Κεφ. 4.2. - Τράπεζα Θεμάτων 2022 - Γεωμετρία Α' Λυκείου

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ & ΛΥΣΕΙΣ

Η Τράπεζα Θεμάτων για τη Γεωμετρία Α' Λυκείου είναι μία μεγάλη «θάλασσα». Εμείς όμως έχουμε φροντίσει για εσένα, συγκεντρώνοντας εκείνα τα θέματα που αποτελούν τη «βάση» της γνώσης και για τα υπόλοιπα. Μελετώντας και κατανοώντας το μοτίβο σκέψης για τα συγκεκριμένα, μπορείς να λύσεις με επιτυχία και τα υπόλοιπα θέματα. Στην ιστοσελίδα μας www.arnos.gr για το Course της Γεωμετρίας, μελετάς και προετοιμάζεσαι με την αναλυτική διδασκαλία σε ασκήσεις και θέματα, στο ύφος της Τράπεζας.

Θέμα 2 - Κωδικοί:

1544, 1595, 1597, 1643, 12710, 13534, 13748

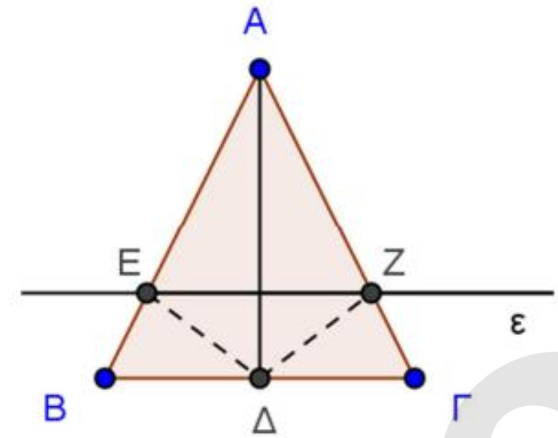
1. Θέμα 1544

Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) φέρουμε τη διχοτόμο ΑΔ και μια ευθεία (ε) παράλληλη προς την ΒΓ, που τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

β) Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΖΔ είναι ίσα. (Μονάδες 15)



ΛΥΣΗ

α) $A\hat{E}Z = \hat{B}$ **(1)** ως γωνίες εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των ΕΖ//ΒΓ που τις τέμνει η ΑΒ.

Επίσης $A\hat{Z}E = \hat{\Gamma}$ **(2)** ως γωνίες εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των ΕΖ//ΒΓ που τις τέμνει η ΑΓ.

$\hat{B} = \hat{\Gamma}$ ως γωνίες της βάσης ΒΓ στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ.

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $A\hat{E}Z = A\hat{Z}E$, οπότε το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές με βάση την ΕΖ.

β) Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΖΔ έχουν:

- ΑΔ κοινή πλευρά
- $E\hat{A}\Delta = Z\hat{A}\Delta$, διότι η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.
- ΑΕ = ΑΖ, διότι ΑΕΖ ισοσκελές τρίγωνο από το α) ερώτημα.

Από το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΖΔ είναι ίσα.

2. Θέμα 1595

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και το ύψος του ΑΜ. Φέρουμε ημιευθεία Γx, κάθετη στη ΒΓ, προς το ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το Α και παίρνουμε σε αυτήν τμήμα ΓΔ = ΑΒ.

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\Delta\hat{A}\Gamma$ είναι ίση με τη γωνία $\Gamma\hat{\Delta}A$.

(Μονάδες 12)

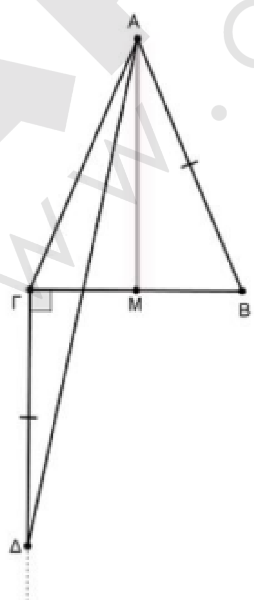
β) Να αποδείξετε ότι:

i) ΓΔ // ΑΜ

(Μονάδες 6)

ii) Η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $M\hat{A}\Gamma$.

