

**Κεφ. 4.6. - Τράπεζα Θεμάτων 2022 - Γεωμετρία Α' Λυκείου****ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ**

Η Τράπεζα Θεμάτων για τη Γεωμετρία Α' Λυκείου είναι μία μεγάλη «θάλασσα». Εμείς όμως έχουμε φροντίσει για εσένα, συγκεντρώνοντας εκείνα τα θέματα που αποτελούν τη «βάση» της γνώσης και για τα υπόλοιπα. Μελετώντας και κατανοώντας το μοτίβο σκέψης για τα συγκεκριμένα, μπορείς να λύσεις με επιτυχία και τα υπόλοιπα θέματα. Στην ιστοσελίδα μας [www.arnos.gr](http://www.arnos.gr) για το Course της Γεωμετρίας, μελετάς και προετοιμάζεσαι με την αναλυτική διδασκαλία σε ασκήσεις και θέματα, στο ύφος της Τράπεζας.

**Θέμα 2 - Κωδικοί:**

**1541, 1552, 1554, 1556, 1572, 1576, 1577, 1590, 1594, 1596, 1602  
1603, 1604, 1607, 1623, 1635, 1637, 1639, 1640, 1641, 1645, 1661  
1689, 1693, 1699, 1700, 1851, 12704, 12707, 12708, 12709, 13442,  
13443, 13535, 13654, 13741, 14884**

**1. Θέμα 1541**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ). Η διχοτόμος της γωνίας  $\hat{B}$  τέμνει την πλευρά  $A\Gamma$  στο σημείο  $\Delta$ . Φέρουμε τμήμα  $\Delta E$  κάθετο στην πλευρά  $B\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:

- α)  $BE=AB$ . (Μονάδες 12)
- β) Αν επιπλέον  $\hat{B\Delta A} = 55^\circ$ , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $\Gamma\Delta E$ . (Μονάδες 13)

*Έξυπνα & εύκολα!*

**2. Θέμα 1552**

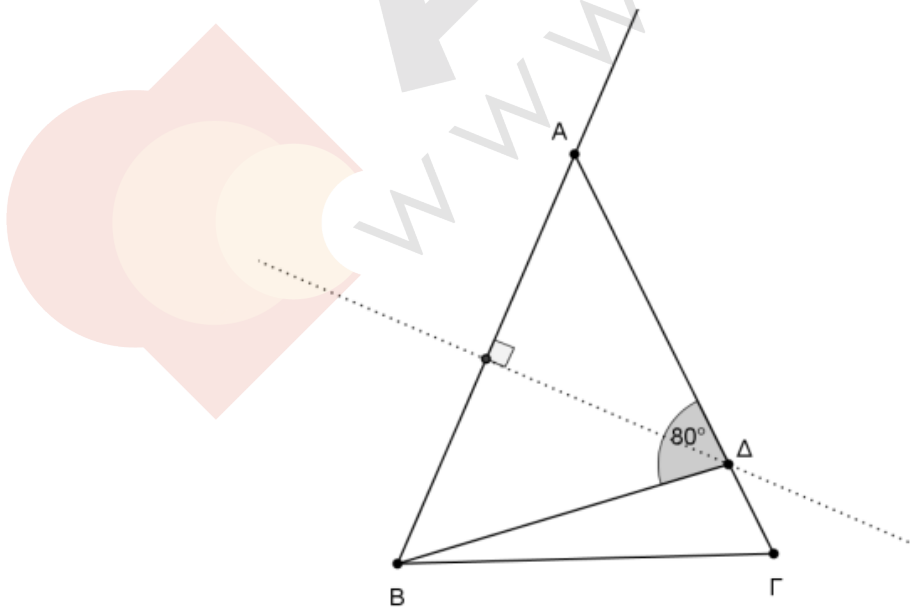
Ένας μαθητής της Α' λυκείου βρήκε έναν τρόπο να κατασκευάζει παράλληλες ευθείες. Στην αρχή σχεδιάζει μια τυχαία γωνία  $x\hat{O}y$ . Στη συνέχεια με κέντρο την κορυφή Ο της γωνίας σχεδιάζει δυο ομόκεντρους διαφορετικούς κύκλους με τυχαίες ακτίνες. Ο μικρότερος κύκλος τέμνει τις πλευρές  $Ox$  και  $Oy$  της γωνίας στα σημεία Α, Β αντίστοιχα και ο μεγαλύτερος στα σημεία Γ, Δ. Ισχυρίζεται ότι οι ευθείες που ορίζονται από τις χορδές ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλες. Μπορείτε να το δικαιολογήσετε; (Μονάδες 25)

**3. Θέμα 1554**

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο  $\hat{A}_{εξ} = 2\hat{A}B\Gamma$ . Φέρουμε τη μεσοκάθετο της πλευράς ΑΒ, η οποία τέμνει την πλευρά ΑΓ στο Δ και σχηματίζεται γωνία ΑΔΒ ίση με  $80^\circ$ .

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με  $AB=AG$ . (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 15)



*Έξυπνα & εύκολα!*

## 4. Θέμα 1556

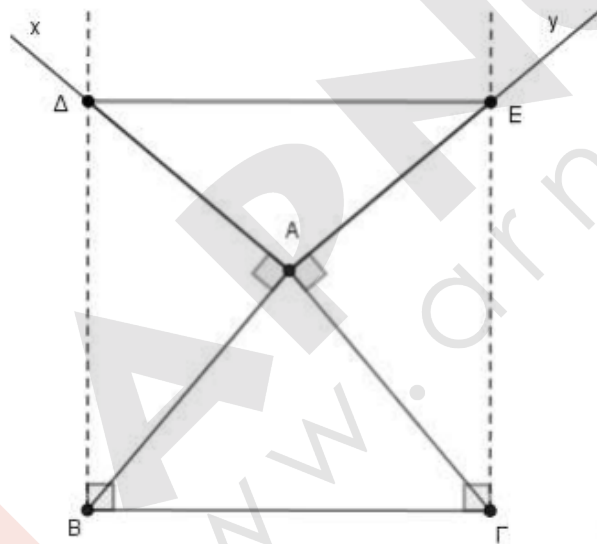
Δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB=AG$ . Φέρουμε, εκτός του τριγώνου, τις ημιευθείες  $Ax$  και  $Ay$  τέτοιες ώστε  $Ax \perp AB$  και  $Ay \perp AG$ , όπως στο σχήμα που ακολουθεί. Οι κάθετες στην πλευρά  $B\Gamma$  στα σημεία  $B$  και  $\Gamma$  τέμνουν τις  $Ax$  και  $Ay$  στα σημεία  $\Delta$  και  $E$  αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι  $B\Delta = \Gamma E$ .

(Μονάδες 12)

β) Αν η γωνία  $BA\Gamma$  είναι ίση με  $80^\circ$ , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $\Delta A E$ .

(Μονάδες 13)



Έξυπνα & εύκολα!

**5. Θέμα 1572**

Θωρούμε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB=A\Gamma$ ) και σημεία  $\Delta$  και  $E$  στην ευθεία  $B\Gamma$  τέτοια, ώστε  $B\Delta=GE$ . Έστω ότι  $\Delta Z \perp AB$  και  $EH \perp A\Gamma$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i.  $BZ=GH$ .

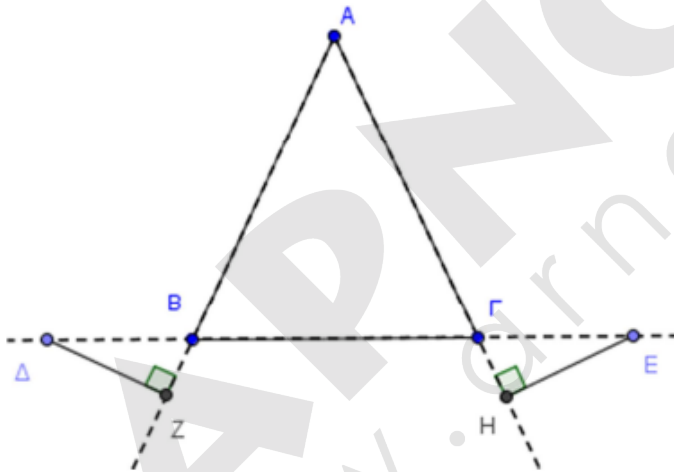
(Μονάδες 10)

ii. Το τρίγωνο  $AZH$  είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 7)

β) Αν  $\hat{A} = 50^\circ$ , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $AZH$ .

