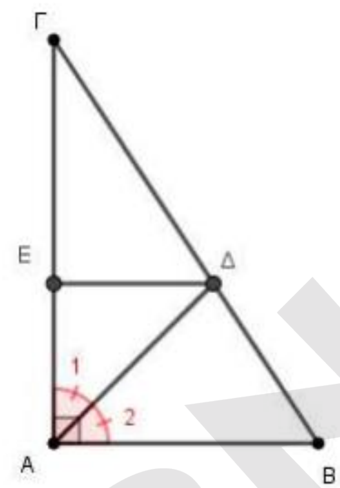
β) Να υπολογίσετε τη γωνία ΑΔΕ. (Μονάδες 9)

γ) Αν η γωνία $\hat{B}$ είναι 20 μοίρες μεγαλύτερη της γωνίας $\hat{\Gamma}$, να υπολογίσετε τη γωνία $E\hat{\Delta}\Gamma$.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} = 90^0$, ΑΔ διχοτόμος της γωνίας Α και ΔΕ παράλληλη στην ΑΒ.



α) Η ΕΔ είναι παράλληλη στην ΑΒ και η ΑΓ είναι κάθετη στην ΑΒ, αφού είναι $\widehat{A} = 90^0$. Οπότε, η ΑΓ θα είναι κάθετη και στην παράλληλή της ΕΔ. Άρα, το τρίγωνο ΕΔΓ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία ΓΕΔ.

β) Επειδή ΑΔ διχοτόμος της ορθής γωνίας $\widehat{A}$, ισχύει ότι $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = \frac{A}{2} = 45^o$

Αφού είναι $\widehat{A}_2 = 45^o$ τότε θα είναι και $Α\widehat{Δ}Ε = 45^o$, ως γωνίες εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΕΔ και ΑΒ με τέμνουσα την ΑΔ.

γ) Έστω ότι η $\widehat{B}$ είναι 20^0 μεγαλύτερη της $\widehat{Γ}$, δηλαδή $\widehat{B} = \widehat{Γ} + 20^o$ (1)

Για τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ισχύει $\widehat{B} + \widehat{Γ} = 90^o$ (2)

Οπότε, λόγω της σχέσης (1), η σχέση (2) γίνεται:

$\widehat{Γ} + 20^o + \widehat{Γ} = 90^o \Leftrightarrow 2\widehat{Γ} = 70^o \Leftrightarrow \widehat{Γ} = 35^o$. Τότε $\widehat{B} = \widehat{Γ} + 20^o = 55^o$.

Οι $Ε\widehat{Δ}Γ$ και $\widehat{B}$ είναι ίσες, ως γωνίες εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔΕ, ΑΒ με τέμνουσα την ΒΓ. Άρα, $Ε\widehat{Δ}Γ = \widehat{B} = 55^o$.

25. Θέμα 1699

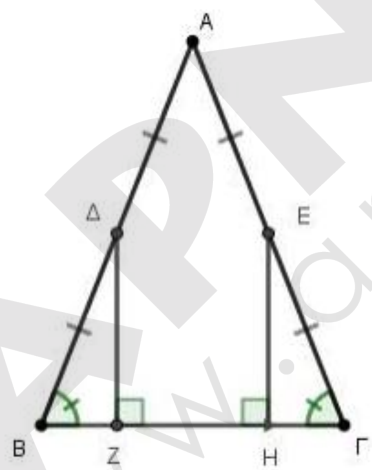
Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) .

α) Να αποδείξετε ότι τα μέσα Δ και Ε των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ισαπέχουν από τη βάση ΒΓ. (Μονάδες 13)

β) Αν $\hat{A} = 75° + \hat{B}$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ.



α) Έστω Δ, Ε τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ και ΔΖ, ΕΗ οι αποστάσεις των Ε, Ζ από τη βάση ΒΓ.

Τα τρίγωνα ΔΖΒ και ΕΗΓ έχουν:

- $B\hat{Z}\Delta = \Gamma\hat{H}E = 90^0$ αφού ΔΖ και ΕΗ ως αποστάσεις, από την υπόθεση, είναι κάθετες στη ΒΓ.
- ΔΒ = ΕΓ ως μισά των ίσων πλευρών ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ
- $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ ως προσκείμενες γωνίες στη βάση ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ

Άρα τα τρίγωνα ΔΖΒ και ΕΗΓ είναι ορθογώνια που έχουν μια κάθετη πλευρά και την προσκείμενη σε αυτήν οξεία γωνία ίσες μία προς μία, άρα είναι ίσα.

Οπότε έχουν και ΔΖ = ΕΗ ως πλευρές απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ αντίστοιχα.

Δηλαδή, τα σημεία Δ και Ε ισαπέχουν από τη βάση ΒΓ.

β) Για τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ έχουμε:

$\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{\Gamma}=180^o \Leftrightarrow 75^o+\ \widehat{B}+\widehat{B}+\widehat{B}=180^o \Leftrightarrow 3\widehat{B}=105^o$. Άρα $\widehat{B}=35^o$.

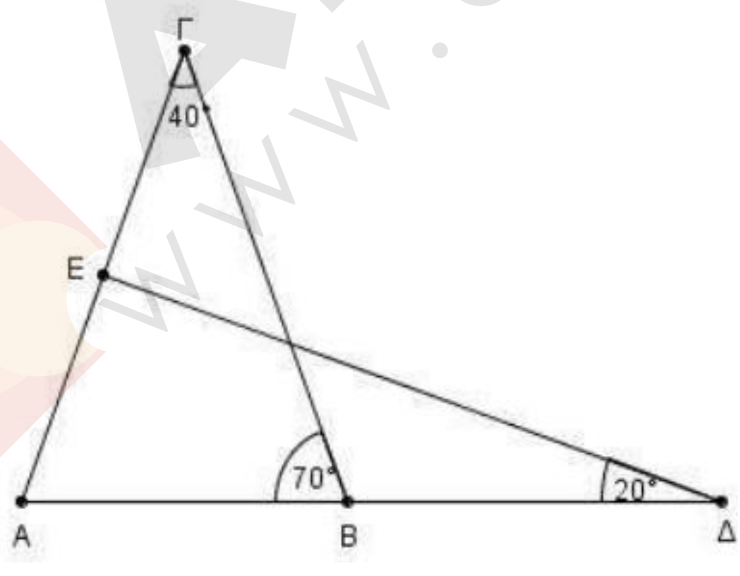
Οπότε $\widehat{A}=75^o+35^o=110^o$.

26. Θέμα 1700

Με βάση τα δεδομένα του σχήματος, να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, (Μονάδες 12)

β) η γωνία ΑΕΔ είναι ορθή. (Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ

α) Για τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ ισχύει: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o$ (1) και αφού $\hat{B} = 70^0$ και $\hat{\Gamma} = 40^o$ τότε από τη σχέση (1) βρίσκουμε ότι $\hat{A} = 70^o$.

Επειδή είναι $\hat{A} = 70^o = \hat{B}$ άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές τις ΓΑ και ΓΒ.

β) Για τις γωνίες του τριγώνου ΑΕΔ έχουμε:

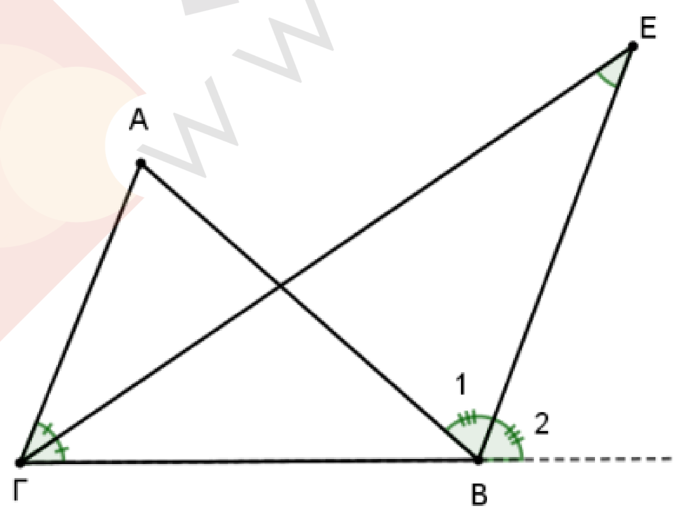
$A\hat{E}\Delta + \hat{A} + \hat{\Delta} = 180^o$ (2) και αφού $\hat{\Delta} = 20^0$ ως δεδομένο και $\hat{A} = 70^o$ από α) ερώτημα, τότε από τη σχέση (2) βρίσκουμε ότι $A\hat{E}\Delta = 90^o$.

27. Θέμα 1851

Σε τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ η προέκταση της διχοτόμου της $\hat{\Gamma}$ και της εξωτερικής γωνίας του $\hat{B}$, τέμνονται στο Ε. Δίνεται ότι $A\hat{B}E = 70^o = 2\Gamma\hat{E}B$

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΓΒΕ είναι ισοσκελές (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$. (Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ

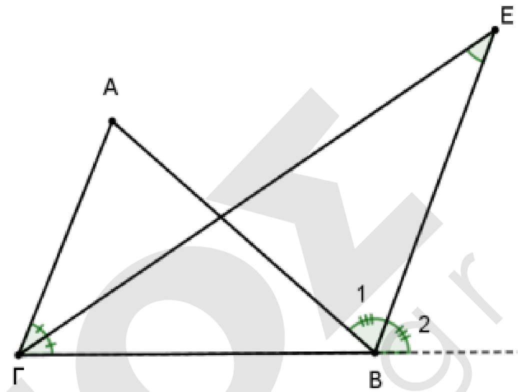
α) Επειδή $\widehat{B}_1 = 70^o$, άρα $2\ \Gamma\hat{E}B = 70^o$, άρα $\Gamma\hat{E}B=35^o$.

Η ΒΕ είναι διχοτόμος της $\widehat{B}_{\varepsilon\xi}$ και $\widehat{B}_1 = 70^o$,

άρα $\widehat{B}_2 = 70^o$. Η γωνία $\widehat{B}_2$ είναι η εξωτερική γωνία του τριγώνου $\overset{\Delta}{E B\Gamma}$, άρα

$\widehat{B}_2 = E\hat{\Gamma}B + \Gamma\hat{E}B \Leftrightarrow 70^o = E\hat{\Gamma}B + 35^o \Leftrightarrow E\hat{\Gamma}B = 35^o$.

Δηλαδή $E\hat{\Gamma}B = \Gamma\hat{E}B = 35^o$, άρα το τρίγωνο ΓΒΕ είναι ισοσκελές.



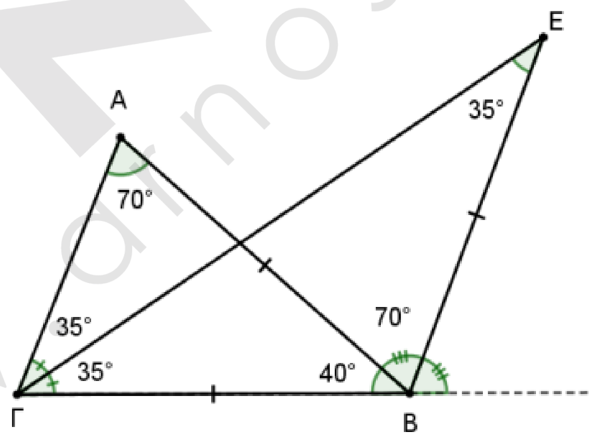
β) Στο τρίγωνο ΑΒΓ, η ΒΕ είναι εξωτερική διχοτόμος, άρα $\widehat{B}_{\varepsilon\xi} = 2\widehat{B}_1 = 2\cdot 70^o = 140^o$. Άρα $\widehat{B} = 180^o - 140^o = 40^o$.

Επειδή η ΓΕ διχοτομεί τη γωνία $\hat{\Gamma}$,

είναι $\hat{\Gamma} = 2E\hat{\Gamma}B = 70^o$

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ, είναι:

$\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow \hat{A}+40^o+70^o=180^o \Leftrightarrow \hat{A} = 70^o$



28. Θέμα 12704

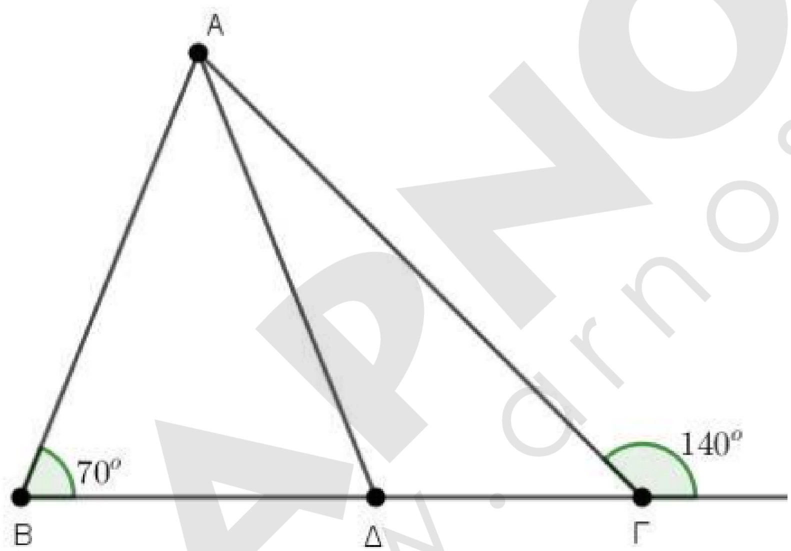
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B}=70^o$ και $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi\omega\tau}=140^o$.

Στην πλευρά ΒΓ θεωρούμε εσωτερικό σημείο Δ, ώστε ΑΔ = ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:

α) $B\hat{A}\Delta=40^o$. (Μονάδες 9)

β) $A\hat{\Delta}\Gamma = 110^0$. (Μονάδες 7)

γ) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)



ΛΥΣΗ

α) Από την υπόθεση έχουμε ΑΔ = ΑΒ, οπότε το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές.