(Μονάδες 7)



ΛΥΣΗ

α) Είναι ΓΔ = ΑΒ από υπόθεση και ΑΒ = ΑΓ επειδή ΑΒΓ ισοσκελές τρίγωνο, οπότε ΓΔ = ΑΓ.

Άρα το ΑΓΔ είναι ισοσκελές τρίγωνο με βάση την ΑΔ. Συνεπώς $\Delta\hat{A}\Gamma = \Gamma\hat{\Delta}A$.

β) i) Επειδή το ΑΜ είναι ύψος του τριγώνου ισχύει ότι $AM \perp B\Gamma$. Επίσης, από υπόθεση $\Gamma\Delta \perp B\Gamma$, άρα $\Gamma\Delta // AM$.

ii) Είναι $\Gamma\hat{\Delta}A = M\hat{A}\Delta$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΓΔ, ΑΜ που τέμνονται από την ΑΔ. Ισχύει ακόμη από το ερώτημα (α) ότι $\Delta\hat{A}\Gamma = \Gamma\hat{\Delta}A$ οπότε είναι $\Delta\hat{A}\Gamma = M\hat{A}\Delta$. Τελικά η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $M\hat{A}\Gamma$.

3. Θέμα 1597

Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ (προς το Α) και ΓΑ (προς το Α) τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε τα τμήματα ΑΔ=ΑΒ και ΑΕ=ΑΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

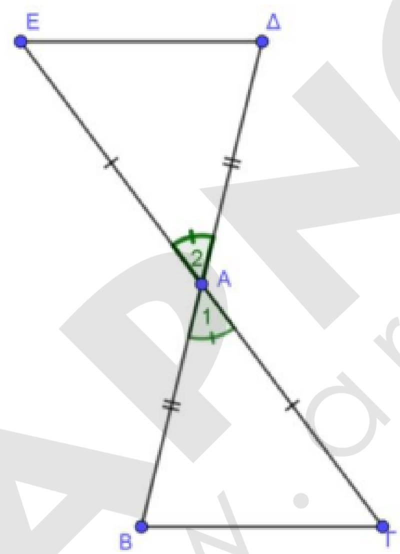
β) ΕΔ//ΒΓ (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ έχουν:

- ΑΔ = ΑΒ από υπόθεση,
- ΑΕ = ΑΓ από υπόθεση,
- $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$, ως κατακορυφήν

Από το κριτήριο Π – Γ – Π τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσα.



β) Από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ προκύπτει ότι και οι αντίστοιχες γωνίες $\hat{E}$ και $\hat{\Gamma}$ είναι ίσες, δηλαδή $\hat{E} = \hat{\Gamma}$.

Οι γωνίες αυτές είναι εντός εναλλάξ των ΔΕ, ΒΓ που τέμνονται από την ΕΓ. Και αφού οι γωνίες αυτές είναι ίσες, οι ΔΕ, ΒΓ είναι παράλληλες.