(Μονάδες 8)


**6. Θέμα 1576**

Σε ημικύκλιο διαμέτρου  $AB$  προεκτείνουμε την  $AB$  προς το μέρος του  $A$  και παίρνουμε ένα σημείο  $\Gamma$ . Θεωρούμε  $E$  ένα σημείο του ημικυκλίου και έστω  $\Delta$  το σημείο τομής του τμήματος  $GE$  με το ημικύκλιο. Αν το τμήμα  $\Gamma\Delta$  είναι ίσο με το  $OB$  και η γωνία  $B\hat{\Gamma}E$  είναι  $15^\circ$ , τότε

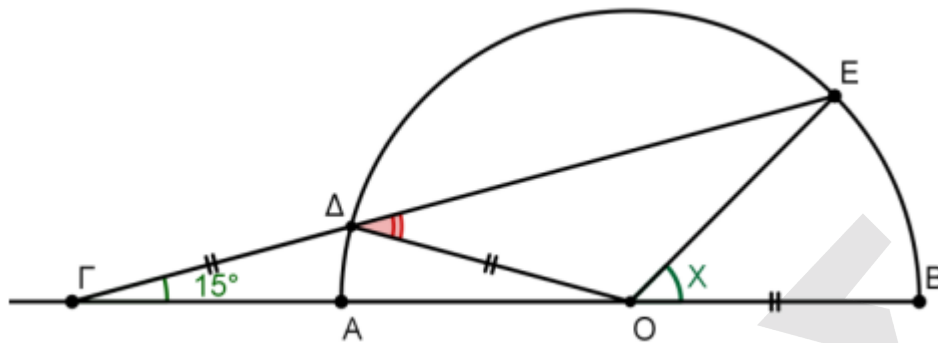
α) να αποδείξετε ότι  $O\hat{\Delta}E = 30^\circ$

(Μονάδες 13)

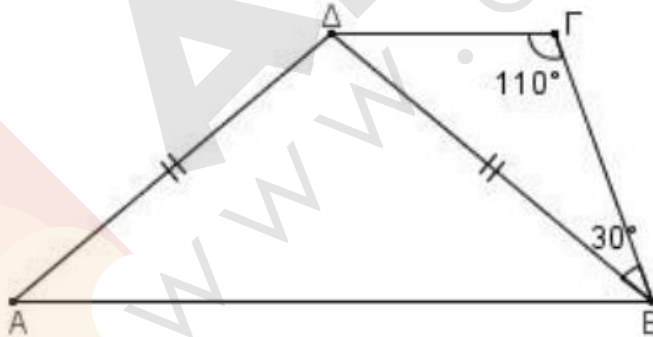
β) να υπολογίσετε τη γωνία  $E\hat{O}B = x$ .

(Μονάδες 12)

Έξυπνα & εύκολα!


**7. Θέμα 1577**

Δίνεται τραπέζιο  $ΑΒΓΔ$  με  $ΑΒ // ΓΔ$  στο οποίο η διαγώνιος  $ΒΔ$  είναι ίση με την πλευρά  $ΑΔ$ . Αν η γωνία  $\hat{\Gamma} = 110^\circ$  και η γωνία  $\widehat{ΔΒΓ} = 30^\circ$ , να υπολογίσετε τη γωνία  $\widehat{ΑΔΒ}$ .  
(Μονάδες 25)



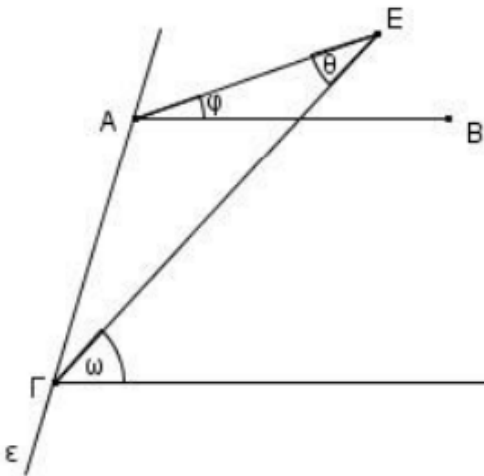
Έξυπνα & εύκολα!

**8. Θέμα 1590**

Δίνεται ευθεία  $\epsilon$  του επιπέδου. Τα παράλληλα τμήματα  $AB$  και  $\Gamma\Delta$  καθώς και ένα τυχαίο σημείο  $E$  βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο της  $\epsilon$ .

Να αποδείξετε ότι:

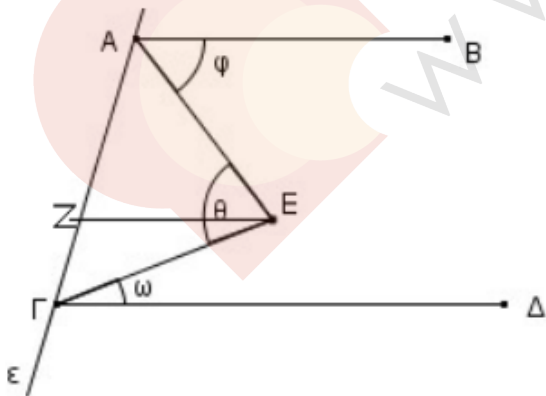
α) Αν το  $E$  είναι εκτός των τμημάτων  $AB$  και  $\Gamma\Delta$  τότε:  $\hat{\omega} = \hat{\varphi} + \hat{\theta}$



(Μονάδες 10)

β) Αν το  $E$  είναι ανάμεσα στα τμήματα  $AB$  και  $\Gamma\Delta$  και  $EZ \parallel AB$ , τότε να αποδείξετε ότι

$$\hat{\theta} = \hat{\omega} + \hat{\varphi}$$



(Μονάδες 15)

*Έξυπνα & εύκολα!*

## 9. Θέμα 1594

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ). Έστω  $\Delta$  σημείο της πλευράς  $A\Gamma$  τέτοιο ώστε, η διχοτόμος  $\Delta E$  της γωνίας  $A\hat{\Delta}B$  να είναι παράλληλη στην πλευρά  $B\Gamma$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i)  $E\hat{\Delta}B = \Delta\hat{B}\Gamma$  και  $E\hat{\Delta}A = \hat{\Gamma}$

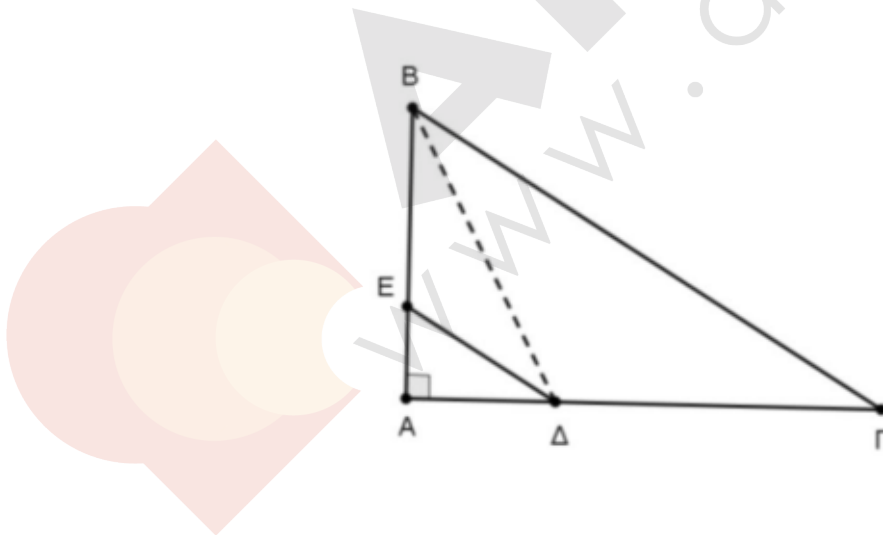
(Μονάδες 4 + 4)

ii) Το τρίγωνο  $B\Delta\Gamma$  είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 8)

β) Αν  $A\hat{\Delta}B = 60^\circ$  να υπολογίσετε τη γωνία  $\hat{\Gamma}$ .

(Μονάδες 9)



Έξυπνα & εύκολα!

**10. Θέμα 1596**

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma$ . Έστω  $Ax$  η διχοτόμος της εξωτερικής του γωνίας  $\widehat{A}_{\text{εξ}} = 120^\circ$ . Από την κορυφή  $B$  φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην  $Ax$ , η οποία τέμνει την πλευρά  $A\Gamma$  στο σημείο  $\Delta$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i.  $\widehat{A\Delta B} = 60^\circ$

(Μονάδες 5)

ii. Το τρίγωνο  $AB\Delta$  είναι ισόπλευρο.

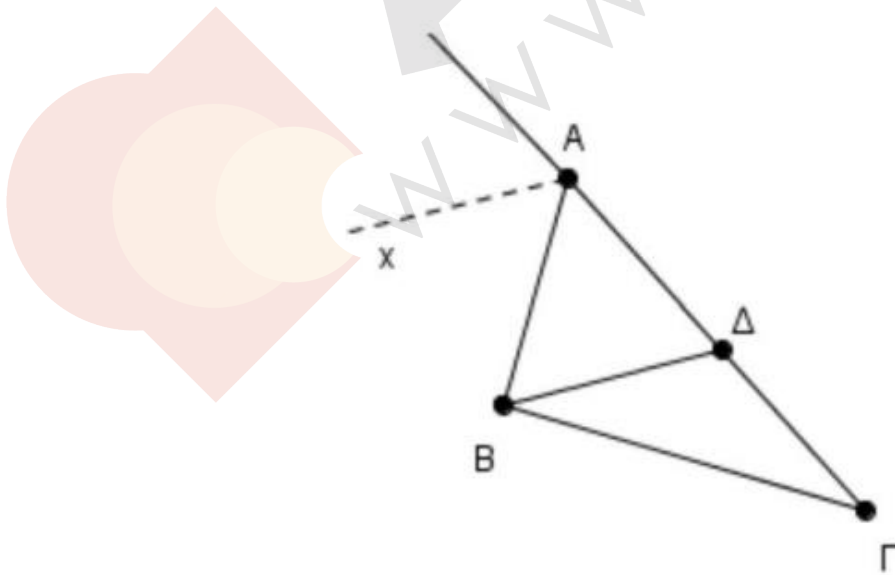
(Μονάδες 5)

iii.  $A\Gamma - AB = \Delta\Gamma$

(Μονάδες 5)

β) Αν η γωνία  $\widehat{B\Delta A}$  είναι διπλάσια της γωνίας  $\widehat{\Gamma}$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $B\Delta\Gamma$ .