Θα είναι $A\hat{B}\Delta$ = $A\hat{\Delta}B$ ως γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΔ και ΑΒ αντίστοιχα. Άρα $A\hat{\Delta}B=70^o$.

Στο τρίγωνο ΑΒΔ είναι: $B\hat{A}\Delta+A\hat{B}\Delta+A\hat{\Delta}B=180^o$.

Άρα $B\hat{A}\Delta+70^o+70^o=180^o$, δηλαδή $B\hat{A}\Delta=180^o-140^o = 40^o$.

β) Στο τρίγωνο ΑΒΔ ισχύει ότι η εξωτερική γωνία $A\hat{\Delta}\Gamma = A\hat{B}\Delta + B\hat{A}\Delta$ = 70° + 40° = 110°.

γ) $A\hat{\Gamma}B$=180°- 140° = 40°, ως παραπληρωματική της $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi\omega\tau}$.

Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι: $B\hat{A}\Gamma + A\hat{B}\Gamma + A\hat{\Gamma}B$ = 180°.

Επομένως η γωνία $B\hat{A}\Gamma = 180^o - A\hat{B}\Gamma - A\hat{\Gamma}B =$ 180° – 70° – 40° = 70°.

Άρα $B\hat{A}\Gamma = 70^o = A\hat{B}\Gamma$, δηλαδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, γιατί έχει δύο γωνίες ίσες.

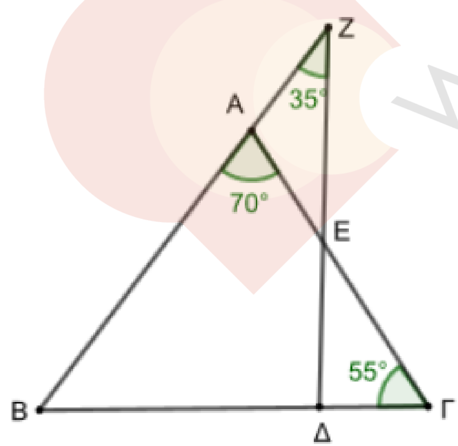
29. Θέμα 12707

Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}$ =70° και $\hat{\Gamma}$ =55°. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΑ προς το σημείο Α και παίρνουμε στην προέκταση σημείο Ζ ώστε $B\hat{Z}\Delta$ =35°, όπου Δ εσωτερικό σημείο της ΒΓ. Η ΖΔ τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) $Z\hat{\Delta}B$ = 90°. (Μονάδες 8)

γ) το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)



ΛΥΣΗ

α) Για τις γωνίες Α, Β και Γ του τριγώνου ΑΒΓ έχουμε $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180°$.

Όμως, $\hat{A}$ =70° και $\hat{\Gamma}$ =55°, επομένως $70° + \hat{B} + 55° = 180°$ ή ισοδύναμα

$\hat{B} = 180° - 70° - 55°$ και τελικά $\hat{B} = 55°$.

Άρα $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 55°$ και συνεπώς το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ.

β) Στο τρίγωνο ΒΖΔ έχουμε $\hat{B} + B\hat{Z}\Delta + Z\hat{\Delta}B = 180°$ ή ισοδύναμα

$55° + 35° + Z\hat{\Delta}B = 180°$ οπότε $Z\hat{\Delta}B = 180° - 90° = 90°$.

γ) Η γωνία Α του τριγώνου ΑΒΓ είναι εξωτερική του τριγώνου ΑΖΕ. Επομένως,

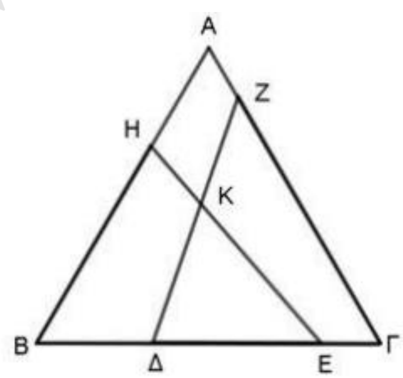
$\hat{A} = A\hat{E}Z + A\hat{Z}E$ ή ισοδύναμα $70° = A\hat{E}Z + 35°$, οπότε $A\hat{E}Z = 35° = A\hat{Z}E$. Άρα το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισοσκελές.

30. Θέμα 12708

Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Στις πλευρές ΒΓ και ΓΑ θεωρούμε σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα ώστε ΒΕ = ΓΖ. Στις πλευρές ΑΒ και ΓΒ θεωρούμε σημεία Η και Δ αντίστοιχα ώστε ΒΗ = ΓΔ. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΔΖ και ΕΗ τέμνονται στο σημείο Κ το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) ΕΗ = ΔΖ και $B\hat{H}E = \Gamma\hat{\Delta}Z$. (Μονάδες 12)

β) τα τρίγωνα ΒΕΗ και ΚΕΔ έχουν ίσες γωνίες μία προς μία. (Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ

α) Τα τρίγωνα ΒΕΗ και ΓΖΔ έχουν:

- ΒΕ = ΓΖ, από την υπόθεση
- ΒΗ = ΓΔ, από την υπόθεση
- $\hat{B}$ = $\hat{Γ}$= 60°, αφού το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

Από το κριτήριο ισότητας Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, επομένως, ΕΗ = ΖΔ και απέναντι από τις ίσες πλευρές ΒΕ, ΓΖ βρίσκονται αντίστοιχα οι ίσες γωνίες ΒΗΕ, ΓΔΖ.

β) Από την ισότητα των τριγώνων ΒΕΗ και ΓΖΔ προκύπτει ότι απέναντι από τις ίσες πλευρές ΒΕ και ΓΖ βρίσκονται ίσες γωνίες, δηλαδή $\hat{H}$ = $\hat{Δ}$.

Παρατηρούμε λοιπόν, ότι τα τρίγωνα ΚΕΔ και ΒΕΗ έχουν τη γωνία $\hat{E}$ κοινή και

$\hat{Δ} = \hat{H}$.

Επομένως, έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες, δηλαδή, $Δ\hat{K}E = \hat{B}$

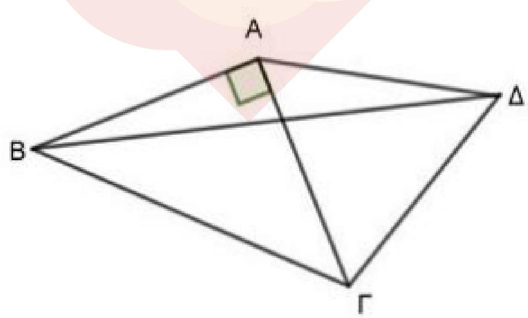
31. Θέμα 12709

Δίνεται το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $\hat{A}$ =90°. Εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΓΔ.

α) Να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών Β, Γ του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας ΑΒΔ. (Μονάδες 12)



ΛΥΣΗ

α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε $\hat{A}$ =90°, οπότε $\hat{B}$ + $\hat{\Gamma}$= 90° και επειδή είναι και ισοσκελές έχουμε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$. Άρα 2$\hat{B}$ = 90° ή $\hat{B}$ = 45°, οπότε και $\hat{\Gamma}$ = 45°.

β) Το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισόπλευρο οπότε ΑΓ = ΑΔ = ΔΓ.

Έχουμε ΑΒ = ΑΓ και ΑΓ = ΑΔ, οπότε ΑΒ = ΑΔ. Άρα το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές.

γ) Επειδή το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισόπλευρο έχουμε $\Delta\hat{A}\Gamma$ =60°.

Οπότε $B\hat{A}\Delta = B\hat{A}\Gamma + \Delta\hat{A}\Gamma$ = 90° + 60° = 150°.

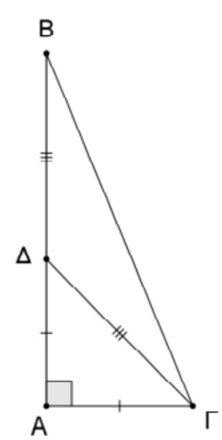
Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε $A\hat{B}\Delta = A\hat{\Delta}B$ διότι ΑΒ = ΑΔ, οπότε από το άθροισμα των γωνιών του προκύπτει $A\hat{B}\Delta + A\hat{\Delta}B + B\hat{A}\Delta$ = 180° ή $2A\hat{B}\Delta$ + 150° = 180° ή $2A\hat{B}\Delta$ = 30° ή $A\hat{B}\Delta$ = 15°.

32. Θέμα 13442

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$. Στην πλευρά του ΑΒ θεωρούμε σημείο Δ ώστε ΒΔ = ΔΓ και ΑΔ = ΑΓ.

α) Να αποδείξετε ότι $A\hat{\Delta}\Gamma = 45^\circ$. (Μονάδες 12)

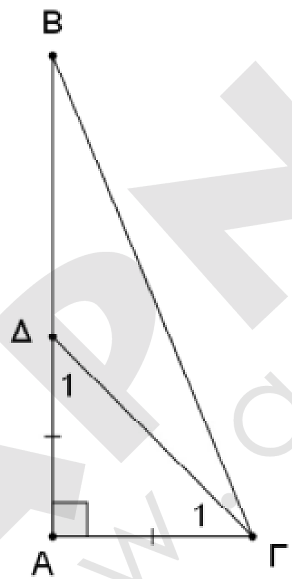
β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{B}$. (Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ

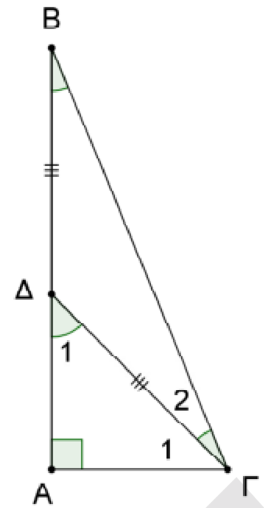
α) Έστω $\hat{\Delta}_1 = A\hat{\Delta}\Gamma$. Από τα δεδομένα έχουμε $A\Gamma = A\Delta$, άρα το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισοσκελές με βάση ΓΔ, οπότε οι προσκείμενες στη βάση γωνίες του είναι ίσες, δηλαδή $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Delta}_1$ (1).

Όμως οι γωνίες $\hat{\Gamma}_1, \hat{\Delta}_1$ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΓΔ είναι συμπληρωματικές. Χρησιμοποιώντας την ισότητα (1) προκύπτει ότι $\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_1 = 90^o$ ή $\hat{\Delta}_1 = 45^o$.



β) Από τα δεδομένα έχουμε $B\Delta = \Delta\Gamma$, άρα το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ισοσκελές με βάση ΒΓ, οπότε οι προσκείμενες στη βάση γωνίες του είναι ίσες, δηλαδή $\hat{B} = \hat{\Gamma}_2$ (2).

Η γωνία $\hat{\Delta}_1$ είναι εξωτερική του τριγώνου ΒΓΔ άρα $\hat{\Delta}_1 = \hat{B} + \hat{\Gamma}_2$. Έτσι λόγω του ερωτήματος α) και της ισότητας (2) θα είναι $\hat{B} + \hat{B} = 45^o$ ή $\hat{B} = 22{,}5^o$.



33. Θέμα 13443

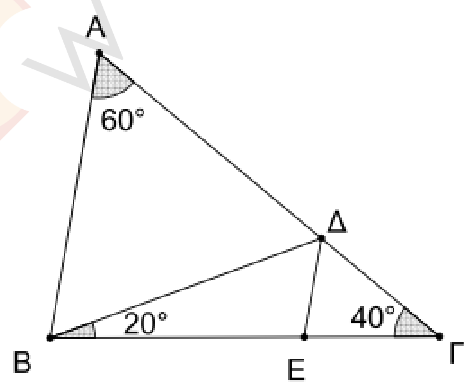
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} = 60^o$ και $\widehat{\Gamma} = 40^o$. Στην πλευρά ΑΓ θεωρούμε σημείο Δ, ώστε $\Gamma\widehat{B}\Delta = 20^o$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 10)

β) Η παράλληλη από το Δ προς την ΑΒ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

i. $B\widehat{\Delta}E = 60^o$. (Μονάδες 8)

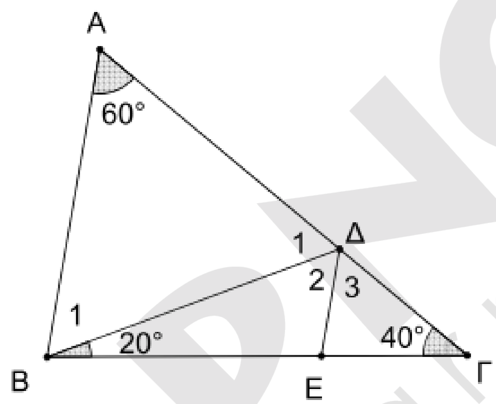
ii. Η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $B\widehat{\Delta}\Gamma$. (Μονάδες 7)



ΛΥΣΗ

α) Η γωνία $\hat{\Delta}_1$ είναι εξωτερική του τριγώνου ΒΓΔ, άρα ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών, δηλαδή $\hat{\Delta}_1 = \Gamma\hat{B}\Delta + \hat{\Gamma} = 20^o + 40^o = 60^o$.

Από την υπόθεση και το ερώτημα α) έχουμε ότι οι γωνίες $\hat{A}, \hat{\Delta}_1$ του τριγώνου ΑΒΔ είναι 60^o. Αυτό σημαίνει ότι και η τρίτη γωνία $\hat{B}_1$ θα είναι 60^o, οπότε το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο.



β) i. Είναι $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_2$ ως εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων ΑΒ, ΔΕ με τέμνουσα την ΒΔ. Όμως από το ερώτημα α) είναι $\hat{B}_1 = 60^o$, άρα $\hat{\Delta}_2 = 60^o$ ή $B\hat{\Delta}E = 60^o$.

ii. Είναι $\hat{A} = \hat{\Delta}_3$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες των παραλλήλων ΑΒ, ΔΕ με τέμνουσα την ΑΓ. Όμως $\hat{A} = 60^o$, άρα $\hat{\Delta}_3 = 60^o$.