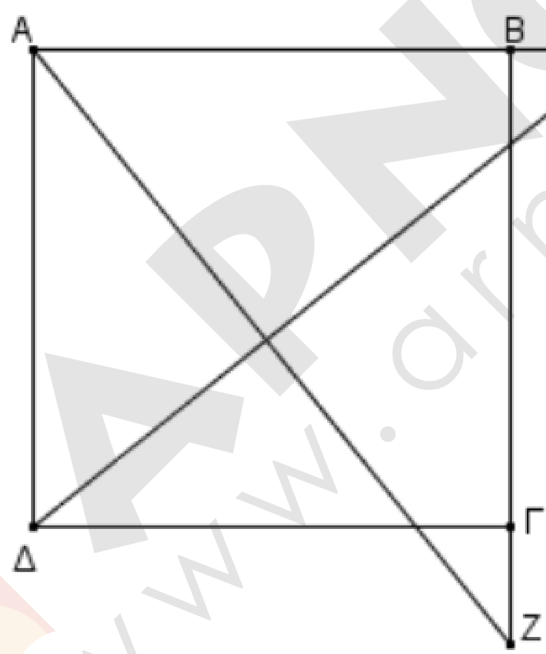
4. Θέμα 1643

Θεωρούμε τετράγωνο ΑΒΓΔ και σημεία Ε και Ζ στις προεκτάσεις των ΑΒ (προς το Β) και ΒΓ (προς το Γ) αντίστοιχα, ώστε ΒΕ=ΓΖ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΑΕΔ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) Οι γωνίες ΕΔΓ και ΑΖΒ είναι ίσες. (Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΖ και ΑΕΔ έχουν:

ΑΔ = ΑΒ, ως πλευρές του τετραγώνου

ΑΕ = ΒΖ , διότι ΑΒ = ΒΓ (πλευρές τετραγώνου) και ΒΕ = ΓΖ οπότε ΑΒ + ΒΕ = ΒΓ + ΓΖ ⇔

ΑΕ = ΒΖ.

Άρα τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΑΕΔ είναι ίσα αφού έχουν δυο ομόλογες πλευρές τους ίσες.

β) Από την προηγούμενη ισότητα προκύπτει ότι $A\hat{E}\Delta = A\hat{Z}B$ (1) επειδή είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΔ και ΑΒ. Ισχύει επίσης ότι:

$A\hat{E}\Delta = E\hat{\Delta}\Gamma$ (2), ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΔΕ.

Από (1), (2) προκύπτει ότι $A\hat{Z}B = E\hat{\Delta}\Gamma$.

5. Θέμα 12710

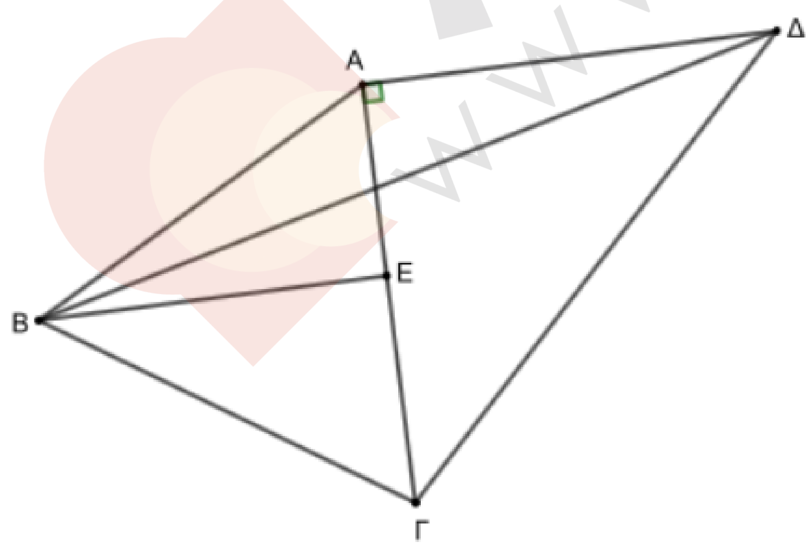
Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος του ΒΕ. Εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΓΔ με υποτείνουσα τη ΓΔ έτσι, ώστε τα σημεία Β και Δ να βρίσκονται εκατέρωθεν της ευθείας ΑΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΒΕ // ΑΔ. (Μονάδες 10)

β) οι γωνίες ΕΒΔ και ΑΔΒ είναι ίσες. (Μονάδες 7)

γ) το τρίγωνο ΒΑΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ

α) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, οπότε η διχοτόμος ΒΕ είναι και ύψος, δηλαδή η ΒΕ είναι κάθετη στην ΑΓ.