(Μονάδες 10)



*Έξυπνα & εύκολα!*

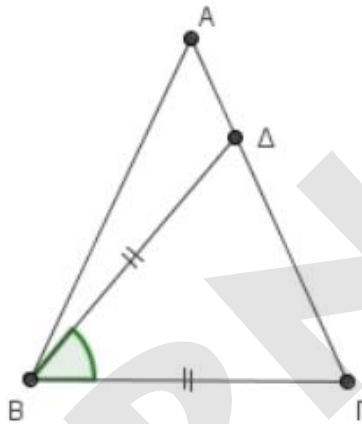


**11. Θέμα 1602**

Δίνεται τρίγωνο ισοσκελές  $AB\Gamma$  ( $AB=AG$ ) με γωνία  $\hat{A} = 50^\circ$ . Έστω  $\Delta$  είναι σημείο της πλευράς  $AG$ , τέτοιο ώστε  $B\Delta=B\Gamma$ .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες  $\hat{B}$  και  $\hat{\Gamma}$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ . (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία  $\widehat{\Delta B\Gamma}$  είναι ίση με τη γωνία  $\hat{A}$ . (Μονάδες 13)

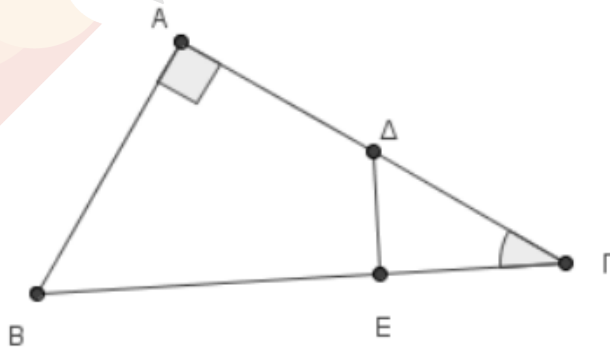

**12. Θέμα 1603**

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) με  $\hat{\Gamma} = 40^\circ$ . Έστω  $\Delta$  τυχαίο σημείο της πλευράς  $AG$  και  $\Delta E \perp B\Gamma$ .

Να υπολογίσετε:

α) τις γωνίες του τριγώνου  $\Delta E\Gamma$ . (Μονάδες 10)

β) τις γωνίες του τετραπλεύρου  $A\Delta E B$ . (Μονάδες 15)



*Έξυπνα & εύκολα!*

**13. Θέμα 1604**

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB=AG$ ) με γωνία κορυφής  $\hat{A} = 40^\circ$ . Στην προέκταση της  $GB$  (προς το  $B$ ) παίρνουμε τμήμα  $B\Delta$  τέτοιο ώστε  $B\Delta = AB$ .

Να υπολογίσετε

α) τις γωνίες του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

(Μονάδες 10)

β) τη γωνία  $\widehat{\Delta A\Gamma}$ .

(Μονάδες 15)

**14. Θέμα 1607**

Στο παρακάτω σχήμα ισχύουν  $\Delta B=BA=AG=GE$  και  $\widehat{BA\Gamma} = 40^\circ$ .

Να αποδείξετε ότι

α)  $\widehat{AB\Delta} = \widehat{A\Gamma E} = 110^\circ$ .

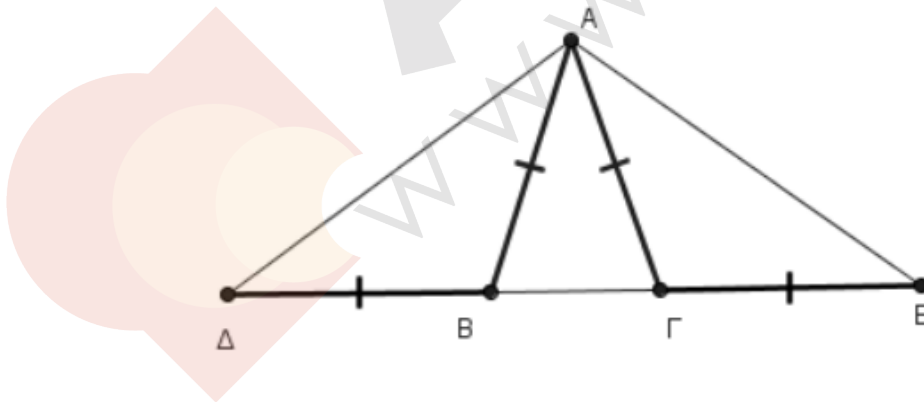
(Μονάδες 10)

β) τα τρίγωνα  $AB\Delta$  και  $A\Gamma E$  είναι ίσα.

(Μονάδες 10)

γ) το τρίγωνο  $\Delta A E$  είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 5)



Έξυπνα & εύκολα!

**15. Θέμα 1623**

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A} = 80^\circ$  και  $\hat{B} = 20^\circ + \hat{\Gamma}$ , και  $AD$  η διχοτόμος της γωνίας  $\hat{A}$ .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες  $\hat{B}$  και  $\hat{\Gamma}$ . (Μονάδες 12)

β) Φέρουμε από το  $\Delta$  ευθεία παράλληλη στην  $AB$ , που τέμνει την  $A\Gamma$  στο  $E$ . Να υπολογίσετε τις γωνίες  $\hat{A\Delta E}$ ,  $\hat{E\Delta\Gamma}$ . (Μονάδες 13)

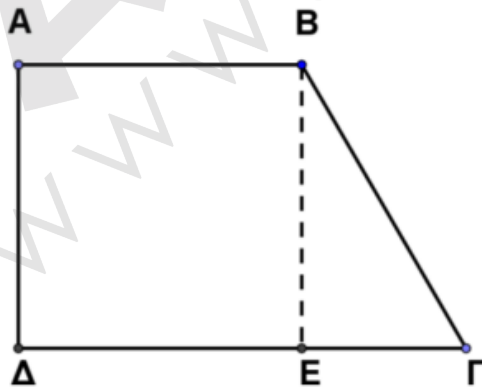
**16. Θέμα 1635**

Δίνεται τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ), με  $AB = B\Gamma = 4$ ,  $\hat{A} = 90^\circ$  και  $\hat{\Gamma} = 60^\circ$ . Δίνεται επίσης το ύψος  $BE$  από τη κορυφή  $B$ .

α) Να υπολογίσετε τις άλλες δυο γωνίες του τραapeζίου  $AB\Gamma\Delta$ . (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε  $2E\Gamma = B\Gamma$ . (Μονάδες 9)

γ) Αν  $M, N$  τα μέσα των πλευρών  $AD, B\Gamma$  αντίστοιχα να βρείτε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος  $MN$ . (Μονάδες 8)



Έξυπνα & εύκολα!

**17. Θέμα 1637**

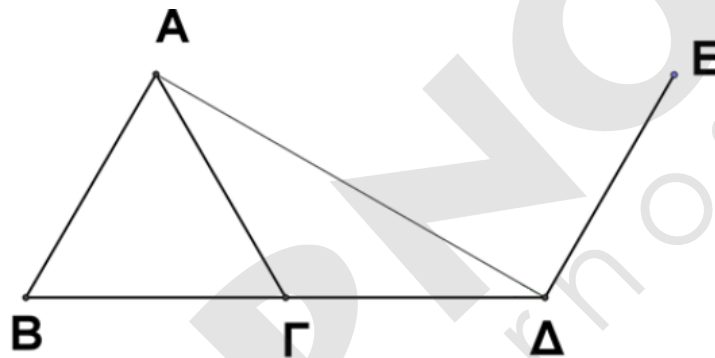
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Στην προέκταση της  $B\Gamma$  (προς το μέρος του  $\Gamma$ ) θεωρούμε τμήμα  $\Gamma\Delta=B\Gamma$ . Φέρουμε τμήμα  $\Delta E$  κάθετο στην  $AD$  στο σημείο της  $\Delta$ , τέτοιο ώστε  $\Delta E=B\Gamma$ . ( $A$  και  $E$  στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την  $B\Delta$ ).

α) Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου  $AB\Delta$ .

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι  $AB\Delta E$  παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 13)


**18. Θέμα 1639**

Στα ορθογώνια τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A\Delta E$  (γωνία  $A$  ορθή) του παρακάτω σχήματος ισχύει

$$\hat{B} = \hat{\Delta} = 30^\circ.$$

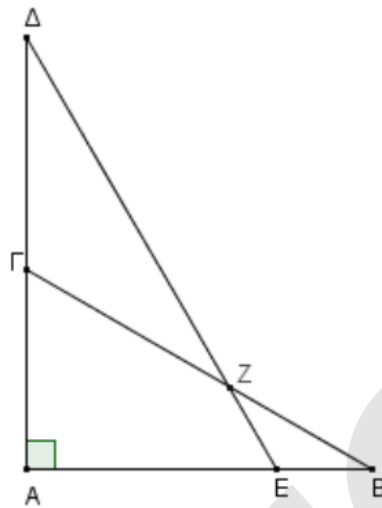
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου  $A\epsilon Z\Gamma$ .

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $\Gamma Z\Delta$  και  $E B Z$  είναι ισοσκελή.

(Μονάδες 12)

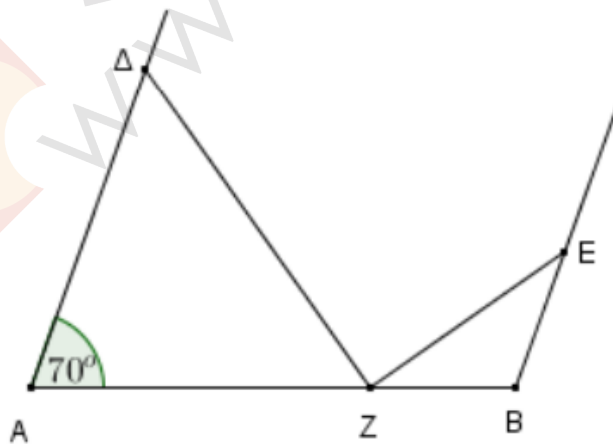
Έξυπνα & εύκολα!