Αφού $\hat{\Delta}_2 = \hat{\Delta}_3 = 60^o$, η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $B\hat{\Delta}\Gamma$.

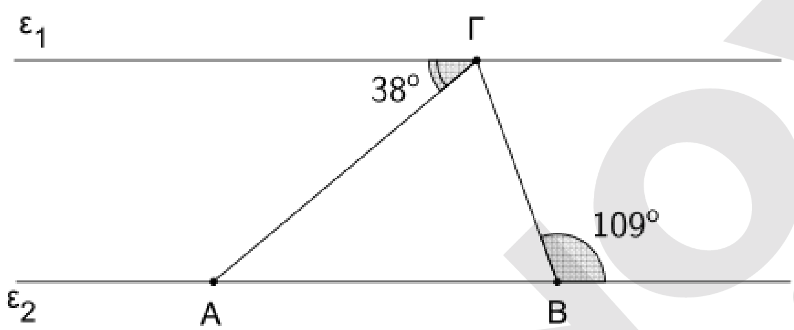
34. Θέμα 13535

Στο παρακάτω σχήμα η ευθεία ε_1 διέρχεται από την κορυφή Γ του τριγώνου ΑΒΓ και είναι παράλληλη στην ευθεία ε_2 που ορίζεται από τις κορυφές του Α και Β.

Αξιοποιώντας τα δεδομένα του σχήματος:

α) να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 15)

β) να δικαιολογήσετε γιατί το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές και να εξηγήσετε ποιες είναι οι ίσες πλευρές του. (Μονάδες 10)



ΛΥΣΗ

α) Είναι $\widehat{A} = 38^o$ (1) ως εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων ε_1, ε_2 που τέμνονται από την ΑΓ.

Οι γωνίες $\widehat{B}$ και 109^o είναι παραπληρωματικές, άρα $\widehat{B} + 109^o = 180^o$ ή $\widehat{B} = 71^o$ (2).

Το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ είναι $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^o$. Χρησιμοποιώντας τις ισότητες (1) και (2) έχουμε ότι $38^o + 71^o + \widehat{\Gamma} = 180^o$ ή $\widehat{\Gamma} = 180^o - 109^o$ ή $\widehat{\Gamma} = 71^o$.

β) Από το ερώτημα α) έχουμε ότι $\widehat{B} = \widehat{\Gamma} = 71^o$, άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, γιατί δύο γωνίες του είναι ίσες. Οι ίσες πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου είναι οι ΑΓ, ΑΒ, γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{B}, \widehat{\Gamma}$ αντίστοιχα.

35. Θέμα 13654

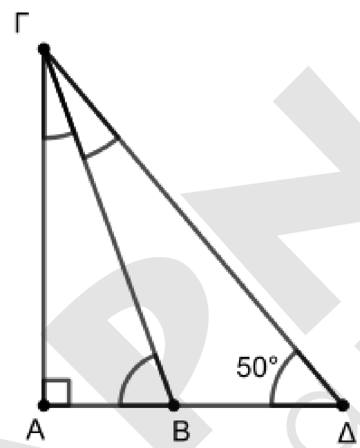
Στο ακόλουθο σχήμα είναι $\widehat{A} = 90^o$, $A\widehat{B}\Gamma - A\widehat{\Gamma}B = 50^o$ και $A\widehat{\Delta}\Gamma = 50^o$.

α) Να υπολογίσετε τις οξείες γωνίες $A\widehat{B}\Gamma$ και $A\widehat{\Gamma}B$ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η ΓΒ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\widehat{\Gamma}\Delta$.

(Μονάδες 15)



ΛΥΣΗ

Σύμφωνα με την υπόθεση είναι $A\widehat{B}\Gamma = A\widehat{\Gamma}B + 50^o$.

Για τις οξείες γωνίες $A\widehat{B}\Gamma$ και $A\widehat{\Gamma}B$ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ισχύει:

$A\widehat{B}\Gamma + A\widehat{\Gamma}B = 90^o$ ή $A\widehat{\Gamma}B + 50^o + A\widehat{\Gamma}B = 90^o$ ή $2A\widehat{\Gamma}B = 40^o$.

Άρα, $A\widehat{\Gamma}B = 20^o$ κι επομένως $A\widehat{B}\Gamma = 20^o + 50^o = 70^o$.

β) Η γωνία $\Delta\widehat{B}A$ είναι ευθεία, οπότε:

$\Delta\widehat{B}\Gamma + \Gamma\widehat{B}A = 180^o$ ή $\Delta\widehat{B}\Gamma + 70^o = 180^o$.

Άρα, $\Delta\widehat{B}\Gamma = 180^o - 70^o = 110^o$.

Στο τρίγωνο ΔΒΓ ισχύει:

$\Gamma\hat{\Delta}B + \Delta\hat{B}\Gamma + B\hat{\Gamma}\Delta = 180^o$ ή $50^o + 110^o + B\hat{\Gamma}\Delta = 180^o$.

Άρα, $B\hat{\Gamma}\Delta = 180^o - 50^o - 110^o = 20^o$.

Αφού $A\hat{\Gamma}B = B\hat{\Gamma}\Delta = 20^o$, συμπεραίνουμε ότι η ΓΒ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{\Gamma}\Delta$.

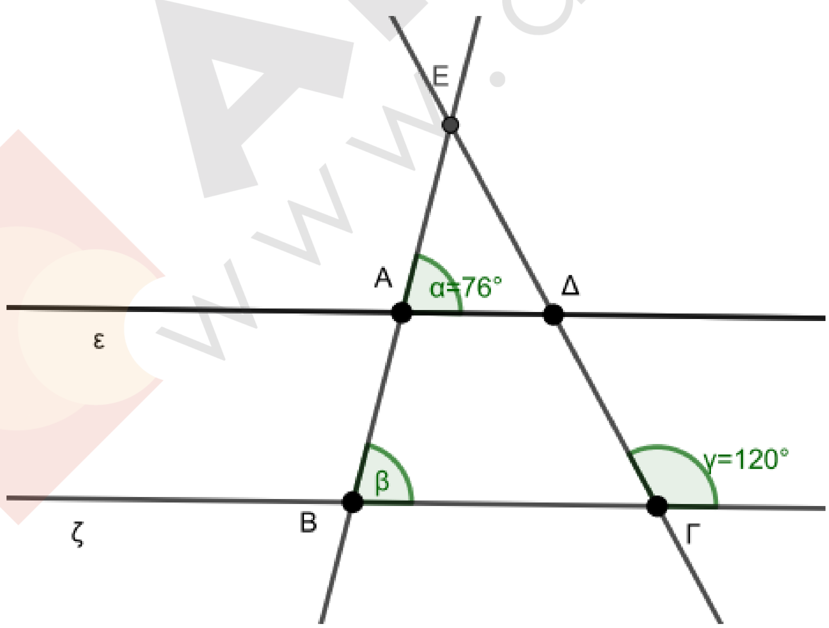
36. Θέμα 13741

Στο σχήμα που ακολουθεί οι ευθείες ε και ζ είναι παράλληλες. Αν είναι $\hat{\alpha} = 76^o$ και $\hat{\gamma} = 120^o$, να υπολογίσετε :

α) Τη γωνία $\hat{\beta}$. (Μονάδες 5)

β) Τις γωνίες του τετράπλευρου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 12)

γ) Τη γωνία $\hat{E}$ του τριγώνου ΕΑΔ. (Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ

α) Οι γωνίες $\widehat{\alpha}$ και $\widehat{\beta}$ είναι εκτός εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων ε και ζ που τέμνονται από την ευθεία ΑΒ. Οπότε $\widehat{\alpha} = \widehat{\beta} = 76^o$.

β) Η γωνία $\widehat{\Gamma}$ του τετράπλευρου ΑΒΓΔ είναι παραπληρωματική της γωνίας $\widehat{\gamma} = 120^o$, έτσι $\widehat{\Gamma} = 180^o - 120^o = 60^o$.

Οι γωνίες $\widehat{\Gamma}$ και $\widehat{\Delta}$ του τετράπλευρου είναι εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων ευθειών ε και ζ που τέμνονται από τη ΓΔ. Άρα είναι παραπληρωματικές, οπότε

$\widehat{\Gamma} + \widehat{\Delta} = 180^o$ ή $\widehat{\Delta} = 180^o - 60^o = 120^o$.

Η γωνία $\widehat{A}$ του τετράπλευρου ΑΒΓΔ είναι παραπληρωματική της γωνίας $\widehat{\alpha} = 76^o$. Έτσι $\widehat{A} + \widehat{\alpha} = 180^o$ ή $\widehat{A} + 76^o = 180^o$ και τελικά $\widehat{A} = 180^o - 76^o = 104^o$.

γ) Στο τρίγωνο ΕΑΔ έχουμε ήδη γνωστή τη γωνία $\widehat{\alpha} = 76^o$. Επιπλέον η γωνία $A\widehat{\Delta}E$ του τριγώνου είναι η παραπληρωματική της γωνίας $\widehat{\Delta}$ του τετράπλευρου ΑΒΓΔ οπότε $A\widehat{\Delta}E + \widehat{\Delta} = 180^o$, ή $A\widehat{\Delta}E = 180^o - 120^o = 60^o$. Το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΔΕ είναι 180^o, οπότε $A\widehat{\Delta}E + \widehat{\alpha} + \widehat{E} = 180^o$ ή $60^o + 76^o + \widehat{E} = 180^o$, δηλαδή $136^o + \widehat{E} = 180^o$ ή $\widehat{E} = 180^o - 136^o = 44^o$.

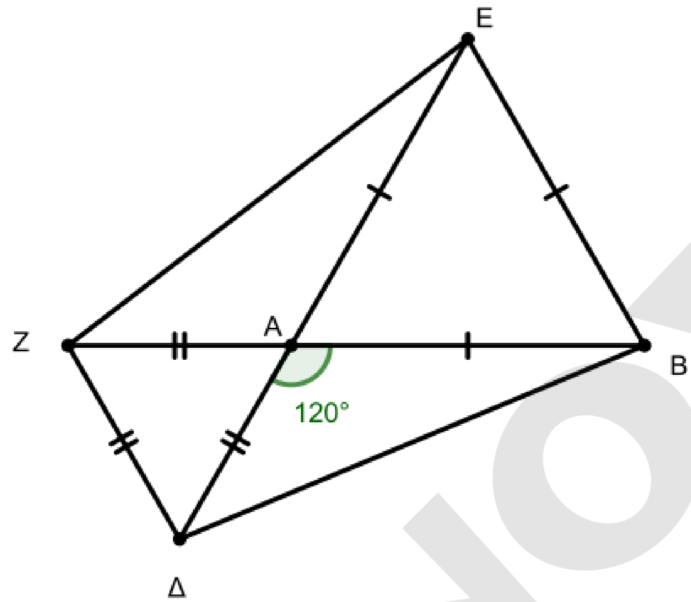
37. Θέμα 14884

Έστω τρίγωνο ΑΒΔ με $\widehat{A} = 120^o$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΖΔ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΑΒΔ είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) Το τμήμα ΔΖ είναι παράλληλο στο ΒΕ. (Μονάδες 12)



ΛΥΣΗ

α) Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΖΔ είναι ισόπλευρα, άρα όλες οι γωνίες τους είναι 60^o.

$Z\widehat{A}B = Z\widehat{A}\Delta + \Delta\widehat{A}B = 60^o + 120^o = 180^o$, άρα τα σημεία Ζ, Α, Β είναι συνευθειακά.

Ομοίως $E\widehat{A}\Delta = E\widehat{A}B + B\widehat{A}\Delta = 60^o + 120^o = 180^o$ και τα σημεία Ε, Α και Δ είναι επίσης συνευθειακά.

Τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΑΒΔ έχουν:

- ΑΖ = ΑΔ, ως πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου ΑΖΔ
- ΑΒ = ΑΕ, ως πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΕ
- $Z\widehat{A}E = \Delta\widehat{A}B$, ως κατακορυφήν αφού ΖΑΒ και ΕΑΔ ευθείες

Με βάση το κριτήριο Π – Γ – Π τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΑΒΔ είναι ίσα.

β) $A\widehat{\Delta}Z = A\widehat{E}B = 60^o$ ως γωνίες ισόπλευρων τριγώνων και είναι γωνίες εντός εναλλάξ των ΔΖ και ΒΕ που τέμνονται από την ΔΕ, άρα ΔΖ // ΒΕ.

Θέμα 3 - Κωδικοί:

12200

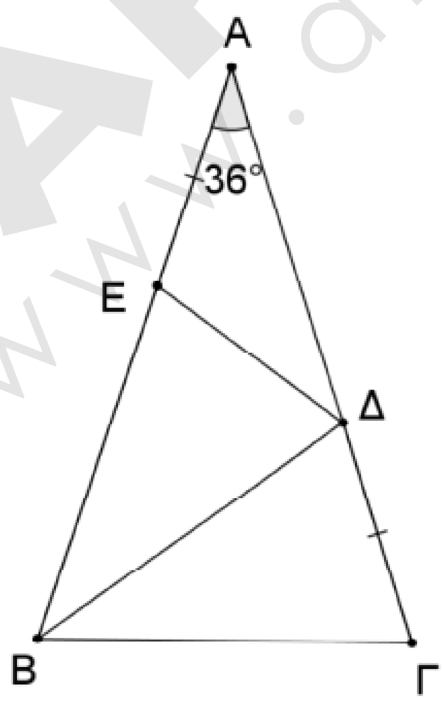
38. Θέμα 12200

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$ και $\widehat{Α} = 36^o$. Έστω ΒΔ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{Β}$ και Ε σημείο της πλευράς ΑΒ ώστε $ΑΕ = ΓΔ$.