Το τρίγωνο ΓΑΔ είναι ορθογώνιο στην κορυφή Α , οπότε η ΑΔ είναι κάθετη στην ΑΓ.

Τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΕ και ΑΔ είναι κάθετα στην ΑΓ, οπότε είναι μεταξύ τους παράλληλα.

β) Οι γωνίες ΕΒΔ και ΑΔΒ είναι εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΒΕ και ΑΔ που τέμνονται από την ΒΔ, άρα είναι ίσες.

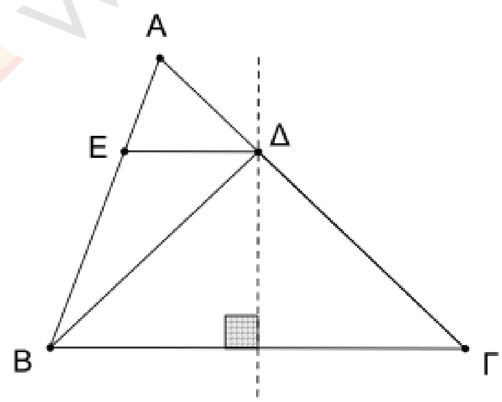
γ) Από το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε ΑΒ = ΑΓ = ΒΓ και από το ισοσκελές τρίγωνο ΓΑΔ έχουμε ΑΓ = ΑΔ, οπότε ΑΒ = ΑΔ, επομένως το τρίγωνο ΒΑΔ είναι ισοσκελές.

6. Θέμα 13534

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ. Η μεσοκάθετος της πλευράς ΒΓ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Δ και η παράλληλη από το Δ προς τη ΒΓ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)

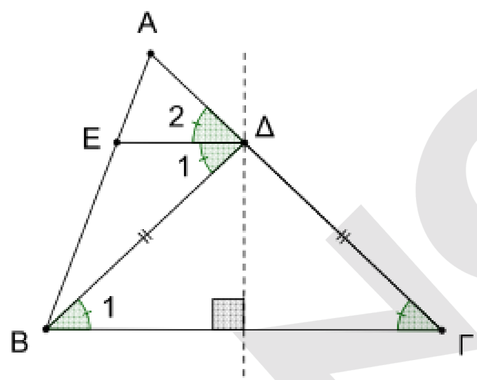
β) η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{Δ}B$. (Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ

α) Το σημείο Δ ανήκει στη μεσοκάθετο του τμήματος ΒΓ, άρα ισαπέχει από τα άκρα του, δηλαδή ΔΒ = ΔΓ. Συνεπώς το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ισοσκελές.

β)



Ισχύουν οι παρακάτω ισότητες γωνιών:

- $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}$ (1) ως προσκείμενες γωνίες στη βάση ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΒΓΔ.
- $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1$ (2) ως εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων ΒΓ, ΔΕ που τέμνονται από τη ΒΔ.
- $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}_2$ (3) ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες των παραλλήλων ΒΓ, ΔΕ που τέμνονται από την ΑΓ.

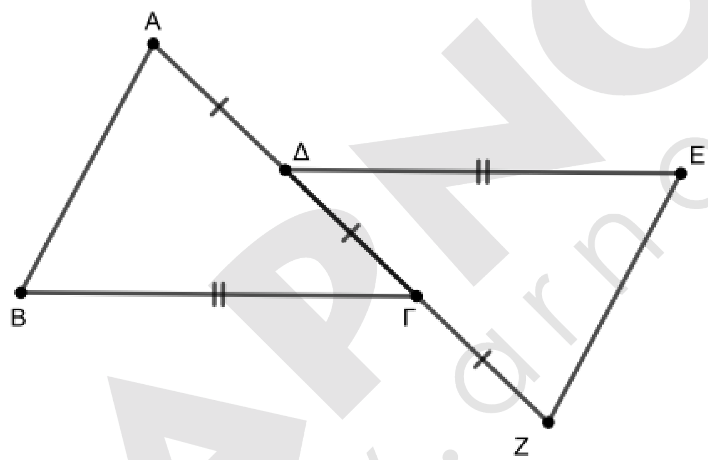
Από τις ισότητες (1), (2) και (3) προκύπτει ότι $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$, οπότε η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{\Delta}B$.