**19. Θέμα 1640**

Στο παρακάτω σχήμα, οι  $AD$  και  $BE$  είναι παράλληλες. Επιπλέον ισχύουν  $AD=AZ$ ,  $BE=BZ$  και  $\hat{A} = 70^\circ$ .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων  $AΔZ$  και  $BZE$ . (Μονάδες 16)

β) Να αποδείξετε ότι  $\hat{\Delta ZE} = 90^\circ$ . (Μονάδες 9)



*Έξυπνα & εύκολα!*

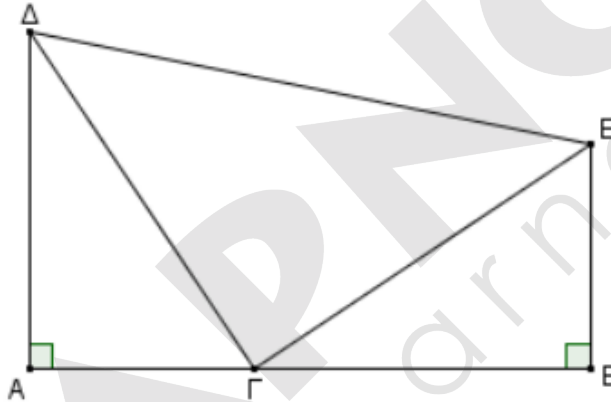
**20. Θέμα 1641**

Στο παρακάτω σχήμα οι γωνίες  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  είναι ορθές και επιπλέον  $AD=BG$  και  $AG=BE$ .

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα  $A\Gamma\Delta$  και  $B\Gamma E$  είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) Αν η γωνία  $\hat{E\Gamma B} = 40^\circ$  τότε το τρίγωνο  $\Delta\Gamma E$  είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. (Μονάδες 12)

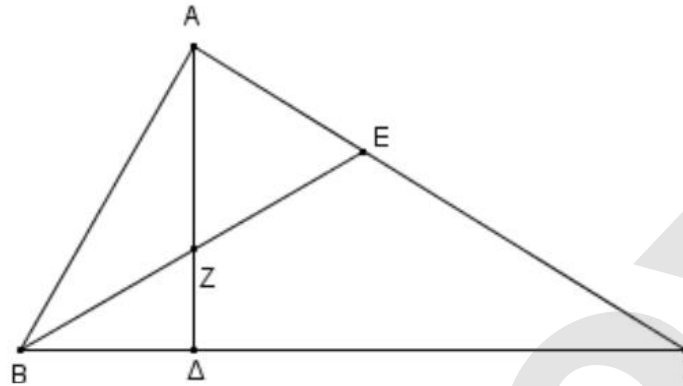

**21. Θέμα 1645**

Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  ισχύουν  $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2\hat{B}$  και  $\hat{A} = 3\hat{\Gamma}$ .

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία B είναι  $60^\circ$ . (Μονάδες 10)

β) Αν το ύψος του  $A\Delta$  και η διχοτόμος του  $BE$  τέμνονται στο σημείο Z, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AZE$  είναι ισοπλευρό. (Μονάδες 15)

Έξυπνα & εύκολα!

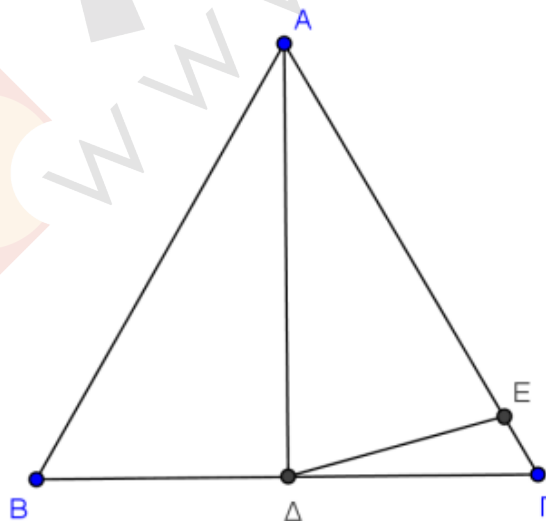

**22. Θέμα 1661**

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$  και η διάμεσός του  $AD$  τέτοια ώστε  $\widehat{B\hat{A}\Delta} = 30^\circ$ .  
 Θεωρούμε σημείο  $E$  στην  $A\Gamma$  τέτοιο ώστε  $AD = AE$ .

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $ADE$ . (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία  $E\Delta\Gamma$ . (Μονάδες 8)



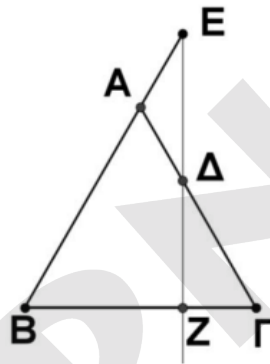
*Έξυπνα & εύκολα!*

**23. Θέμα 1689**

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Θεωρούμε σημείο  $E$  στην προέκταση της  $BA$  (προς το  $A$ ) και σημείο  $\Delta$  στο εσωτερικό της πλευράς  $A\Gamma$ , ώστε  $AE=AD$ .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $A\Delta E$ . (Μονάδες 10)

β) Αν  $Z$  είναι το σημείο τομής της προέκτασης της  $E\Delta$  (προς το  $\Delta$ ) με την  $B\Gamma$ , να αποδείξετε ότι η  $EZ$  είναι κάθετη στην  $B\Gamma$ . (Μονάδες 15)


**24. Θέμα 1693**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) και  $A\Delta$  η διχοτόμος της γωνίας  $A$ . Από το σημείο  $\Delta$  φέρουμε την παράλληλη προς την  $AB$  που τέμνει την  $A\Gamma$  στο  $E$ .

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $E\Delta\Gamma$  είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία  $A\Delta E$ . (Μονάδες 9)

γ) Αν η γωνία  $\hat{B}$  είναι 20 μοίρες μεγαλύτερη της γωνίας  $\hat{\Gamma}$ , να υπολογίσετε τη γωνία  $E\hat{\Delta}\Gamma$ . (Μονάδες 7)

Έξυπνα & εύκολα!



## 25. Θέμα 1699

Έστω ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB=AG$ ).

α) Να αποδείξετε ότι τα μέσα  $\Delta$  και  $E$  των πλευρών  $AB$  και  $AG$  αντίστοιχα, ισαπέχουν από τη βάση  $B\Gamma$ . (Μονάδες 13)

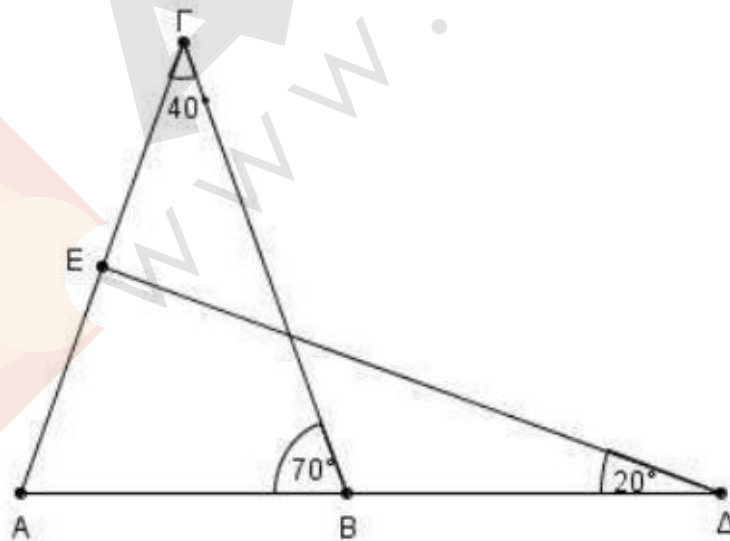
β) Αν  $\hat{A} = 75^\circ + \hat{B}$ , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $AB\Gamma$ . (Μονάδες 12)

## 26. Θέμα 1700

Με βάση τα δεδομένα του σχήματος, να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές, (Μονάδες 12)

β) η γωνία  $AE\Delta$  είναι ορθή. (Μονάδες 13)



Έξυπνα & εύκολα!

**27. Θέμα 1851**

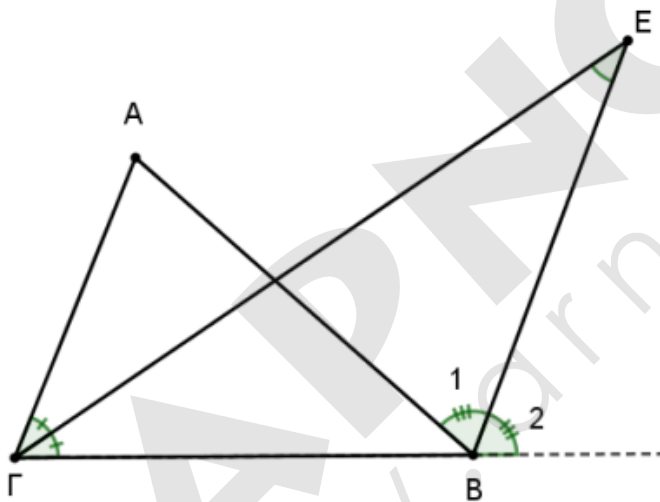
Σε τρίγωνο  $\triangle AB\Gamma$  η προέκταση της διχοτόμου της  $\hat{\Gamma}$  και της εξωτερικής γωνίας του  $\hat{B}$ , τέμνονται στο E. Δίνεται ότι  $\hat{ABE} = 70^\circ = 2\hat{\Gamma EB}$

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $\Gamma BE$  είναι ισοσκελές

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $\triangle AB\Gamma$ .

(Μονάδες 13)


**28. Θέμα 12704**

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{B} = 70^\circ$  και  $\hat{\Gamma}_{\text{εξωτ}} = 140^\circ$ .

Στην πλευρά  $B\Gamma$  θεωρούμε εσωτερικό σημείο  $\Delta$ , ώστε  $A\Delta = AB$ . Να αποδείξετε ότι:

α)  $\hat{B\Delta A} = 40^\circ$ .