α) Να αποδείξετε ότι $ΑΔ = ΒΔ$. (Μονάδες 8)

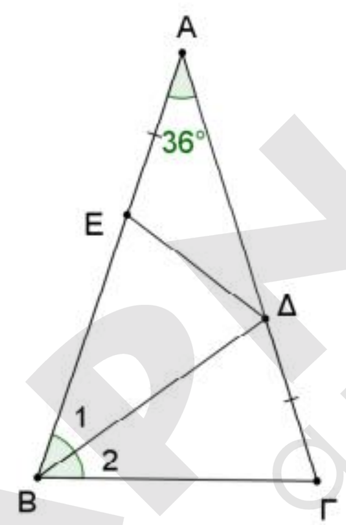
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

γ) Η παράλληλη από το Β προς την ΑΓ τέμνει την προέκταση της ΔΕ (προς το Ε) στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΖ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)



ΛΥΣΗ

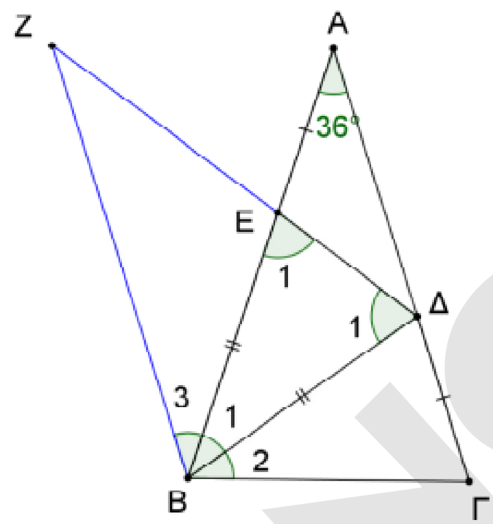
α) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση ΒΓ, οπότε οι προσκείμενες στη βάση γωνίες του είναι ίσες, δηλαδή $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (1). Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ, το δεδομένο $\widehat{A} = 36^o$ και τη σχέση (1) προκύπτει ότι $36^o + \hat{B} + \hat{B} = 180^o \Leftrightarrow 2\hat{B} = 144^o \Leftrightarrow \hat{B} = 72^o$.



Η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$, άρα $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \frac{72^o}{2} = 36^o$ (2). Από το δεδομένο $\widehat{A} = 36^o$ και τη σχέση (2) είναι $\widehat{A} = \hat{B}_1$, άρα το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές γιατί έχει δύο ίσες γωνίες. Οπότε, απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{A}$, $\hat{B}_1$ βρίσκονται ίσες πλευρές αντίστοιχα, δηλαδή ΒΔ = ΑΔ (3).

β) Από τα δεδομένα έχουμε ΑΒ = ΑΓ και ΑΕ = ΓΔ. Με αφαίρεση κατά μέλη είναι ΑΒ − ΑΕ = ΑΓ − ΓΔ, δηλαδή ΒΕ = ΑΔ (4). Από τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει ότι ΒΔ = ΒΕ, άρα το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές.

γ) Έστω ΒΖ η παράλληλη στην ΑΓ που τέμνει την προέκταση της ΔΕ (προς το Ε) στο Ζ.



Από το β) ερώτημα έχουμε ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές ΒΔ και ΒΕ, οπότε οι προσκείμενες γωνίες στη βάση ΔΕ του είναι ίσες, δηλαδή $\hat{\Delta}_1 = \hat{E}_1$ (5). Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΒΔΕ έχουμε ότι $\hat{B}_1 + \hat{\Delta}_1 + \hat{E}_1 = 180^o$ και επειδή είναι $\hat{\Delta}_1 = \hat{E}_1$ και από τη σχέση (4) θα έχουμε ότι

$36^o + \hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_1 = 180^o \Leftrightarrow 2\hat{\Delta}_1 = 144^o \Leftrightarrow \hat{\Delta}_1 = 72^o$ (6).

Αφού ΒΖ, ΑΓ είναι παράλληλες με τέμνουσα την ΑΒ, τότε είναι $\hat{B}_3 = \hat{A}$ ως εντός εναλλάξ γωνίες. Αφού είναι $\hat{A} = 36^o$ από δεδομένα και $\hat{B}_3 = \hat{A}$ θα είναι $\hat{B}_3 = 36^o$.
Είναι $\Delta\hat{B}Z = \hat{B}_1 + \hat{B}_3 = 36^o + 36^o = 72^o$ (7), όπου $\hat{B}_1 = 36^o$ από την (2).
Από τις σχέσεις (6) και (7) θα είναι $\hat{\Delta}_1 = \Delta\hat{B}Z$, άρα το τρίγωνο ΒΔΖ είναι ισοσκελές γιατί έχει δύο γωνίες ίσες.

Θέμα 4 - Κωδικοί:

1708, 1779, 1784, 1792, 1819, 1828, 1849, 1888, 1894, 13499, 13537

13697, 13750

39.Θέμα 1708

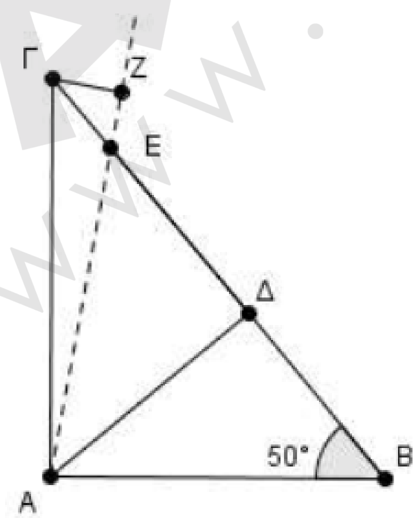
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90^0$) με $\widehat{B} = 50^o$, το ύψος του ΑΔ και σημείο Ε στην ΔΓ ώστε ΔΕ=ΒΔ. Το σημείο Ζ είναι η προβολή του Γ στην ΑΕ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

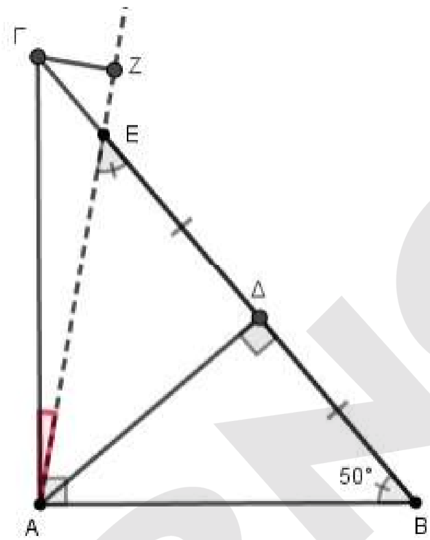
ii. $\Gamma\widehat{A}E = 10^o$. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΖΓΕ. (Μονάδες 9)



ΛΥΣΗ

α)



i. Αφού για το σημείο Ε ισχύει ΔΕ = ΒΔ (υπόθεση), άρα το Δ είναι μέσο του τμήματος ΒΕ. Στο τρίγωνο ΒΑΕ το ΑΔ είναι ύψος και διάμεσος. Οπότε το τρίγωνο ΕΑΒ είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές τις ΑΒ και ΑΕ.

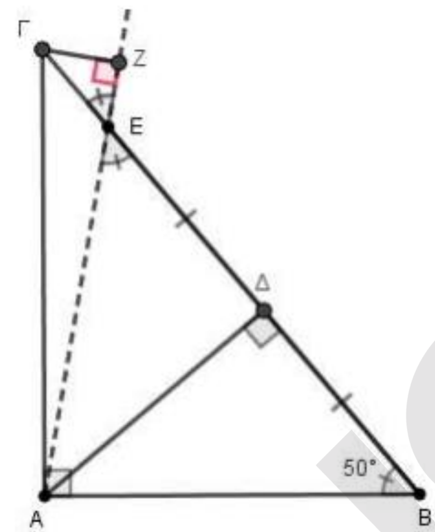
ii. Επειδή το τρίγωνο ΒΑΕ είναι ισοσκελές με βάση το ΒΕ οπότε οι γωνίες της βάσης θα είναι ίσες, δηλαδή $A\hat{E}B = \hat{B} = 50^o$.

Για τις γωνίες του τριγώνου ΒΑΕ ισχύει $E\hat{A}B + A\hat{E}B + \hat{B} = 180^o$ και αφού $A\hat{E}B = \hat{B} = 50^o$ άρα και $E\hat{A}B + 2 \cdot 50^o = 180^o$, οπότε $E\hat{A}B = 180^o - 100^o = 80^o$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$\Gamma\hat{A}E + E\hat{A}B = 90^o$ και αφού $E\hat{A}B = 80^o$ τότε θα ισχύει $\Gamma\hat{A}E + 80^o = 90^o$, άρα $\Gamma\hat{A}E = 10^o$.

β)



Ισχύει ότι $\Gamma\hat{E}Z = A\hat{E}B = 50^o$ ως κατακορυφήν γωνίες. Επειδή $\Gamma\hat{Z}E = 90^o$, γιατί ΓΖ⊥ΑΖ λόγω της προβολής του σημείου Γ στην ΑΕ, το τρίγωνο ΓΖΕ είναι ορθογώνιο οπότε οι οξείες γωνίες του είναι συμπληρωματικές, δηλαδή

$\Gamma\hat{E}Z + E\hat{\Gamma}Z = 90^o \Leftrightarrow 50^o + E\hat{\Gamma}Z = 90^o$ οπότε $E\hat{\Gamma}Z = 40^o$.

40. Θέμα 1779

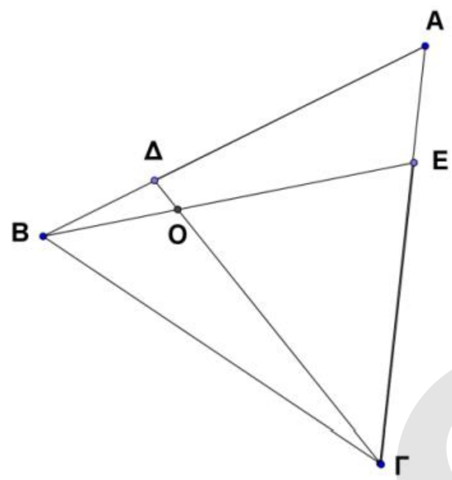
Θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ και Ε των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ώστε να είναι ΑΔ=ΓΕ. Έστω Ο το σημείο τομής των ΓΔ και ΒΕ.

α) Να αποδείξτε ότι:

i. $B\hat{E}\Gamma = \Gamma\hat{\Delta}A$. (Μονάδες 10)

ii. $B\hat{O}\Gamma = 120^0$. (Μονάδες 10)

β) Να εξετάσετε αν το τετράπλευρο ΑΕΟΔ είναι εγγράψιμο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)



ΛΥΣΗ

α) i. Τα τρίγωνα ΒΕΓ και ΑΔΓ έχουν:

ΑΔ = ΓΕ από υπόθεση,

ΑΓ = ΒΓ ως πλευρές του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ και

$\Gamma\hat{A}\Delta = B\hat{\Gamma}E = 60^o$ ως γωνίες του ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ.

Σύμφωνα με το κριτήριο Π – Γ – Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $B\hat{E}\Gamma = \Gamma\hat{\Delta}A$ διότι είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές ΒΓ και ΑΓ.

ii. Επειδή τα τρίγωνα ΒΕΓ και ΑΔΓ είναι ίσα, ισχύει ότι: $E\hat{B}\Gamma = \Delta\hat{\Gamma}A$ διότι είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές ΕΓ και ΑΔ. Οπότε ισχύει και ότι: $O\hat{B}\Gamma = O\hat{\Gamma}A$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΒΟΓ έχουμε:

$B\hat{O}\Gamma + O\hat{B}\Gamma + B\hat{\Gamma}O = 180^o \Leftrightarrow B\hat{O}\Gamma + O\hat{\Gamma}A + B\hat{\Gamma}O = 180^o \Leftrightarrow B\hat{O}\Gamma + B\hat{\Gamma}A = 180^o \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow B\hat{O}\Gamma + 60^o = 180^o \Leftrightarrow B\hat{O}\Gamma = 120^o$.

β) Είναι $\Delta\hat{O}E = B\hat{O}\Gamma = 120^o$ ως κατακορυφήν και Α = 60^o ως γωνία του ισόπλευρου τριγώνου, άρα $\Delta\hat{O}E + \hat{A} = 180^o$, δηλαδή στο τετράπλευρο ΑΔΟΕ δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές, οπότε είναι εγγράψιμο.

41. Θέμα 1784

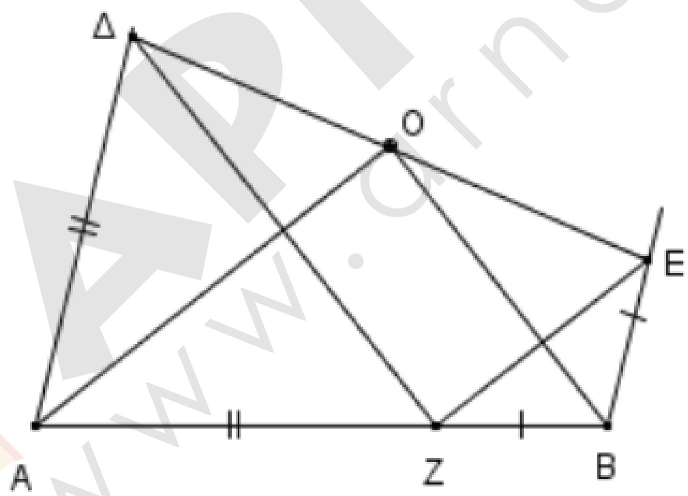
Δίνεται τραπέζιο ΑΔΕΒ, με ΑΔ//ΒΕ, στο οποίο ισχύει ότι ΑΒ=ΑΔ+ΒΕ, και Ο το μέσον της ΔΕ. Θεωρούμε σημείο Ζ στην ΑΒ τέτοιο ώστε ΑΖ=ΑΔ και ΒΖ=ΒΕ .