7. Θέμα 13748

Σε τρίγωνο ΑΒΓ θεωρούμε το μέσο Δ της πλευράς ΑΓ. Φέρουμε τμήμα ΔΕ ίσο και παράλληλο με την πλευρά ΒΓ όπως φαίνεται στο σχήμα. Προεκτείνουμε την ΑΓ προς το μέρος του Γ και παίρνουμε σημείο Ζ τέτοιο ώστε ΓΖ = ΔΓ. Να αποδείξετε ότι:

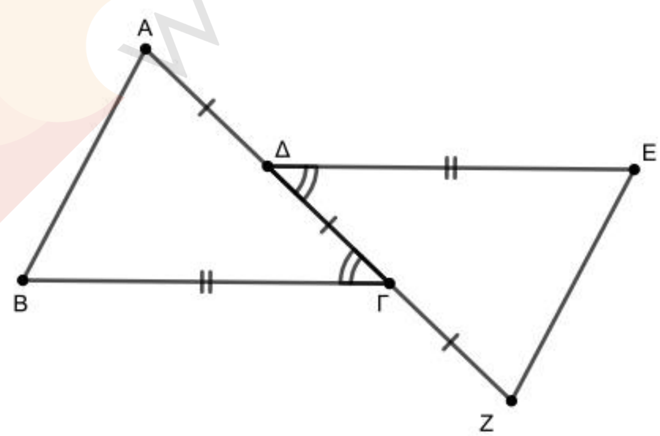
α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΕΔ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

β) ΑΒ // ΕΖ. (Μονάδες 15)



ΛΥΣΗ

α)



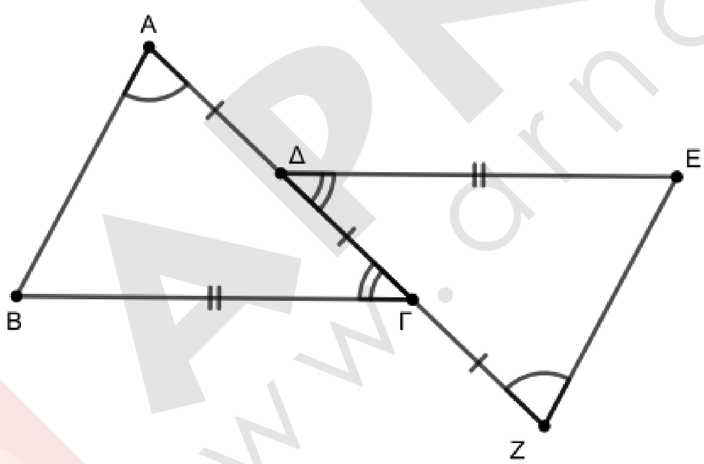
Για το τμήμα ΔΖ έχουμε: ΔΖ = ΔΓ + ΓΖ = 2ΔΓ. Όμως το Δ είναι το μέσο του ΑΓ, άρα 2ΔΓ =ΑΓ, οπότε θα είναι ΔΖ = ΑΓ (1).

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΕΔ έχουν:

- ΒΓ = ΔΕ, από την υπόθεση
- ΑΓ = ΔΖ, από τη σχέση (1)
- $A\hat{\Gamma}B = Z\hat{\Delta}E$, ως γωνίες εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΒΓ και ΔΕ που τέμνονται από την ΔΓ.