(Μονάδες 9)

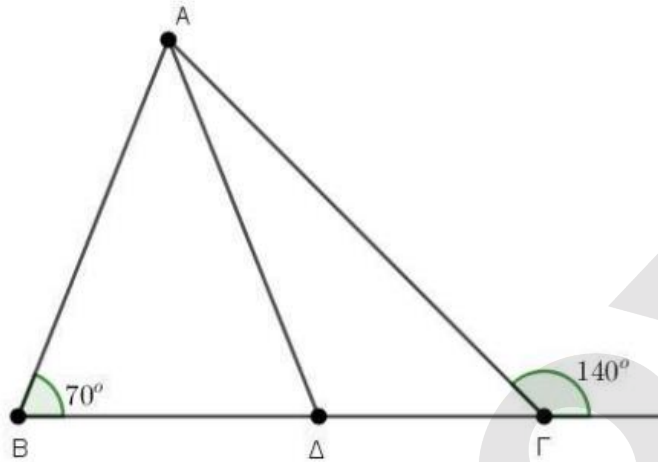
β)  $\hat{A\Delta\Gamma} = 110^\circ$ .

(Μονάδες 7)

γ) Το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές.

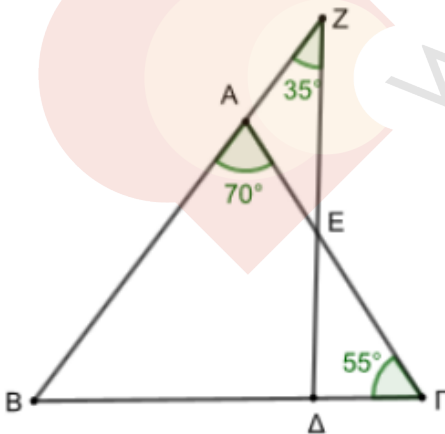
(Μονάδες 9)

Έξυπνα & εύκολα!


**29. Θέμα 12707**

Δίνεται το τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A} = 70^\circ$  και  $\hat{\Gamma} = 55^\circ$ . Προεκτείνουμε την πλευρά  $BA$  προς το σημείο  $Z$  και παίρνουμε στην προέκταση σημείο  $\Delta$  ώστε  $B\hat{\Delta}Z = 35^\circ$ , όπου  $\Delta$  εσωτερικό σημείο της  $B\Gamma$ . Η  $Z\Delta$  τέμνει την  $A\Gamma$  στο σημείο  $E$ . Να αποδείξετε ότι:

- α) το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)
- β)  $Z\hat{\Delta}B = 90^\circ$ . (Μονάδες 8)
- γ) το τρίγωνο  $AZE$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

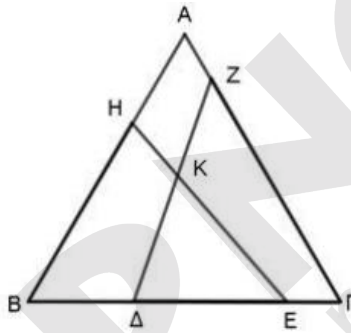


*Έξυπνα & εύκολα!*

**30. Θέμα 12708**

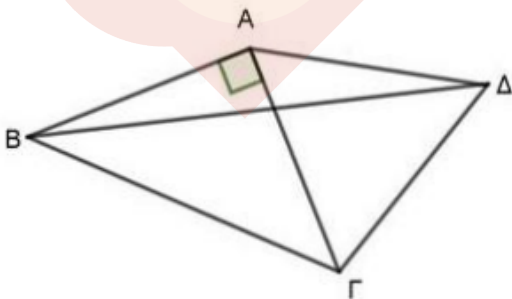
Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Στις πλευρές  $B\Gamma$  και  $GA$  θεωρούμε σημεία  $E$  και  $Z$  αντίστοιχα ώστε  $BE = \Gamma Z$ . Στις πλευρές  $AB$  και  $GB$  θεωρούμε σημεία  $H$  και  $\Delta$  αντίστοιχα ώστε  $BH = \Gamma\Delta$ . Τα ευθύγραμμα τμήματα  $\Delta Z$  και  $EH$  τέμνονται στο σημείο  $K$  το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του τριγώνου  $AB\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:

- α)  $EH = \Delta Z$  και  $\widehat{BHE} = \widehat{\Gamma\Delta Z}$ . (Μονάδες 12)
- β) τα τρίγωνα  $BEH$  και  $KE\Delta$  έχουν ίσες γωνίες μία προς μία. (Μονάδες 13)


**31. Θέμα 12709**

Δίνεται το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$  και  $\widehat{A} = 90^\circ$ . Εξωτερικά του τριγώνου  $AB\Gamma$  κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο  $A\Gamma\Delta$ .

- α) Να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών  $B, \Gamma$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ . (Μονάδες 5)
- β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Delta$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)
- γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας  $AB\Delta$ . (Μονάδες 12)



*Έξυπνα & εύκολα!*

**32. Θέμα 13442**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A} = 90^\circ$ . Στην πλευρά του  $AB$  θεωρούμε σημείο  $\Delta$  ώστε  $B\Delta = \Delta\Gamma$  και  $A\Delta = A\Gamma$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $\hat{A\Delta\Gamma} = 45^\circ$ . (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία  $\hat{B}$ . (Μονάδες 13)


**33. Θέμα 13443**

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A} = 60^\circ$  και  $\hat{\Gamma} = 40^\circ$ . Στην πλευρά  $A\Gamma$  θεωρούμε σημείο  $\Delta$ , ώστε  $\hat{\Gamma\hat{B}\Delta} = 20^\circ$ .

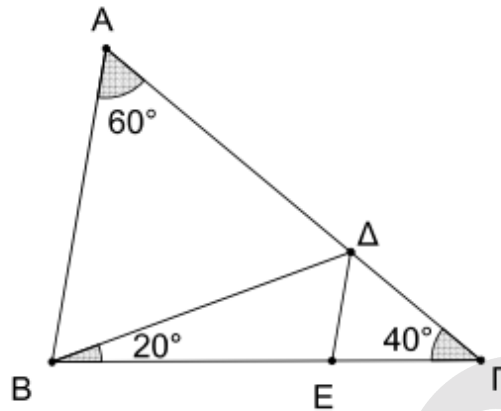
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Delta$  είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 10)

β) Η παράλληλη από το  $\Delta$  προς την  $AB$  τέμνει την πλευρά  $B\Gamma$  στο σημείο  $E$ . Να αποδείξετε ότι:

i.  $\hat{B\hat{\Delta}E} = 60^\circ$ . (Μονάδες 8)

ii. Η  $\Delta E$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{B\hat{\Delta}\Gamma}$ . (Μονάδες 7)

*Έξυπνα & εύκολα!*

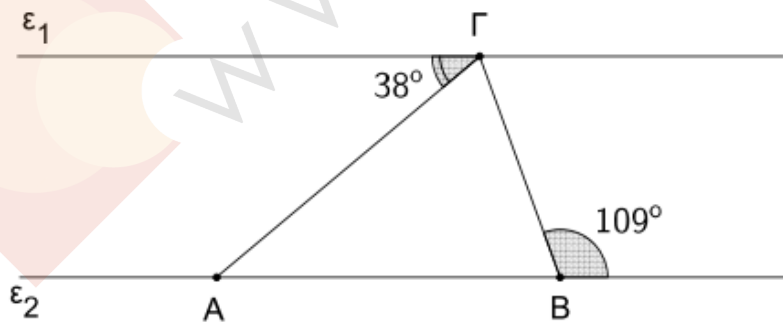

**34. Θέμα 13535**

Στο παρακάτω σχήμα η ευθεία  $\varepsilon_1$  διέρχεται από την κορυφή  $\Gamma$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  και είναι παράλληλη στην ευθεία  $\varepsilon_2$  που ορίζεται από τις κορυφές του  $A$  και  $B$ .

Αξιοποιώντας τα δεδομένα του σχήματος:

α) να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $AB\Gamma$ . (Μονάδες 15)

β) να δικαιολογήσετε γιατί το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές και να εξηγήσετε ποιες είναι οι ίσες πλευρές του. (Μονάδες 10)



*Έξυπνα & εύκολα!*

**35. Θέμα 13654**

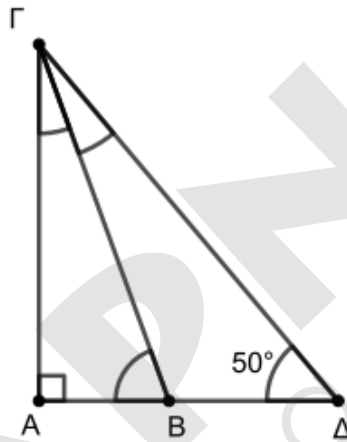
Στο ακόλουθο σχήμα είναι  $\hat{A} = 90^\circ$ ,  $\hat{A\hat{B}\Gamma} - \hat{A\hat{\Gamma}B} = 50^\circ$  και  $\hat{A\hat{\Gamma}D} = 50^\circ$ .

α) Να υπολογίσετε τις οξείες γωνίες  $\hat{A\hat{B}\Gamma}$  και  $\hat{A\hat{\Gamma}B}$  του ορθογωνίου τριγώνου  $AB\Gamma$ .

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η  $\Gamma B$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{A\hat{\Gamma}D}$ .

(Μονάδες 15)


**36. Θέμα 13741**

Στο σχήμα που ακολουθεί οι ευθείες  $\epsilon$  και  $\zeta$  είναι παράλληλες. Αν είναι  $\hat{\alpha} = 76^\circ$  και

$\hat{\gamma} = 120^\circ$ , να υπολογίσετε :

α) Τη γωνία  $\hat{\beta}$ .