Αν γωνία $\Delta\hat{A}Z=\varphi$,

α) να εκφράσετε τη γωνία ΑΖΔ σε συνάρτηση με τη φ. (Μονάδες 8)

β) να εκφράσετε τη γωνία ΕΖΒ σε συνάρτηση με τη φ. (Μονάδες 8)

γ) να αποδείξετε ότι οι ΟΑ και ΟΒ είναι μεσοκάθετοι των τμημάτων ΔΖ και ΖΕ αντίστοιχα. (Μονάδες 9)



ΛΥΣΗ

α) Επειδή ΑΖ = ΑΔ , το τρίγωνο ΑΖΔ είναι ισοσκελές και έχει $A\hat{\Delta}Z = A\hat{Z}\Delta$ (1)

Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΖΔ έχουμε:

$$\hat{A} + A\hat{Z}\Delta + A\hat{\Delta}Z = 180^\circ \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \varphi + 2A\hat{Z}\Delta = 180^\circ \Leftrightarrow 2A\hat{Z}\Delta = 180^\circ - \varphi \Leftrightarrow A\hat{Z}\Delta = 90^\circ - \frac{\varphi}{2}.$$

β) Οι γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{B}$ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΔ, ΒΕ που τέμνονται από την ΑΒ, άρα είναι παραπληρωματικές. Τότε:

$\widehat{A} + \widehat{B} = 180^o \Leftrightarrow \widehat{B} = 180^o - \phi$ (2).

Επειδή ΒΖ = ΒΕ, το τρίγωνο ΒΖΕ είναι ισοσκελές και έχει $E\hat{Z}B = B\hat{E}Z$ (3).

Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΕΖΒ και τις σχέσεις (2), (3) έχουμε:

$\widehat{B} + E\hat{Z}B + B\hat{E}Z = 180^o \Leftrightarrow 180^o - \phi + 2E\hat{Z}B = 180^o \Leftrightarrow E\hat{Z}B = \frac{\varphi}{2}$.

γ) Ισχύει ότι: $A\hat{Z}\Delta + E\hat{Z}B = 90^o - \frac{\varphi}{2} + \frac{\varphi}{2} = 90^o$. Οπότε και $\Delta\hat{Z}E = 90^o$.

Η ΖΟ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΔΖΕ, άρα $ZO = \frac{\Delta E}{2} = \Delta O = OE$.

Τα σημεία Ο, Α ισαπέχουν από τα Δ, Ζ άρα ανήκουν στη μεσοκάθετο του ΔΖ. Τα σημεία Ο, Β ισαπέχουν από τα Ζ, Ε, οπότε ανήκουν στη μεσοκάθετο του ΖΕ. Άρα οι ΟΑ και ΟΒ είναι μεσοκάθετοι των τμημάτων ΔΖ και ΖΕ αντίστοιχα.

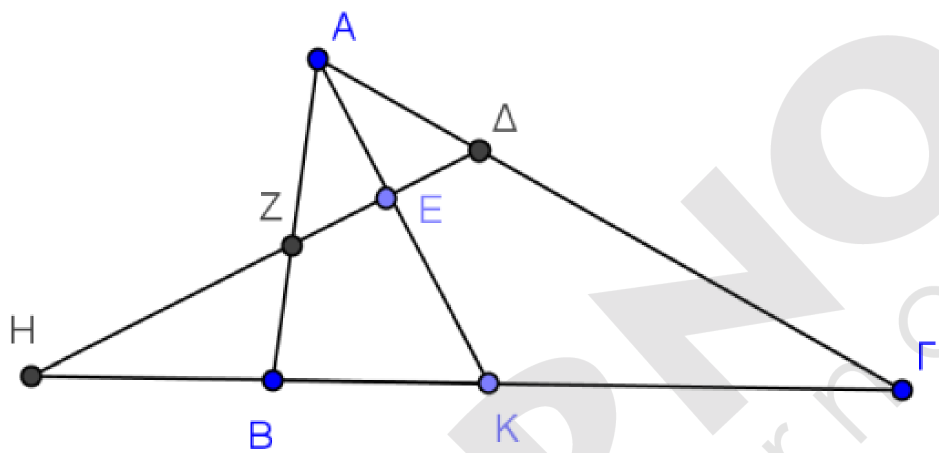
42. Θέμα 1792

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ. Φέρουμε τη διχοτόμο του ΑΚ και σε τυχαίο σημείο της Ε φέρουμε ευθεία κάθετη στη διχοτόμο ΑΚ, η οποία τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ζ και Δ αντίστοιχα και την προέκταση της ΓΒ στο σημείο Η.

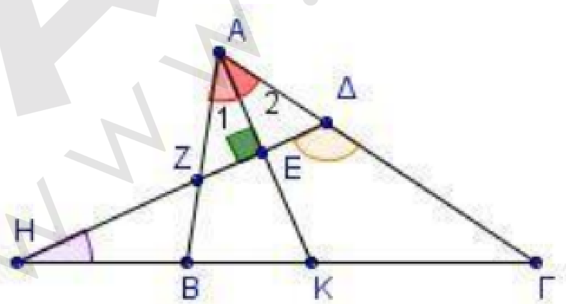
Να αποδείξετε ότι:

α) $Z\hat{\Delta}\Gamma = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$. (Μονάδες 7) β) ΖΚ = ΚΔ. (Μονάδες 8)

γ) $Z\hat{H}\Gamma = \dfrac{\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}$. (Μονάδες 10)



ΛΥΣΗ



α) Στο τρίγωνο ΑΖΔ η ΑΕ είναι ύψος και διχοτόμος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές. Άρα $A\hat{Z}E = A\hat{\Delta}E$

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΔΖ βρίσκουμε:

$$\hat{A} + A\hat{Z}E + A\hat{\Delta}E = 180^o \Leftrightarrow \hat{A} + 2A\hat{\Delta}E = 180^o \Leftrightarrow A\hat{\Delta}E = 90^o - \frac{\hat{A}}{2}$$

Τότε:

$Z\hat{\Delta}\Gamma + A\hat{\Delta}E = 180^o \Leftrightarrow Z\hat{\Delta}\Gamma = 180^o - A\hat{\Delta}E \Leftrightarrow Z\hat{\Delta}\Gamma = 180^o - 90^o + \frac{\hat{A}}{2} \Leftrightarrow Z\hat{\Delta}\Gamma = 90^o + \frac{\hat{A}}{2}$

β) Η ΑΕ είναι μεσοκάθετος του ΖΔ και το σημείο Κ ανήκει σε αυτήν. Άρα το Κ ισαπέχει από τα Ζ και Δ, οπότε ΖΚ = ΚΔ.

γ) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΗΔΓ βρίσκουμε:

$Z\hat{H}\Gamma + Z\hat{\Delta}\Gamma + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow Z\hat{H}\Gamma + 90^o + \frac{\hat{A}}{2} + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow Z\hat{H}\Gamma = 90^o - \frac{\hat{A}}{2} - \hat{\Gamma}$

Όμως στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι:

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} = 90^o$

Οπότε έχουμε:

$Z\hat{H}\Gamma = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} - \frac{\hat{A}}{2} - \hat{\Gamma} \Leftrightarrow Z\hat{H}\Gamma = \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$

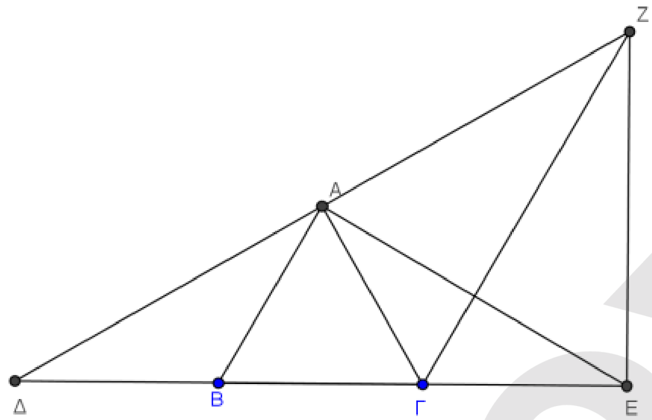
43. Θέμα 1819

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και στην προέκταση της ΓΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε ΒΔ = ΒΓ, ενώ στην προέκταση της ΒΓ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο ώστε ΓΕ = ΒΓ. Φέρουμε την κάθετη στην ΕΔ στο σημείο Ε, η οποία τέμνει την προέκταση της ΔΑ στο Ζ.

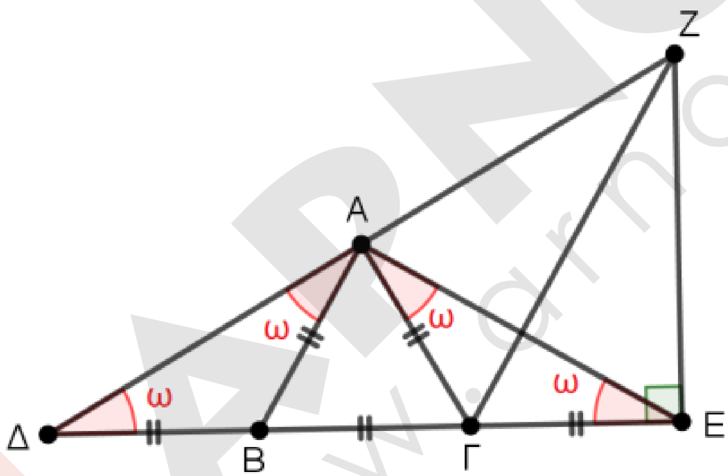
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων ΓΑΕ και ΒΔΑ. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η ΓΖ είναι μεσοκάθετος του ΑΕ. (Μονάδες 12)

γ) Να αποδείξετε ότι ΑΒ//ΓΖ. (Μονάδες 5)



ΛΥΣΗ



α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο ισχύει ότι $B\hat{A}\Gamma = A\hat{B}\Gamma = A\hat{\Gamma}B = 60^o$.

Οι $A\hat{B}\Delta$ και $A\hat{\Gamma}E$ είναι παραπληρωματικές των $A\hat{B}\Gamma$ και $A\hat{\Gamma}B$, αντίστοιχα.

Άρα είναι $A\hat{B}\Delta = A\hat{\Gamma}E = 180^o - 60^o = 120^o$.

Επίσης, ισχύει ότι ΑΒ = ΒΔ = ΑΓ = ΓΕ, οπότε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα (λόγω του Π-Γ-Π) και ισοσκελή.

Αν συμβολίσουμε με ω κάθε μια από τις γωνίες που αντιστοιχούν στις βάσεις τους, τότε από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΒΔ βρίσκουμε:

$A\hat{B}\Delta + A\hat{\Delta}B + \Delta\hat{A}B = 180^o \Leftrightarrow 120^o + 2\omega = 180^o \Leftrightarrow 2\omega = 60^o \Leftrightarrow \omega = 30^o$.

β) Είναι $\Delta\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{A}B + B\hat{A}\Gamma = 30^o + 60^o = 90^o$. Άρα $\Gamma A \perp A\Delta$, άρα $\Gamma\hat{A}Z = 90^o$.

Τα τρίγωνα ΑΓΖ και ΓΕΖ:

- Είναι ορθογώνια, με ορθές τις $\Gamma\hat{A}Z$ και $\Gamma\hat{E}Z$.
- Έχουν τη ΓΖ κοινή πλευρά.
- Έχουν ΑΓ = ΓΕ.

Άρα τα τρίγωνα ΑΓΖ και ΓΕΖ έχουν κοινή υποτείνουσα και μια κάθετη πλευρά, ίσες μία προς μία, επομένως είναι ίσα. Οπότε ΖΑ = ΖΕ (καθώς είναι η άλλη κάθετη πλευρά τους).

Επομένως το Ζ ισαπέχει από τα Α και Ε, άρα ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΕ.

Επειδή ΓΑ = ΓΕ, το Γ ισαπέχει από τα Α και Ε, άρα ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΕ. Επομένως, η ΓΖ είναι η μεσοκάθετος του ΑΕ.

γ) Από την ισότητα των τριγώνων ΓΑΖ και ΓΕΖ προκύπτει ότι $A\hat{\Gamma}Z = E\hat{\Gamma}Z$, καθώς βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΖ και ΕΖ. Οπότε η ΓΖ είναι διχοτόμος της $A\hat{\Gamma}E$. Άρα $A\hat{\Gamma}Z = \frac{A\hat{\Gamma}E}{2} = \frac{120^o}{2} = 60^o$.

Άρα $A\hat{\Gamma}Z = B\hat{A}\Gamma$, οπότε οι ευθείες ΑΒ και ΓΖ που τέμνονται από την ΑΓ σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες $A\hat{\Gamma}Z$ και $B\hat{A}\Gamma$ ίσες. Άρα ΑΒ//ΓΖ

44. Θέμα 1828

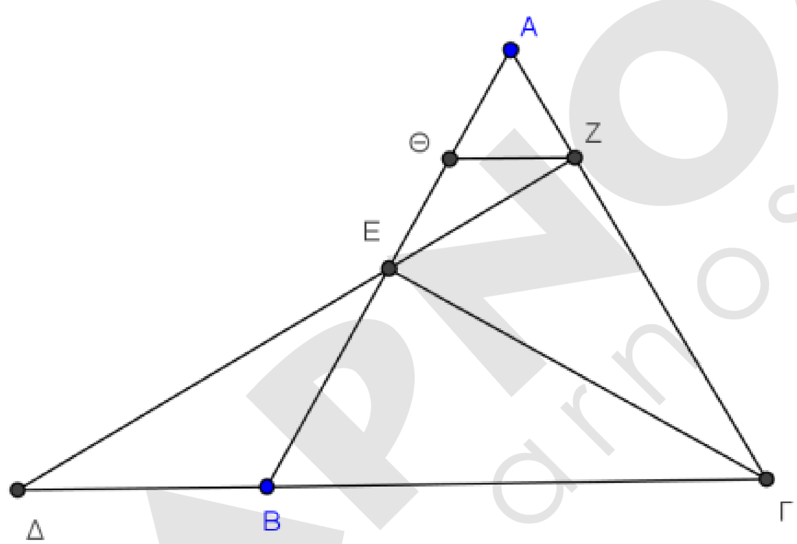
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος του ΓΕ. Στην προέκταση της ΓΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $B\Delta = \frac{B\Gamma}{2}$. Αν η ευθεία ΔΕ τέμνει την ΑΓ στο Ζ και ΖΘ // ΒΓ:

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές και το τρίγωνο ΑΘΖ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΘΕΖ. (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι ΑΕ = 2 ΘΖ. (Μονάδες 5)

δ) Να αποδείξετε ότι 3ΑΒ = 4ΘΒ. (Μονάδες 5)



ΛΥΣΗ

α) Το ΓΕ είναι ύψος στο ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ, άρα είναι διάμεσος και διχοτόμος του. Συγκεκριμένα είναι διάμεσος της πλευράς ΑΒ, άρα ΒΕ = $\frac{AB}{2}$.