Άρα είναι ίσα γιατί έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες γωνίες στις πλευρές αυτές ίσες από το κριτήριο ΠΓΠ.

β)



Από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΓ και ΖΕΔ, προκύπτει ότι $B\hat{A}\Gamma = E\hat{Z}\Delta$ γιατί είναι γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΒΓ και ΕΔ αντίστοιχα. Όμως, είναι γωνίες εντός εναλλάξ των ΑΒ και ΕΖ που τέμνονται από την ΑΖ, άρα ΑΒ // ΕΖ.

Θέμα 4 - Κωδικοί:

1744, 1783, 1818, 13822, 13843

8. Θέμα 1744

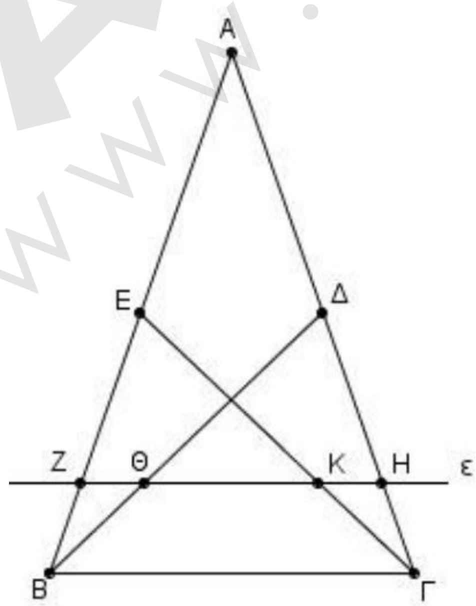
Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) φέρουμε τις διαμέσους ΒΔ και ΓΕ. Μία ευθεία ε παράλληλη στη βάση ΒΓ τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα Ζ και Η αντίστοιχα και τις διαμέσους ΒΔ και ΓΕ στα σημεία Θ και Κ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΒΖ=ΓΗ. (Μονάδες 8)

β) τα τρίγωνα ΖΒΘ και ΗΚΓ είναι ίσα. (Μονάδες 9)

γ) ΖΚ=ΗΘ . (Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ

α) Είναι $A\hat{Z}H = A\hat{B}\Gamma$ (1), ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ε, ΒΓ που τέμνονται από την ΑΒ. Όμοια $A\hat{H}Z = A\hat{\Gamma}B$ (2). Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές ισχύει ότι $A\hat{\Gamma}B = A\hat{B}\Gamma$ (3). Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι $A\hat{Z}H = A\hat{H}Z$ οπότε και το τρίγωνο ΑΖΗ είναι ισοσκελές. Επομένως ΑΖ = ΑΗ. Επειδή ΑΒ = ΑΓ και ΑΖ = ΑΗ, αφαιρούμε κατά μέλη και βρίσκουμε ΑΒ – ΑΖ = ΑΓ – ΑΗ ⇔ ΒΖ = ΓΗ.

β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ έχουν:

- ΑΒ = ΑΓ, διότι ΑΒΓ ισοσκελές τρίγωνο
- ΑΔ = ΑΕ, ως μισά των ίσων πλευρών ΑΒ και ΑΓ
- $\hat{A}$ κοινή γωνία

Από το κριτήριο ΠΓΠ, τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα οπότε και οι πλευρές που είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΔ = ΑΕ, θα είναι ίσες, άρα ισχύει $A\hat{B}\Delta = A\hat{\Gamma}E$ (4).

Τα τρίγωνα ΖΒΘ και ΗΚΓ έχουν:

- ΒΖ = ΓΗ, όπως αποδείξαμε στο ερώτημα (α)
- $A\hat{B}\Delta = A\hat{\Gamma}E$, λόγω της (4)
- $B\hat{Z}\Theta = K\hat{H}\Gamma$, ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $A\hat{H}Z$ και $A\hat{Z}H$.