(Μονάδες 5)

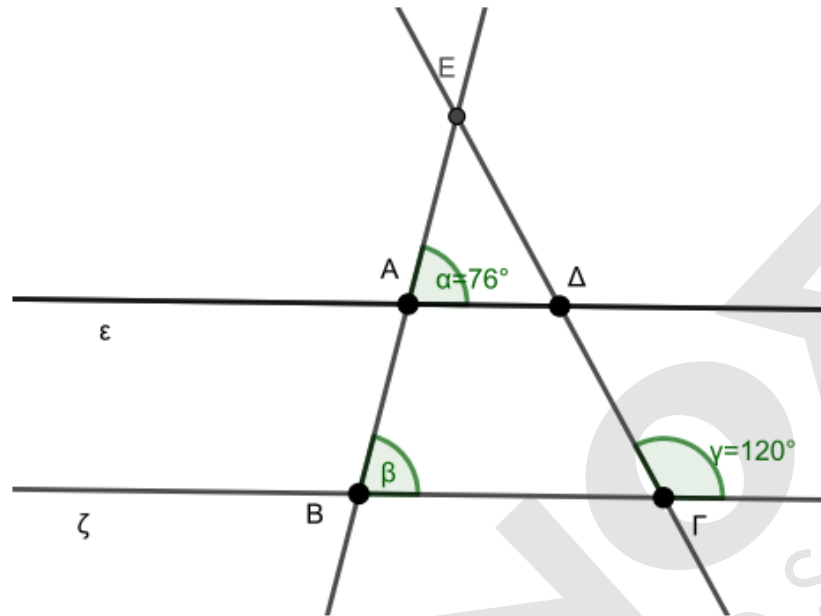
β) Τις γωνίες του τετράπλευρου  $AB\Gamma\Delta$ .

(Μονάδες 12)

γ) Τη γωνία  $\hat{E}$  του τριγώνου  $EAD$ .

(Μονάδες 8)

*Έξυπνα & εύκολα!*


**37. Θέμα 14884**

Έστω τρίγωνο  $AB\Delta$  με  $\hat{A} = 120^\circ$ . Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα  $AEB$  και  $AZ\Delta$ .

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα  $AEZ$  και  $AB\Delta$  είναι ίσα.

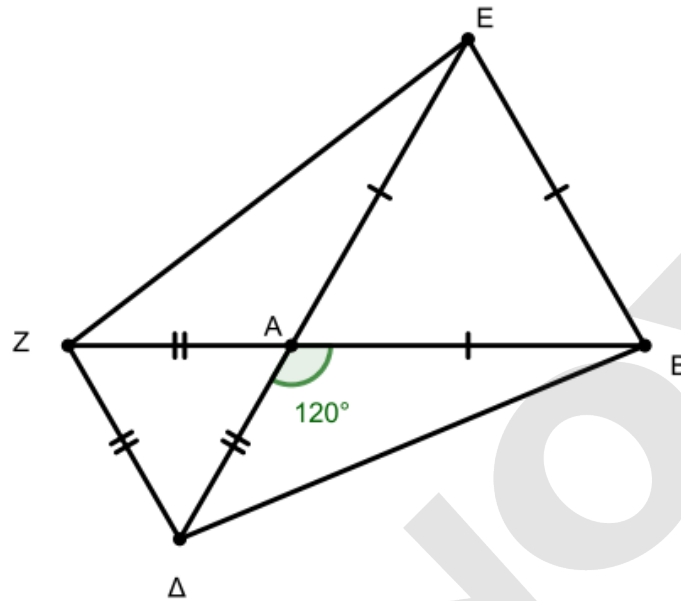
(Μονάδες 13)

β) Το τμήμα  $\Delta Z$  είναι παράλληλο στο  $BE$ .

(Μονάδες 12)

*Έξυπνα & εύκολα!*





Θέμα 3 - Κωδικός:

12200

**38. Θέμα 12200**

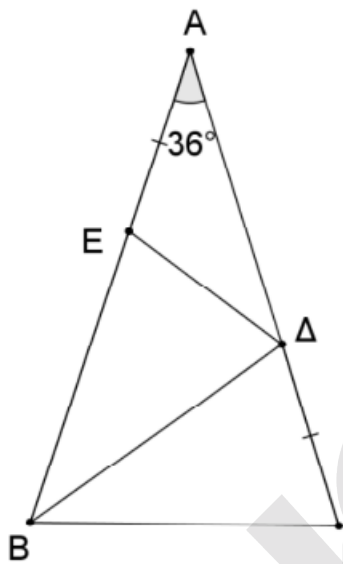
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$  και  $\hat{A} = 36^\circ$ . Έστω  $B\Delta$  η διχοτόμος της γωνίας  $\hat{B}$  και  $E$  σημείο της πλευράς  $AB$  ώστε  $AE = \Gamma\Delta$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $A\Delta = B\Delta$ . (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $B\Delta E$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

γ) Η παράλληλη από το  $B$  προς την  $A\Gamma$  τέμνει την προέκταση της  $\Delta E$  (προς το  $E$ ) στο σημείο  $Z$ . Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $B\Delta Z$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

*Έξυπνα & εύκολα!*



Έξυπνα & εύκολα!

Θέμα 4 - Κωδικοί:

1708, 1779, 1784, 1792, 1819, 1828, 1849, 1888, 1894, 13499, 13537

13697, 13750

39.Θέμα 1708

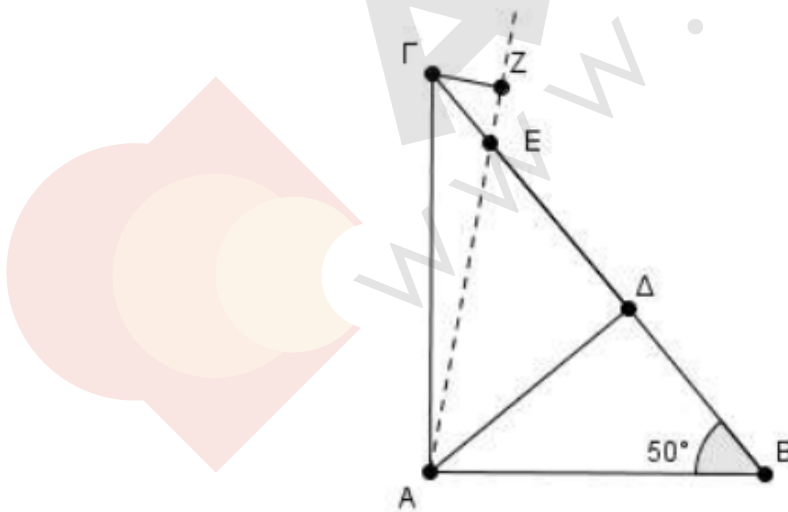
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\widehat{A} = 90^\circ$ ) με  $\widehat{B} = 50^\circ$ , το ύψος του  $A\Delta$  και σημείο  $E$  στην  $\Delta\Gamma$  ώστε  $\Delta E = B\Delta$ . Το σημείο  $Z$  είναι η προβολή του  $\Gamma$  στην  $AE$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο  $ABE$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

ii.  $\widehat{\Gamma A E} = 10^\circ$ . (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $Z\Gamma E$ . (Μονάδες 9)



Έξυπνα & εύκολα!

**40. Θέμα 1779**

Θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$  και τα σημεία  $\Delta$  και  $E$  των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα, ώστε να είναι  $A\Delta = GE$ . Έστω  $O$  το σημείο τομής των  $\Gamma\Delta$  και  $BE$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i.  $\widehat{B\hat{E}\Gamma} = \widehat{\Gamma\hat{\Delta}A}$ .

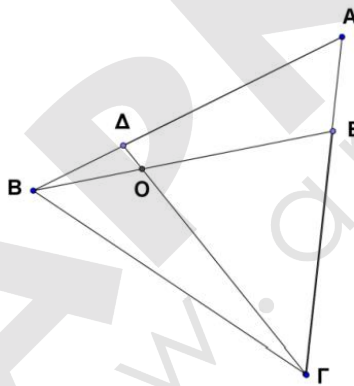
(Μονάδες 10)

ii.  $\widehat{B\hat{O}\Gamma} = 120^\circ$ .

(Μονάδες 10)

β) Να εξετάσετε αν το τετράπλευρο  $AEO\Delta$  είναι εγγράψιμο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)


**41. Θέμα 1784**

Δίνεται τραπέζιο  $A\Delta EB$ , με  $A\Delta \parallel BE$ , στο οποίο ισχύει ότι  $AB = A\Delta + BE$ , και  $O$  το μέσον της  $\Delta E$ . Θεωρούμε σημείο  $Z$  στην  $AB$  τέτοιο ώστε  $AZ = A\Delta$  και  $BZ = BE$ .

Αν γωνία  $\widehat{\Delta\hat{A}Z} = \varphi$ ,

α) να εκφράσετε τη γωνία  $AZ\Delta$  σε συνάρτηση με τη  $\varphi$ .

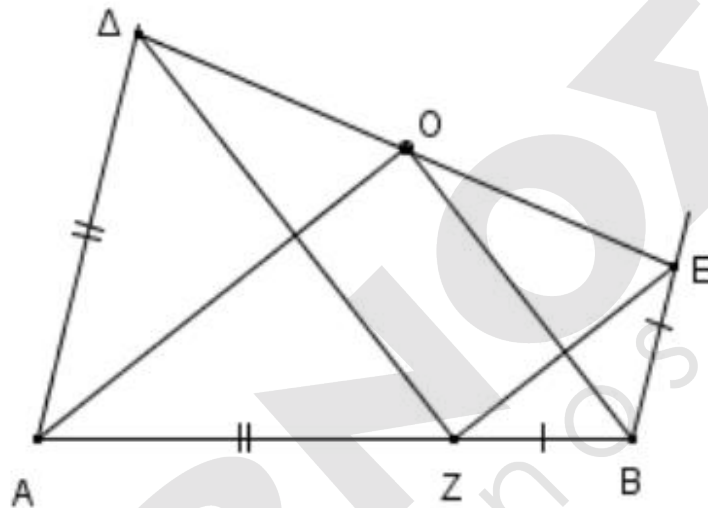
(Μονάδες 8)

β) να εκφράσετε τη γωνία  $EZB$  σε συνάρτηση με τη  $\varphi$ .