Επίσης, από την υπόθεση ΒΔ = $\frac{B\Gamma}{2}$.

Όμως ΑΒ = ΒΓ, καθώς το ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, άρα ΒΕ = ΒΔ και επομένως το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές.

Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, ισχύει ότι $\widehat{A} = A\widehat{B}\Gamma = A\widehat{\Gamma}B = 60^o$.

Είναι ακόμη $A\hat{\Theta}Z = A\hat{B}\Gamma$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΘΖ, ΒΓ που τέμνονται από την ΑΒ. Άρα $A\hat{\Theta}Z = 60^o$.

Ισχύει ακόμη ότι $A\hat{Z}\Theta = A\hat{\Gamma}B$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΘΖ, ΒΓ που τέμνονται από την ΑΓ. Άρα $A\hat{Z}\Theta = 60^o$.

Συνεπώς, από τα παραπάνω στο τρίγωνο ΑΘΖ ισχύει $A\hat{\Theta}Z = A\hat{Z}\Theta = \hat{A} = 60^o$, οπότε είναι ισόπλευρο.

β) Οι γωνίες $E\hat{\Theta}Z$ και $A\hat{\Theta}Z$ είναι παραπληρωματικές. Άρα, $E\hat{\Theta}Z + A\hat{\Theta}Z = 180^o \Leftrightarrow E\hat{\Theta}Z = 180^o - A\hat{\Theta}Z \Leftrightarrow E\hat{\Theta}Z = 180^o - 60^o = 120^o$.

Η γωνία $A\hat{B}\Gamma$ είναι εξωτερική του τριγώνου ΒΔΕ, άρα $A\hat{B}\Gamma = \hat{\Delta} + \Delta\hat{E}B \Leftrightarrow 60^o = \hat{\Delta} + \Delta\hat{E}B$.

Όμως το ΒΔΕ, όπως έχει αποδειχθεί στο α) είναι ισοσκελές με βάση ΔΕ, άρα οι γωνίες της βάσης, $\hat{\Delta}$ και $\Delta\hat{E}B$ είναι ίσες. Επομένως $60^o = 2\Delta\hat{E}B \Leftrightarrow \Delta\hat{E}B = 30^o$.

Οπότε και $\Theta\hat{E}Z = 30^o$ ως κατακορυφήν της $\Delta\hat{E}B$.

Από το άθροισμα γωνιών στο τρίγωνο ΘΕΖ, βρίσκουμε:

$\Theta\hat{E}Z + E\hat{\Theta}Z + \Theta\hat{Z}E = 180^o \Leftrightarrow 30^o + 120^o + \Theta\hat{Z}E = 180^o \Leftrightarrow \Theta\hat{Z}E = 30^o$.

γ) Επειδή $\Theta\hat{E}Z = \Theta\hat{Z}E = 30^o$, το τρίγωνο ΘΖΕ είναι ισοσκελές, άρα ΘΕ = ΘΖ.

Όμως το ΑΘΖ είναι ισόπλευρο, όπως έχει αποδειχθεί στο α), άρα ΘΖ = ΘΑ ως πλευρές ισόπλευρου και άρα ισχύει ότι ΘΕ = ΘΖ = ΘΑ. Όμως ΑΕ = ΘΑ + ΘΕ ή ΑΕ = 2ΘΖ .

δ) Από τα προηγούμενα $AE = EB = \frac{AB}{2}$ και $\Theta E = \frac{AE}{2}$, άρα $\Theta E = \frac{AB}{4}$.

$\Theta B = \Theta E + EB = \frac{AB}{4} + \frac{AB}{2} = \frac{3AB}{4}$.

Άρα 4ΘΒ = 3ΑΒ.

45. Θέμα 1849

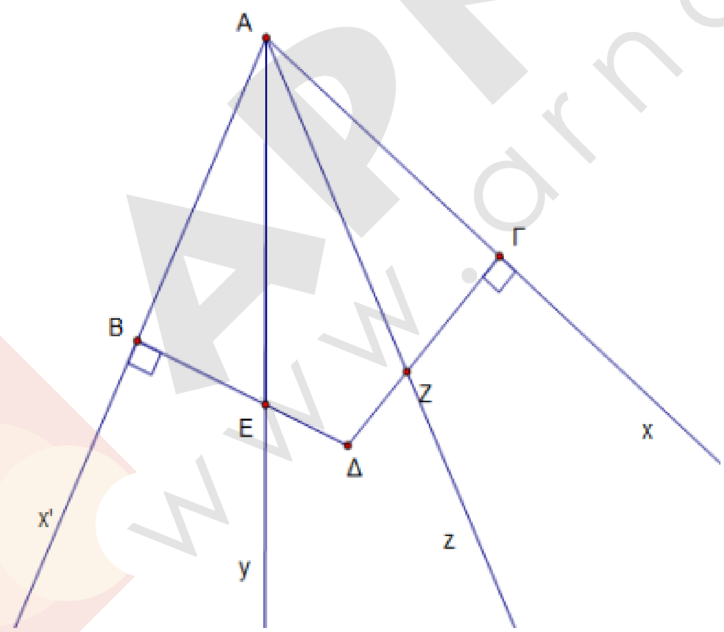
Στις πλευρές Ax' και Ax γωνίας $x'\hat{A}x$ θεωρούμε σημεία Β και Γ ώστε ΑΒ=ΑΓ. Οι κάθετες στις Αx′ και Αx στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα, τέμνονται στο Δ.

Αν οι ημιευθείες Ay και Az χωρίζουν τη γωνία $x'\hat{A}x$ σε τρεις ίσες γωνίες και τέμνουν τις ΒΔ και ΔΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

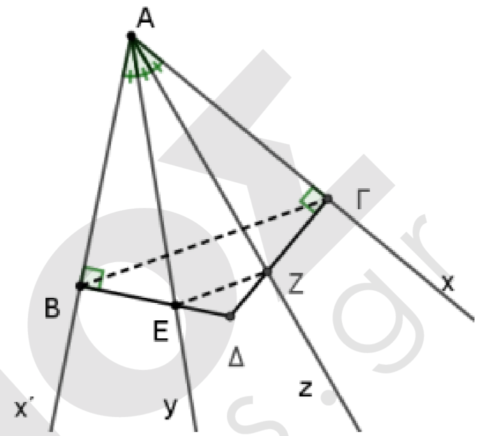
α) Το τρίγωνο $\overset{\Delta}{EAZ}$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

β) Το Δ ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $x'\hat{A}x$. (Μονάδες 8)

γ) Οι γωνίες ΓΒΔ και ΓΑΔ είναι ίσες. (Μονάδες 9)



ΛΥΣΗ

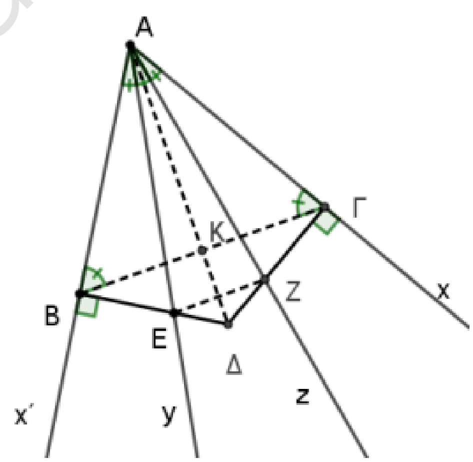


α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΖ είναι ίσα διότι:

- ΑΒ = ΑΓ, από την υπόθεση και
- $B\hat{A}E = Z\hat{A}\Gamma$ αφού οι Αy, Αz χωρίζουν τη γωνία $x'\hat{A}x$ σε τρεις ίσες γωνίες.

Άρα ΑΕ = ΑΖ ως υποτείνουσες των ίσων τριγώνων, οπότε το ΕΑΖ είναι ισοσκελές τρίγωνο.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ίσα γιατί έχουν ΑΔ κοινή πλευρά και ΑΒ = ΑΓ, από την υπόθεση. Άρα ισχύει και $B\hat{A}\Delta = \Gamma\hat{A}\Delta$ ως περιεχόμενες γωνίες σε δύο ίσες, μία προς μία, πλευρές των ίσων τριγώνων, οπότε ΑΔ διχοτόμος της $x'\hat{A}x$.



γ) Έστω Κ το σημείο τομής των ΑΔ και ΒΓ. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΚ είναι διχοτόμος άρα και ύψος. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΓ βρίσκουμε: $K\hat{A}\Gamma + A\hat{\Gamma}K = 90^o \Leftrightarrow \Delta\hat{A}\Gamma = 90^o - A\hat{\Gamma}K$.

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΒΓ, οπότε $A\hat{\Gamma}B = A\hat{B}\Gamma$.

Άρα $\Delta\hat{A}\Gamma = 90^o - A\hat{B}\Gamma \Leftrightarrow \Delta\hat{A}\Gamma = \Gamma\hat{B}\Delta$.

46. Θέμα 1888

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και Μ το μέσο της ΒΓ. Φέρουμε ΓΔ ⊥ ΒΓ με ΓΔ=ΑΒ (Α,Δ εκατέρωθεν της ΒΓ).

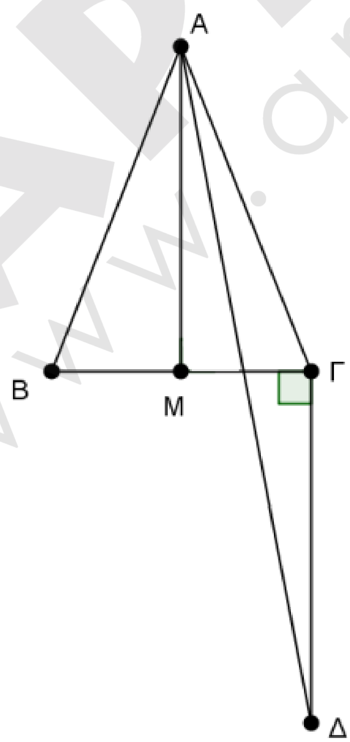
Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΜ // ΓΔ (Μονάδες 6)

β) η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $M\hat{A}\Gamma$. (Μονάδες 7)

γ) $\Delta\hat{A}\Gamma = 45^o - \frac{\hat{B}}{2}$ (Μονάδες 7)

δ) ΑΔ < 2 ΑΒ (Μονάδες 5)



ΛΥΣΗ

α) Η ΑΜ διάμεσος του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ που αντιστοιχεί στη βάση του, οπότε θα είναι και ύψος και διχοτόμος του τριγώνου.

Επειδή ΑΜ⊥ΒΓ και ΓΔ⊥ΒΓ προκύπτει ότι ΑΜ//ΓΔ.

β) Ισχύει ότι ΑΒ = ΓΔ και ΑΒ = ΑΓ οπότε ΑΓ = ΓΔ. Άρα το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΔ, οπότε $\Gamma\widehat{A}\Delta = \widehat{\Delta}$.

Ισχύει επίσης ότι $M\widehat{A}\Delta = \widehat{\Delta}$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΜ, ΓΔ που τέμνονται από την ΑΔ. Άρα $M\widehat{A}\Delta = \Gamma\widehat{A}\Delta$, επομένως η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $M\widehat{A}\Gamma$.

γ) Ισχύει ότι: $\Gamma\widehat{A}\Delta = \frac{M\widehat{A}\Gamma}{2} = \frac{\frac{B\widehat{A}\Gamma}{2}}{2} = \frac{B\widehat{A}\Gamma}{4}$ (1)

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ βρίσκουμε:

$$B\widehat{A}\Gamma + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow B\widehat{A}\Gamma + 2\widehat{B} = 180^o \Leftrightarrow B\widehat{A}\Gamma = 180^o - 2\widehat{B}$$

Τότε η (1) γράφεται:

$$\Gamma\widehat{A}\Delta = \frac{180^o - 2\widehat{B}}{4} = 45^o - \frac{\widehat{B}}{2}$$

δ) Από τη τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο ΑΓΔ, έχουμε:

$$A\Delta < A\Gamma + \Gamma\Delta \Leftrightarrow A\Delta < AB + AB \Leftrightarrow A\Delta < 2AB$$

47. Θέμα 1894

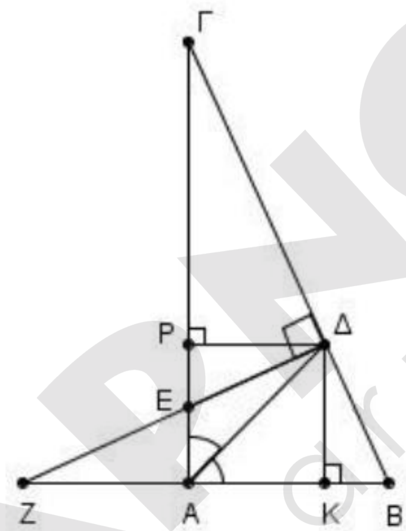
Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) φέρουμε τη διχοτόμο του ΑΔ. ‘Εστω ΔΚ και ΔΡ οι προβολές του Δ στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Η κάθετη της ΒΓ στο σημείο Δ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο Ε και την προέκταση της πλευράς ΑΒ (προς το Β) στο σημείο Ζ.