Από το κριτήριο ΓΠΓ τα τρίγωνα ΖΒΘ και ΗΚΓ είναι ίσα.

γ) Από το (β), επειδή τα τρίγωνα ΖΒΘ και ΗΚΓ είναι ίσα, θα έχουν και όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, άρα και ΖΘ = ΗΚ.

Οπότε θα είναι και ΖΘ + ΘΚ = ΗΚ + ΘΚ, δηλαδή ΖΚ = ΗΘ.

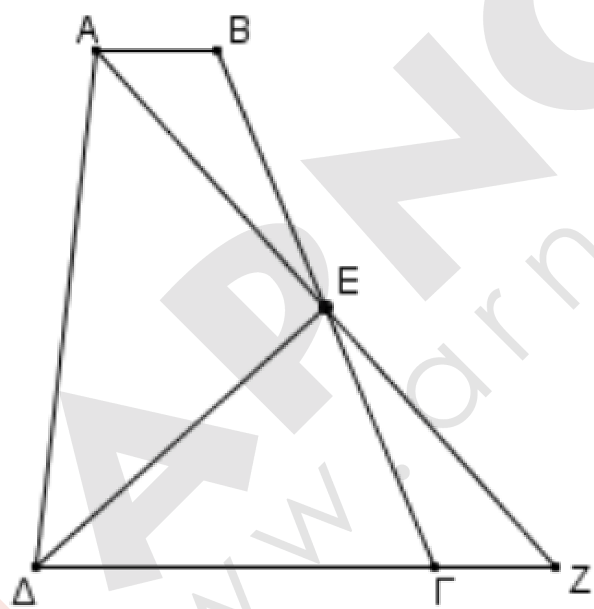
9. Θέμα 1783

Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) ισχύει ΑΒ+ΓΔ=ΑΔ. Αν η διχοτόμος της γωνίας Α τέμνει την ΒΓ στο Ε και την προέκταση της ΔΓ στο Ζ, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΔΑΖ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) Το Ε είναι το μέσο της ΒΓ (Μονάδες 10)

γ) Η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ του τραπεζίου. (Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$\Delta\hat{Z}A = Z\hat{A}B$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΑΖ,

$\Delta\hat{A}Z = Z\hat{A}B$, διότι η ΑΖ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.

Άρα $\Delta\hat{A}Z = \Delta\hat{Z}A$, οπότε το τρίγωνο ΔΑΖ είναι ισοσκελές.

β) Επειδή το τρίγωνο ΔΑΖ είναι ισοσκελές, ισχύει ότι

ΑΔ = ΔΖ ⇔ ΑΒ + ΓΔ = ΔΖ ⇔ ΑΒ = ΔΖ – ΓΔ ⇔ ΑΒ = ΓΖ.

Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΕΓΖ έχουν:

ΑΒ = ΓΖ,

$Δ\hat{Z}A = Z\hat{A}B$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΑΖ

$\hat{B} = E\hat{Γ}Z$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΒΓ.

Σύμφωνα με το κριτήριο Γ – Π – Γ, τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΕΓΖ είναι ίσα, οπότε είναι και ΒΕ = ΕΓ διότι είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες ΖΑΒ και ΔΖΑ, δηλαδή το Ε είναι το μέσο της ΒΓ.

γ) Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΕΓΖ είναι ίσα ισχύει ότι ΑΕ = ΕΖ διότι είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες Β και ΕΓΖ.

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΔΑΖ, το ΔΕ είναι διάμεσος, άρα είναι και διχοτόμος του τριγώνου. Δηλαδή η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{Δ}$.