(Μονάδες 8)

Έξυπνα & εύκολα!

γ) να αποδείξετε ότι οι ΟΑ και ΟΒ είναι μεσοκάθετοι των τμημάτων ΔΖ και ΖΕ αντίστοιχα. (Μονάδες 9)


**42. Θέμα 1792**

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με  $AB < AG$ . Φέρουμε τη διχοτόμο του ΑΚ και σε τυχαίο σημείο της Ε φέρουμε ευθεία κάθετη στη διχοτόμο ΑΚ, η οποία τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ζ και Δ αντίστοιχα και την προέκταση της ΓΒ στο σημείο Η.

Να αποδείξετε ότι:

α)  $\hat{Z}\hat{\Delta}\hat{\Gamma} = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$ .

(Μονάδες 7)

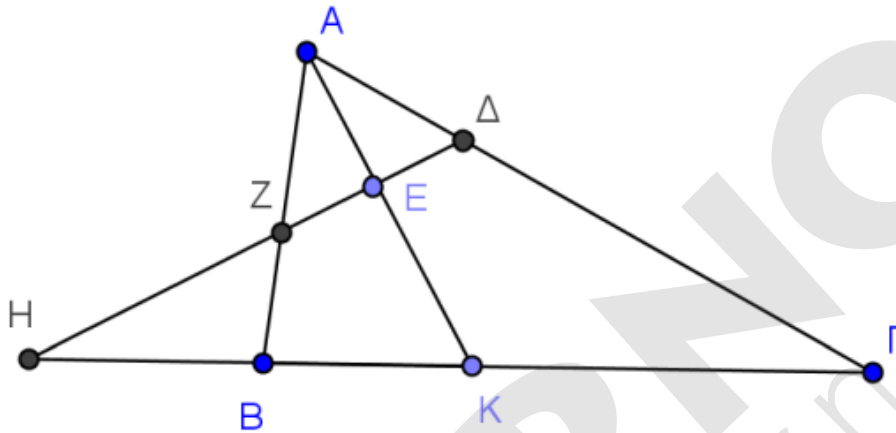
*Έξυπνα & εύκολα!*

β)  $ZK = K\Delta$ .

(Μονάδες 8)

γ)  $\hat{ZHG} = \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$ .

(Μονάδες 10)


**43. Θέμα 1819**

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$  και στην προέκταση της  $\Gamma B$  (προς το  $B$ ) θεωρούμε σημείο  $\Delta$  τέτοιο ώστε  $B\Delta = B\Gamma$ , ενώ στην προέκταση της  $B\Gamma$  (προς το  $\Gamma$ ) θεωρούμε σημείο  $E$  τέτοιο ώστε  $\Gamma E = B\Gamma$ . Φέρουμε την κάθετη στην  $E\Delta$  στο σημείο  $E$ , η οποία τέμνει την προέκταση της  $\Delta A$  στο  $Z$ .

 α) Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων  $\Gamma A E$  και  $B\Delta A$ .

(Μονάδες 8)

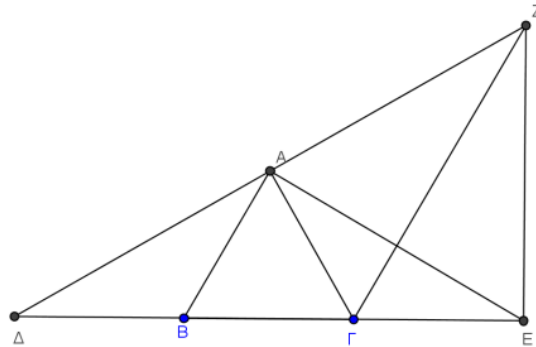
 β) Να αποδείξετε ότι η  $\Gamma Z$  είναι μεσοκάθετος του  $A E$ .

(Μονάδες 12)

 γ) Να αποδείξετε ότι  $AB \parallel \Gamma Z$ .

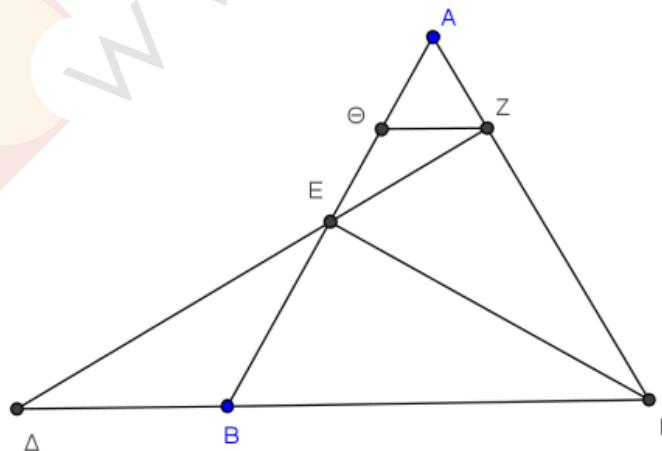
(Μονάδες 5)

*Έξυπνα & εύκολα!*


**44. Θέμα 1828**

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ABΓ και το ύψος του ΓΕ. Στην προέκταση της ΓΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε  $BΔ = \frac{BΓ}{2}$ . Αν η ευθεία ΔΕ τέμνει την ΑΓ στο Ζ και  $ZΘ // BΓ$ :

- α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές και το τρίγωνο ΑΘΖ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 10)
- β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΘΕΖ. (Μονάδες 5)
- γ) Να αποδείξετε ότι  $AE = 2 \Theta Z$ . (Μονάδες 5)
- δ) Να αποδείξετε ότι  $3AB = 4\Theta B$ . (Μονάδες 5)



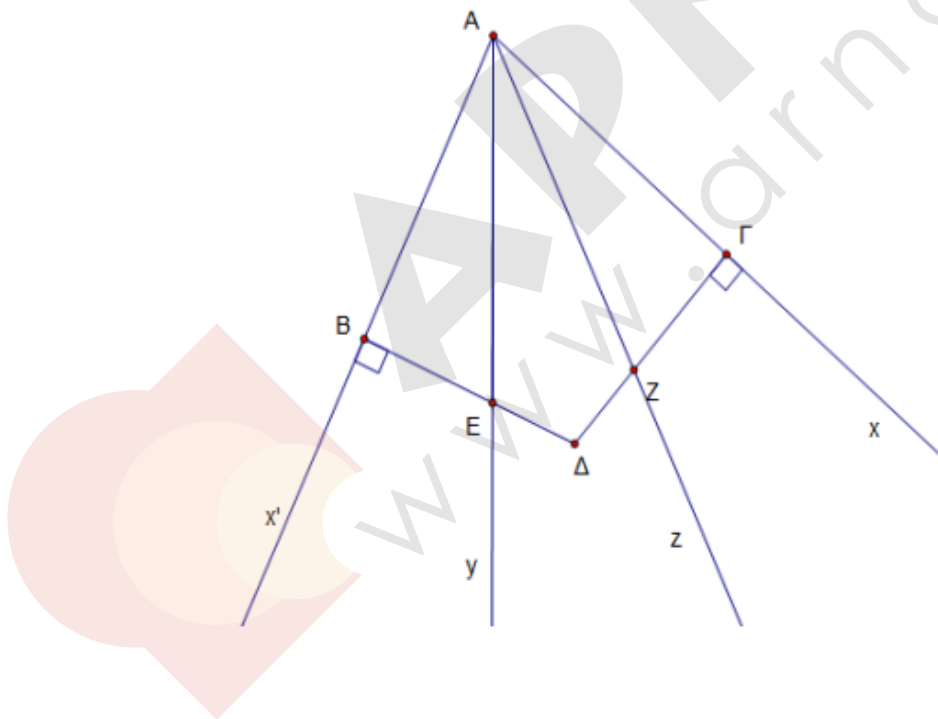
*Έξυπνα & εύκολα!*

## 45. Θέμα 1849

Στις πλευρές  $Ax'$  και  $Ax$  γωνίας  $\hat{x}'Ax$  θεωρούμε σημεία  $B$  και  $\Gamma$  ώστε  $AB=AG$ . Οι κάθετες στις  $Ax'$  και  $Ax$  στα σημεία  $B$  και  $\Gamma$  αντίστοιχα, τέμνονται στο  $\Delta$ .

Αν οι ημιευθείες  $Ay$  και  $Az$  χωρίζουν τη γωνία  $\hat{x}'Ax$  σε τρεις ίσες γωνίες και τέμνουν τις  $B\Delta$  και  $\Delta\Gamma$  στα σημεία  $E$  και  $Z$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο  $\hat{E}AZ$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)
- β) Το  $\Delta$  ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας  $\hat{x}'Ax$ . (Μονάδες 8)
- γ) Οι γωνίες  $\Gamma B\Delta$  και  $\Gamma A\Delta$  είναι ίσες. (Μονάδες 9)



Έξυπνα & εύκολα!



**46. Θέμα 1888**

Έστω ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και  $M$  το μέσο της  $B\Gamma$ . Φέρουμε  $\Gamma\Delta \perp B\Gamma$  με  $\Gamma\Delta = AB$  ( $A, \Delta$  εκατέρωθεν της  $B\Gamma$ ).

Να αποδείξετε ότι:

α)  $AM \parallel \Gamma\Delta$

(Μονάδες 6)

β) η  $A\Delta$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $M\hat{A}\Gamma$ .