α) Να αποδείξετε ότι:

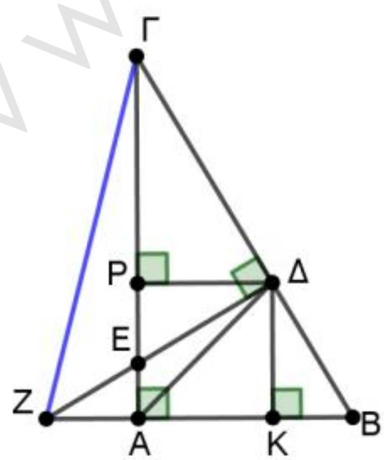
i. $\hat{B} = \Delta\hat{E}\Gamma$ (Μονάδες 8)

ii. ΔΕ=ΔΒ (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία ΔΓΖ (Μονάδες 9)



ΛΥΣΗ



α) i) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, από το άθροισμα γωνιών τριγώνου έχουμε $\hat{B} + A\hat{\Gamma}B = 90^o \Leftrightarrow \hat{B} = 90^o - A\hat{\Gamma}B$ (1). Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΓ έχουμε $\Delta\hat{E}\Gamma + E\hat{\Gamma}\Delta = 90^o \Leftrightarrow \Delta\hat{E}\Gamma + A\hat{\Gamma}B = 90^o \Leftrightarrow \Delta\hat{E}\Gamma = 90^o - A\hat{\Gamma}B$ (2).

Από (1), (2) βρίσκουμε ότι $\hat{B} = \Delta\hat{E}\Gamma$ (είναι συμπληρωματικές της ίδιας γωνίας).

ii) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΔΚΒ και ΔΡΕ:

- Είναι ορθογώνια, καθώς οι ΔΚ και ΔΡ είναι προβολές του Δ στις ΑΒ και ΑΓ, αντίστοιχα, από την υπόθεση.
- $\hat{B} = \Delta\hat{E}P$ από το προηγούμενο ερώτημα και
- ΔΚ = ΔΡ, διότι το Δ είναι σημείο της διχοτόμου της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$ και κάθε σημείο της διχοτόμου ισαπέχει από τις πλευρές της ΑΒ και ΑΓ.

Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, γιατί έχουν μία οξεία γωνία και μία κάθετη πλευρά αντίστοιχα ίσες, μία προς μία. Επομένως ΔΕ = ΔΒ, ως υποτείνουσές τους.

β) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΔΕΓ και ΔΒΖ:

- Είναι ορθογώνια, γιατί $\Delta E \perp B\Gamma$.
- $\Delta\hat{E}\Gamma = \hat{B}$, λόγω του α)i. και
- ΔΕ = ΔΒ, λόγω του α)ii.

Άρα τα τρίγωνα ΔΕΓ και ΔΒΖ είναι ίσα, γιατί έχουν μία κάθετη πλευρά και μία οξεία γωνία αντίστοιχα, μία προς μία ίσες. Άρα ΔΓ = ΔΖ, γιατί είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες $\Delta\hat{E}\Gamma$ και $\hat{B}$ στα ίσα τρίγωνα. Άρα, το τρίγωνο ΔΓΖ είναι ισοσκελές (με βάση ΓΖ) και ορθογώνιο με $\Gamma\hat{\Delta}Z = 90^o$. Άρα $\Delta\hat{\Gamma}Z = \Delta\hat{Z}\Gamma$ και από το άθροισμα γωνιών τριγώνου είναι $\Delta\hat{\Gamma}Z + \Delta\hat{Z}\Gamma = 90^o$. Άρα $\Delta\hat{Z}\Gamma = \Delta\hat{\Gamma}Z = 45^o$.

48. Θέμα 13499

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) με $AB < A\Gamma$ και ΑΗ το ύψος προς την υποτείνουσα. Στην πλευρά ΒΓ θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε τέτοια ώστε $\Delta B = AB$ και $\Gamma E = \Gamma A$. Αν ΔΖ και ΕΘ είναι οι αποστάσεις των Δ και Ε από τις πλευρές ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) $\Gamma\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}H$ και $E\hat{A}B = H\hat{A}E$.

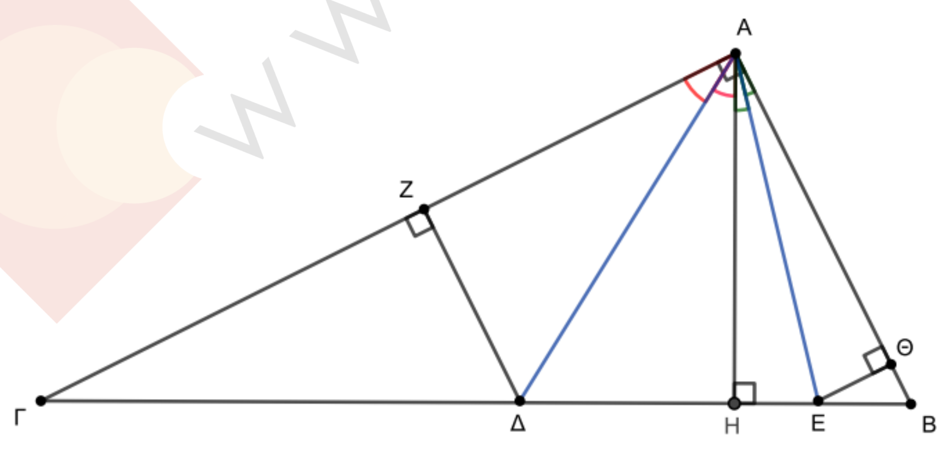
(Μονάδες 14)

β) $\Delta E = \Delta Z + E\Theta$.

(Μονάδες 11)

ΛΥΣΗ

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^o$) με $AB < A\Gamma$ και ΑΗ το ύψος προς την υποτείνουσα. Στην πλευρά ΒΓ θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε τέτοια ώστε $\Delta B = AB$ και $\Gamma E = \Gamma A$. Φέρουμε τις αποστάσεις ΔΖ και ΕΘ των Δ και Ε από τις πλευρές ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα.



α) Από το σχήμα έχουμε ότι: $\Gamma\hat{A}\Delta = \Gamma\hat{A}B - \Delta\hat{A}B = 90^o - \Delta\hat{A}B$ (1).

Οι γωνίες $\Delta\hat{A}H$ και $A\hat{\Delta}H$ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΔΗ είναι συμπληρωματικές, οπότε: $\Delta\hat{A}H = 90^o - A\hat{\Delta}H$ (2).

Αφού $B\Delta = BA$, το τρίγωνο ΒΔΑ θα είναι ισοσκελές με βάση ΔΑ, οπότε οι γωνίες $\Delta\hat{A}B$ και $A\hat{\Delta}H$ θα είναι ίσες ως προσκείμενες στη βάση, δηλαδή $\Delta\hat{A}B = A\hat{\Delta}H$ (3).

Άρα, από τις σχέσεις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι $\Gamma\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}H$ (4).

Έχουμε, επίσης, ότι: $E\hat{A}B = \Gamma\hat{A}B - \Gamma\hat{A}E = 90^o - \Gamma\hat{A}E$ (5).

Οι γωνίες $H\hat{A}E$ και $A\hat{E}H$ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΕΗ είναι συμπληρωματικές, οπότε: $H\hat{A}E = 90^o - A\hat{E}H$ (6).

Αφού $\Gamma E = \Gamma A$, το τρίγωνο ΓΕΑ θα είναι ισοσκελές με βάση ΕΑ, οπότε οι γωνίες $\Gamma\hat{A}E$ και $A\hat{E}H$ θα είναι ίσες ως προσκείμενες στη βάση, δηλαδή $\Gamma\hat{A}E = A\hat{E}H$ (7).

Άρα, από τις σχέσεις (5), (6) και (7) προκύπτει ότι $E\hat{A}B = H\hat{A}E$ (8).

β) Από (α) ερώτημα ισχύει ότι $E\hat{A}B = H\hat{A}E$, οπότε η ΑΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $H\hat{A}B$ του τριγώνου ΑΗΒ.

Άρα, το σημείο Ε ισαπέχει από τις πλευρές ΑΗ και ΑΒ κι επομένως είναι $EH = E\Theta$.

Από (α) ερώτημα ισχύει, επίσης, ότι $\Gamma\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}H$, οπότε η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $H\hat{A}\Gamma$ του τριγώνου ΑΗΓ.

Άρα, το σημείο Δ ισαπέχει από τις πλευρές ΑΗ και ΑΓ κι επομένως είναι $\Delta H = \Delta Z$.

Συνεπώς, $\Delta E = \Delta H + EH = \Delta Z + E\Theta$.

49. Θέμα 13537

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$, σημείο Δ της πλευράς ΑΓ, ώστε $ΑΔ = ΒΔ = ΒΓ$ και σημείο Ε της πλευράς ΑΒ, ώστε $ΑΕ = ΓΔ$.

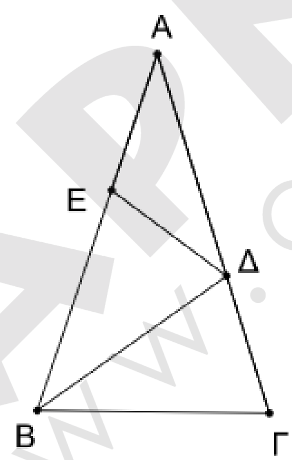
α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\hat{Γ} = 2\hat{Α}$. (Μονάδες 6)

ii. $\hat{Α} = 36^o$. (Μονάδες 6)

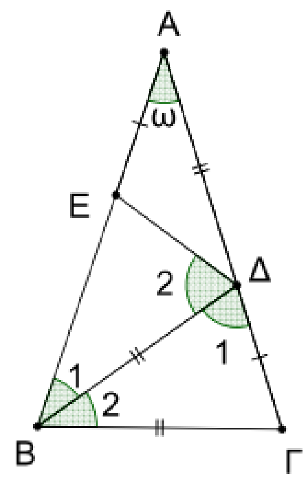
iii. Το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

β) Στην προέκταση της ΔΕ προς το Ε θεωρούμε σημείο Ζ, ώστε $ΔΖ = ΑΓ$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΖ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)



ΛΥΣΗ

α) Έστω $\hat{Α} = ω$ (1).



i. Γνωρίζουμε ότι $ΑΔ = ΒΔ$, άρα το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με βάση ΑΒ, οπότε οι προσκείμενες στη βάση γωνίες του είναι ίσες, δηλαδή $\hat{Β}_1 = ω$ (2).

Η γωνία $\hat{Δ}_1$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΒΔ, άρα είναι $\hat{Δ}_1 = 2ω$ (3).

Είναι $ΒΓ = ΒΔ$ (από τα δεδομένα), άρα το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ισοσκελές με βάση ΓΔ, οπότε οι προσκείμενες στη βάση του γωνίες θα είναι ίσες, δηλαδή $\hat{Γ} = \hat{Δ}_1$, οπότε λόγω της σχέσης (3) θα είναι $\hat{Γ} = 2ω$ (4).

Από τις σχέσεις (1), (4) προκύπτει ότι $\hat{Γ} = 2\hat{Α}$.

ii. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $ΑΒ = ΑΓ$ (από τα δεδομένα), οπότε και οι προσκείμενες στη βάση ΒΓ γωνίες θα είναι ίσες, δηλαδή $\hat{Β} = \hat{Γ}$, άρα θα είναι και $\hat{Β} = 2ω$ (5) λόγω της σχέσης (4).

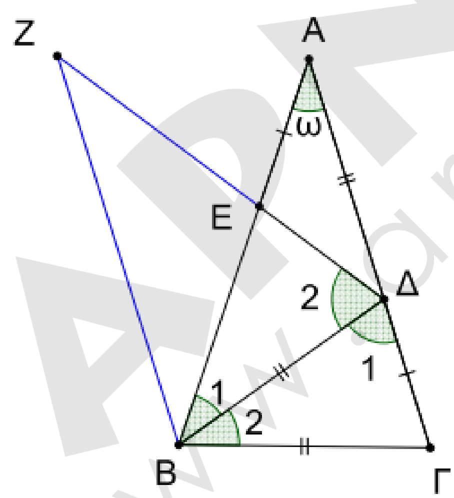
Στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι $\hat{Α} + \hat{Β} + \hat{Γ} = 180^o$. Αξιοποιώντας τις σχέσεις (1), (4) και (5) θα είναι $ω + 2ω + 2ω = 180^o$ ή $ω = 36^o$. Άρα $\hat{Α} = 36^o$.

iii. Ένας τρόπος να αποδείξουμε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές είναι να αποδείξουμε ότι $ΑΕ = ΔΕ$. Όμως από τα δεδομένα είναι $ΑΕ = ΔΓ$, οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι $ΔΕ = ΔΓ$. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΒΓΔ και ΒΕΔ τα οποία έχουν:

- $ΒΔ = ΒΔ$, κοινή πλευρά.
- $ΒΓ = ΒΕ$, γιατί $ΒΓ = ΑΔ$ από τα δεδομένα και $ΒΕ = ΑΔ$ ως διαφορές των ίσων τμημάτων $ΑΒ = ΑΓ$ και $ΑΕ = ΓΔ$.
- $\hat{Β}_1 = \hat{Β}_2$, αφού $\hat{Β}_1 = ω = 36^o$ και $\hat{Β}_2 = \hat{Β} - \hat{Β}_1 = 2ω - ω = 36^o$.

Τα τρίγωνα ΒΓΔ και ΒΕΔ είναι ίσα, γιατί έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (κριτήριο ΠΓΠ). Άρα θα είναι ίσες και οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{Β}_1, \hat{Β}_2$, δηλαδή $ΔΕ = ΔΓ$.

β)



Στην ισότητα των τριγώνων ΒΓΔ και ΒΕΔ έχουμε αποδείξει ότι $ΒΓ = ΒΕ$, οπότε και οι αντίστοιχες γωνίες θα είναι ίσες, δηλαδή $\hat{Δ}_1 = \hat{Δ}_2$. Από τη σχέση (3) έχουμε ότι $\hat{Δ}_1 = 72^o$, άρα $\hat{Δ}_2 = 72^o$.