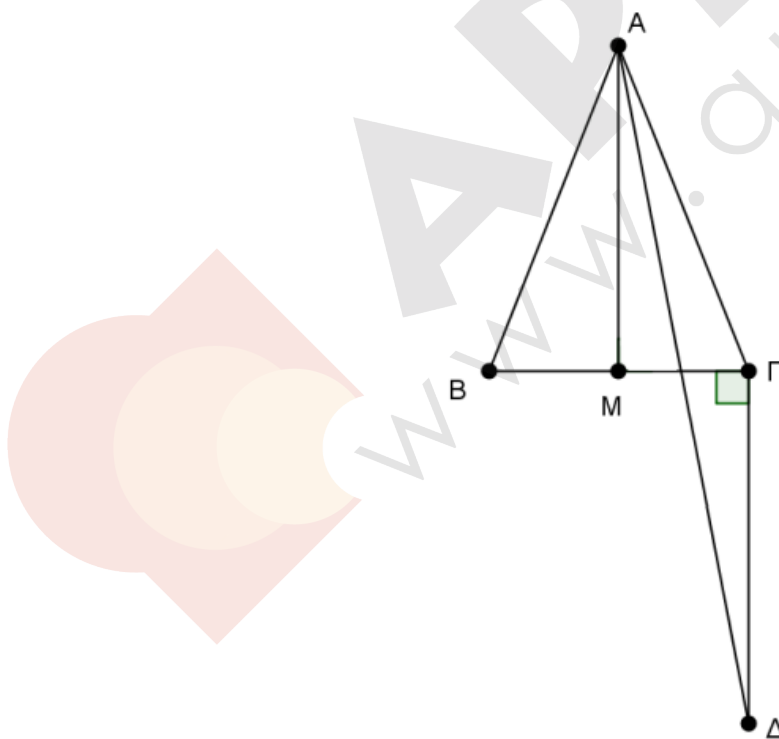
(Μονάδες 7)

γ)  $\Delta\hat{A}\Gamma = 45^\circ - \frac{\hat{B}}{2}$

(Μονάδες 7)

δ)  $A\Delta < 2 AB$

(Μονάδες 5)



*Έξυπνα & εύκολα!*

**47. Θέμα 1894**

Σε ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) φέρουμε τη διχοτόμο του  $A\Delta$ . Έστω  $\Delta K$  και  $\Delta P$  οι προβολές του  $\Delta$  στις  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα. Η κάθετη της  $B\Gamma$  στο σημείο  $\Delta$  τέμνει την πλευρά  $A\Gamma$  στο  $E$  και την προέκταση της πλευράς  $AB$  (προς το  $B$ ) στο σημείο  $Z$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i.  $\hat{B} = \hat{\Delta E\Gamma}$

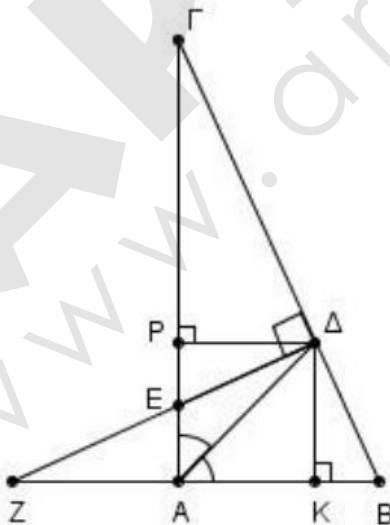
(Μονάδες 8)

ii.  $\Delta E = \Delta B$

(Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία  $\Delta\Gamma Z$

(Μονάδες 9)



Έξυπνα & εύκολα!

**48. Θέμα 13499**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) με  $AB < A\Gamma$  και  $AH$  το ύψος προς την υποτείνουσα. Στην πλευρά  $B\Gamma$  θεωρούμε τα σημεία  $\Delta$  και  $E$  τέτοια ώστε  $\Delta B = AB$  και  $\Gamma E = \Gamma A$ . Αν  $\Delta Z$  και  $E\Theta$  είναι οι αποστάσεις των  $\Delta$  και  $E$  από τις πλευρές  $A\Gamma$  και  $AB$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α)  $\hat{\Gamma}\hat{A}\hat{\Delta} = \hat{\Delta}\hat{A}\hat{H}$  και  $\hat{E}\hat{A}\hat{B} = \hat{H}\hat{A}\hat{E}$ .

(Μονάδες 14)

β)  $\Delta E = \Delta Z + E\Theta$ .

(Μονάδες 11)

**49. Θέμα 13537**

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$ , σημείο  $\Delta$  της πλευράς  $A\Gamma$ , ώστε  $A\Delta = B\Delta = B\Gamma$  και σημείο  $E$  της πλευράς  $AB$ , ώστε  $AE = \Gamma\Delta$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i.  $\hat{\Gamma} = 2\hat{A}$ .

(Μονάδες 6)

ii.  $\hat{A} = 36^\circ$ .

(Μονάδες 6)

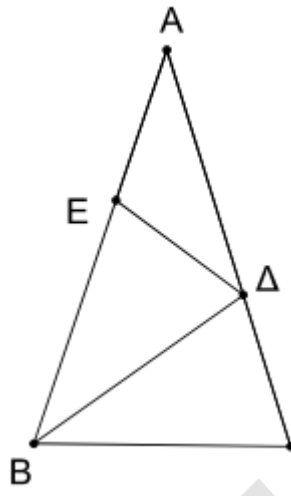
iii. Το τρίγωνο  $A\Delta E$  είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 6)

β) Στην προέκταση της  $\Delta E$  προς το  $E$  θεωρούμε σημείο  $Z$ , ώστε  $\Delta Z = A\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $B\Delta Z$  είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 7)

Έξυπνα & εύκολα!


**50. Θέμα 13697**

Στο παρακάτω σχήμα, τα τμήματα  $AE$ ,  $BZ$ ,  $BΔ$  και  $ΓE$  αναπαριστούν τέσσερις ίσους ράβδους μήκους 40 cm οι οποίες αποτελούν μέρη μιας κρεμάστρας τοίχου.

Οι ράβδοι συνδέονται με τέτοιο τρόπο ώστε ανά δύο απέναντι να είναι παράλληλες, δηλαδή  $AE \parallel BΔ$  και  $BZ \parallel ΓE$ , και ανά δύο να έχουν κοινό μέσο, δηλαδή  $K$  κοινό μέσο των  $AE$ ,  $BZ$  και  $Λ$  κοινό μέσο των  $BΔ$ ,  $ΓE$ . Έστω ότι η μία από τις γωνίες που σχηματίζουν οι τεμνόμενες ράβδοι  $AE$  και  $BZ$  με κορυφή το κοινό τους μέσο  $K$ , η γωνία  $\widehat{BKE}$ , είναι ίση με  $120^\circ$ .

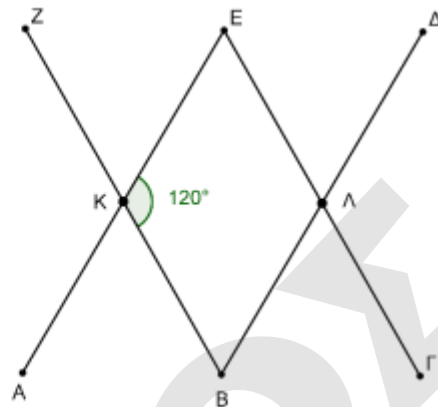
α) Να αποδείξετε ότι  $\widehat{AKB} = \widehat{KBL} = \widehat{BLΓ} = 60^\circ$ . (Μονάδες 9)

β) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι τα τρίγωνα  $AKB$  και  $BLΓ$  είναι ίσα και ισόπλευρα. Να εξετάσετε αν ο ισχυρισμός του είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία  $A$ ,  $B$  και  $Γ$  ανήκουν στην ίδια ευθεία. (Μονάδες 8)

*Έξυπνα & εύκολα!*


**51. Θέμα 13750**

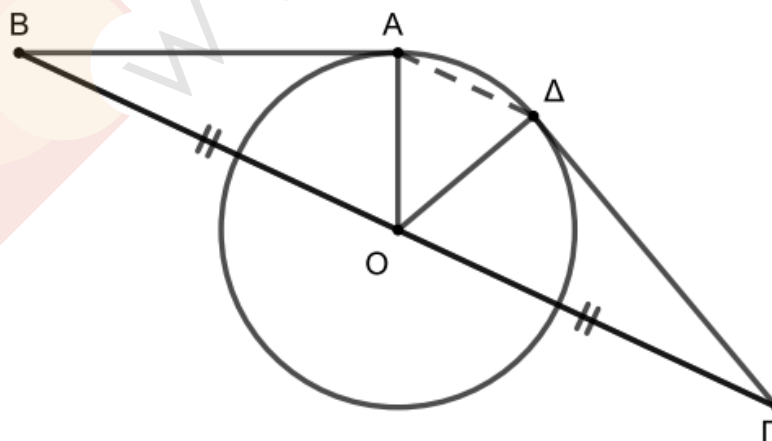
Από σημείο Β εξωτερικό ενός κύκλου (Ο, R) φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΒΑ. Ενώνουμε το σημείο Β με το κέντρο Ο του κύκλου και προεκτείνουμε κατά ίσο τμήμα ΟΓ = ΒΟ. Από το σημείο Γ φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΓΔ, όπως στο σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i.  $AB = \Delta\Gamma$  (Μονάδες 08)

ii.  $A\Delta // B\Gamma$  (Μονάδες 10)

β) Αν το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος ΒΑ είναι ίσο με την ακτίνα R, τι είδους τρίγωνο είναι το τρίγωνο ΑΟΔ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 07)



*Έξυπνα & εύκολα!*