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΒΔ έχουν:

- $ΒΓ = ΒΔ$, από τα δεδομένα.
- $ΑΓ = ΖΔ$, από το δεδομένο του ερωτήματος.
- $\hat{Γ} = \hat{Δ}_2 = 72^o$.

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΒΔ είναι ίσα, γιατί έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (κριτήριο ΠΓΠ). Όμως το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, οπότε και το τρίγωνο ΒΔΖ είναι ισοσκελές.

50. Θέμα 13697

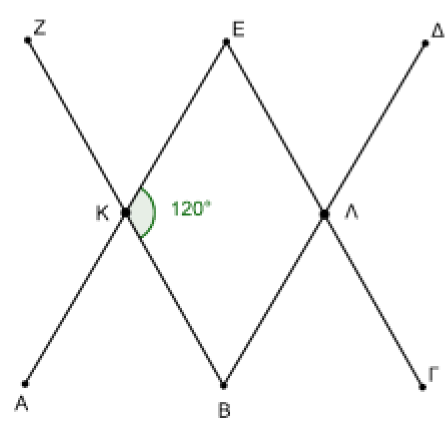
Στο παρακάτω σχήμα, τα τμήματα ΑΕ, ΒΖ, ΒΔ και ΓΕ αναπαριστάνουν τέσσερεις ίσους ράβδους μήκους 40 cm οι οποίες αποτελούν μέρη μιας κρεμάστρας τοίχου.
Οι ράβδοι συνδέονται με τέτοιο τρόπο ώστε ανά δύο απέναντι να είναι παράλληλες, δηλαδή ΑΕ // ΒΔ και ΒΖ // ΓΕ, και ανά δύο να έχουν κοινό μέσο, δηλαδή Κ κοινό μέσο των ΑΕ, ΒΖ και Λ κοινό μέσο των ΒΔ, ΓΕ. Έστω ότι η μία από τις γωνίες που σχηματίζουν οι τεμνόμενες ράβδοι ΑΕ και ΒΖ με κορυφή το κοινό τους μέσο Κ, η γωνία $B\hat{K}E$, είναι ίση με 120^0.

α) Να αποδείξετε ότι $A\hat{K}B = K\hat{B}\Lambda = B\hat{\Lambda}\Gamma = 60^0$. (Μονάδες 9)

β) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΒΛΓ είναι ίσα και ισόπλευρα. Να εξετάσετε αν ο ισχυρισμός του είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ ανήκουν στην ίδια ευθεία. (Μονάδες 6)



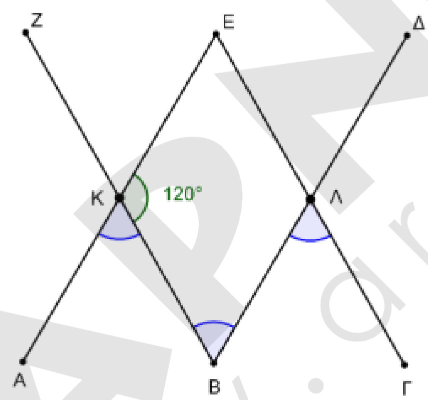
ΛΥΣΗ

α) Οι γωνίες $A\widehat{K}B$ και $B\widehat{K}E$ είναι παραπληρωματικές, οπότε ισχύει $A\widehat{K}B + B\widehat{K}E = 180^0$ και αφού $B\widehat{K}E = 120^0$ τότε $A\widehat{K}B + 120^0 = 180^0$ ή $A\widehat{K}B = 180^0 - 120^0$ ή $A\widehat{K}B = 60^0$ (1)

Είναι $A\widehat{K}B = K\widehat{B}\Lambda$ ως γωνίες εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΕ και ΒΔ με τέμνουσα την ΒΖ και αφού είναι $A\widehat{K}B = 60^0$ από τη σχέση (1), θα είναι και $K\widehat{B}\Lambda = 60^0$ (2).

Είναι $K\widehat{B}\Lambda = B\widehat{\Lambda}\Gamma$ ως γωνίες εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΒΖ και ΓΕ με τέμνουσα την ΒΔ και αφού είναι $K\widehat{B}\Lambda = 60^0$ από σχέση (2), θα είναι και $B\widehat{\Lambda}\Gamma = 60^0$ (3)

Από (1), (2) και (3) προκύπτει ότι $A\widehat{K}B = K\widehat{B}\Lambda = B\widehat{\Lambda}\Gamma = 60^0$ (4).



β) Τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΒΛΓ έχουν:

- ΑΚ = ΒΛ = 20 cm, ως μισά των ίσων τμημάτων ΑΕ και ΒΔ μήκους 40 cm όπου Κ και Λ τα μέσα τους.
- ΚΒ = ΛΓ = 20 cm, ως μισά των ίσων τμημάτων ΒΖ και ΓΕ μήκους 40 cm όπου Κ και Λ τα μέσα τους.
- $A\widehat{K}B = B\widehat{\Lambda}\Gamma = 60^0$, από σχέση (4)

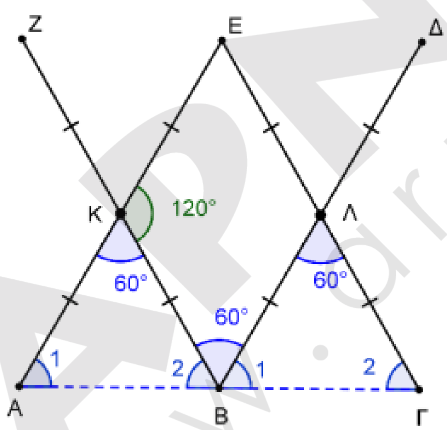
Επομένως τα τρίγωνα θα είναι ίσα, γιατί έχουν δυο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες. Οπότε θα είναι $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$ και $\widehat{B}_2 = \widehat{\Gamma}_2$ ως γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΚΒ, ΛΓ και ΚΑ, ΛΒ αντίστοιχα.

Επειδή είναι ΑΚ= ΚΒ = 20 cm, το τρίγωνο ΑΚΒ θα είναι ισοσκελές με βάση ΑΒ, οπότε θα έχει τις προσκείμενες στη βάση του γωνίες ίσες, δηλαδή $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_2$ (5).

Για τις γωνίες του τριγώνου ΑΚΒ ισχύει ότι $\widehat{A}_1 + A\widehat{K}B + \widehat{B}_2 = 180^0$ και αφού είναι $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_2$ από σχέση (5) και $A\widehat{K}B = 60^0$ τότε $2\widehat{A}_1 + 60^0 = 180^0$ ή $2\widehat{A}_1 = 180^0 - 60^0$ ή $2\widehat{A}_1 = 120^0$ ή $\widehat{A}_1 = 60^0$ (6).

Από σχέσεις (4), (5) και (6) προκύπτει ότι $A\widehat{K}B = \widehat{A}_1 = \widehat{B}_2 = 60^0$.

Συνεπώς, το τρίγωνο ΑΚΒ θα είναι ισόπλευρο γιατί έχει και τις τρεις γωνίες του ίσες, οπότε και το ίσο του τρίγωνο ΒΛΓ θα είναι και αυτό ισόπλευρο, οπότε κάθε γωνία του θα είναι ίση με 60^0, δηλαδή $B\widehat{\Lambda}\Gamma = \widehat{\Gamma}_2 = \widehat{B}_1 = 60^0$.



γ) Για να είναι τα Α, Β και Γ σημεία της ίδιας ευθείας, αρκεί να δειχθεί ότι η γωνία $A\widehat{B}\Gamma$ είναι ευθεία γωνία ή ότι $A\widehat{B}\Gamma = 180^0$.

Είναι $A\widehat{B}\Gamma = \widehat{B}_2 + K\widehat{B}\Lambda + \widehat{B}_1 = 3{\cdot}60^0 = 180^0$, αφού είναι $\widehat{B}_2 = \widehat{B}_1 = 60^0$ ως γωνίες ισοπλεύρων τριγώνων ΑΚΒ και ΒΛΓ. Επομένως, τα σημεία Α, Β και Γ ανήκουν στην ίδια ευθεία.

51. Θέμα 13750

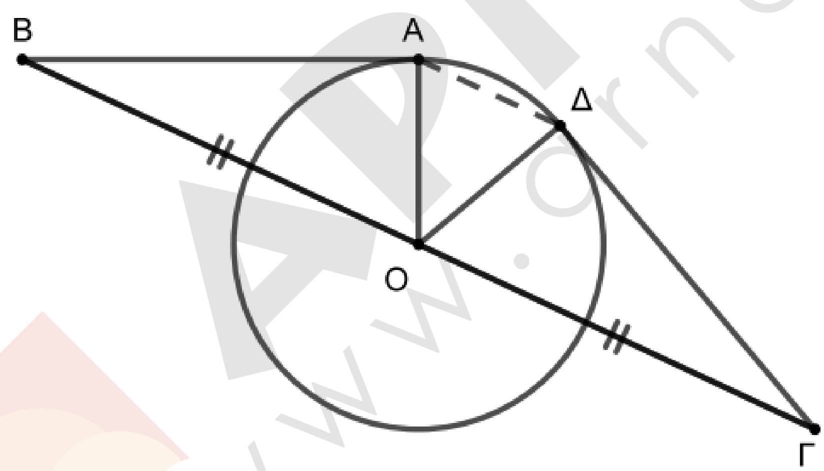
Από σημείο Β εξωτερικό ενός κύκλου (O,R) φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΒΑ. Ενώνουμε το σημείο Β με το κέντρο Ο του κύκλου και προεκτείνουμε κατά ίσο τμήμα ΟΓ = ΒΟ. Από το σημείο Γ φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΓΔ, όπως στο σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. ΑΒ = ΔΓ (Μονάδες 08)

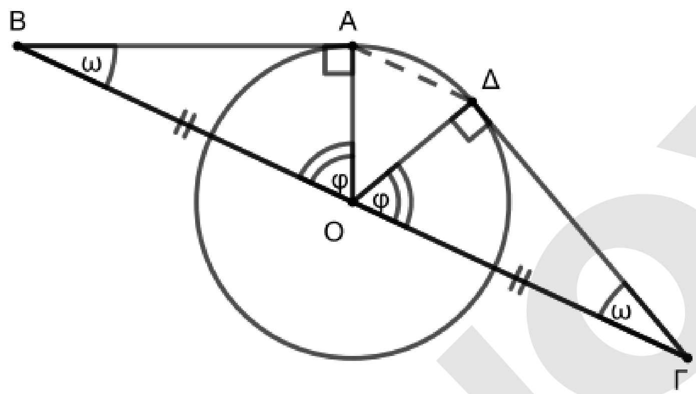
ii. ΑΔ // ΒΓ (Μονάδες 10)

β) Αν το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος ΒΑ είναι ίσο με την ακτίνα R, τι είδους τρίγωνο είναι το τρίγωνο ΑΟΔ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 07)



ΛΥΣΗ

α)



i. ΟΑ ⊥ ΑΒ και ΟΔ ⊥ ΔΓ διότι ΟΑ και ΟΔ είναι ακτίνες στα σημεία επαφής Α και Δ αντίστοιχα.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΔΓ, τα οποία έχουν:

- ΟΑ = ΟΔ, ακτίνες του κύκλου
- ΟΒ = ΟΓ, από την υπόθεση
- $O\hat{A}B = O\hat{\Delta}\Gamma = 90^o$, αφού ΟΑ ⊥ ΑΒ και ΟΔ ⊥ ΔΓ

Τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία κάθετη πλευρά ίση. Άρα θα έχουν ίσες και τις άλλες κάθετες πλευρές τους, δηλαδή ΑΒ = ΔΓ.

ii. Από την ισότητα των ορθογωνίων τριγώνων του α) i. ερωτήματος προκύπτει ότι $O\hat{B}A = O\hat{\Gamma}\Delta = \omega$, γιατί είναι οξείες γωνίες απέναντι από τις ίσες πλευρές ΟΑ και ΟΔ αντίστοιχα. Επίσης είναι $A\hat{O}B = \Delta\hat{O}\Gamma = \phi$ ως οξείες γωνίες απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΒ και ΔΓ αντίστοιχα, με $\omega + \phi = 90^o$ (1), ως άθροισμα οξειών γωνιών ορθογωνίων τριγώνων.

Για τη γωνία $A\hat{O}\Delta$ έχουμε: $A\hat{O}\Delta = 180^o - 2\varphi = 2(90^o - \varphi) = 2\omega$ λόγω της (1). Το τρίγωνο ΑΟΔ είναι ισοσκελές, αφού ΟΑ = ΟΔ = R. Για τις ίσες του γωνίες $O\hat{A}\Delta$ και $O\hat{\Delta}A$ έχουμε: $O\hat{A}\Delta = O\hat{\Delta}A = \frac{180^o - A\hat{O}\Delta}{2} = \frac{180^o - 2\omega}{2} = 90^o - \omega = \varphi$, λόγω της (1).

Άρα $O\hat{A}\Delta = A\hat{O}B = \varphi$ και είναι γωνίες εντός εναλλάξ των ΑΔ και ΒΓ που τέμνονται από την ΟΑ, οπότε ΑΔ//ΒΓ.

β) Αν το μήκος του ΒΑ είναι ίσο με R, τότε από το α) ερώτημα τα ίσα ορθογώνια τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΔΓ θα είναι και ισοσκελή, αφού ΟΑ = ΑΒ = ΟΔ = ΔΓ = R. Επομένως οι γωνίες ω και φ θα είναι ίσες και η καθεμία θα ισούται με 45^o. Τότε $A\hat{O}\Delta = 180^o - 2\varphi = 90^o$, οπότε το ισοσκελές τρίγωνο ΟΑΔ έχει τη γωνία της κορυφής του ορθή, άρα είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.