10. Θέμα 1818

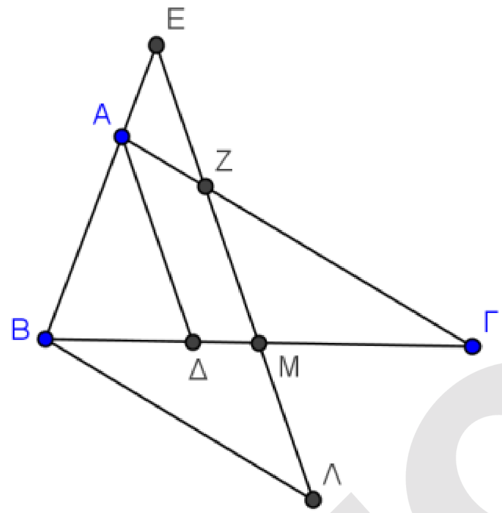
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ, η διχοτόμος του ΑΔ και ευθεία (ε) παράλληλη από το Β προς την ΑΓ. Από το μέσο Μ της ΒΓ φέρουμε ευθεία παράλληλη στην ΑΔ η οποία τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ζ, την ευθεία (ε) στο σημείο Λ και την προέκταση της ΒΑ στο σημείο Ε.

Να αποδείξετε ότι:

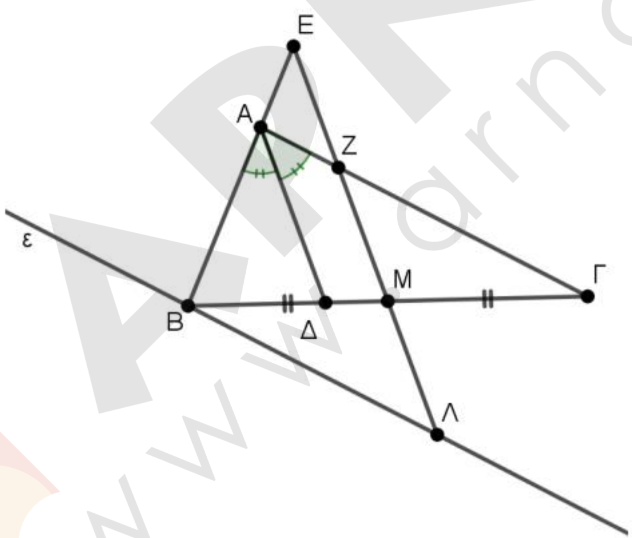
α) Τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΒΛΕ είναι ισοσκελή. (Μονάδες 8)

β) ΒΛ =ΓΖ . (Μονάδες 9)

γ) ΑΕ=ΑΓ-ΒΛ. (Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ



α) Είναι $\hat{\mathrm{E}} = \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta$ (1), ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΔ, ΕΜ που τέμνονται από την ΒΕ. Επίσης $\mathrm{E}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{A} = \Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma$ (2), ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΔ, ΕΜ που τέμνονται από την ΑΓ. Επειδή η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{A}} = \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$ ισχύει ότι $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta = \Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma$ (3). Η (3) λόγω των (1) και (2) γράφεται $\hat{\mathrm{E}} = \mathrm{E}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{A}$ (4), οπότε το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές.

Είναι $E\hat{Z}A = B\hat{\Lambda}E$ (5) ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΓ, ΒΛ που τέμνονται από την ΕΛ. Από τις (4), (5) προκύπτει $\hat{E} = B\hat{\Lambda}E$ οπότε και το τρίγωνο ΒΛΕ είναι ισοσκελές.

β) Τα τρίγωνα ΒΜΛ και ΖΜΓ έχουν:

- ΒΜ = ΜΓ, διότι Μ μέσο της ΒΓ,
- $Z\hat{M}\Gamma = B\hat{M}\Lambda$ ως κατακορυφήν,
- $\Lambda\hat{B}M = Z\hat{\Gamma}M$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΓ, ΒΛ που τέμνονται από την ΒΓ.

Από το κριτήριο Γ-Π-Γ, τα τρίγωνα ΒΜΛ και ΖΜΓ είναι ίσα, οπότε ΒΛ = ΓΖ, καθώς βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $Z\hat{M}\Gamma$ και $B\hat{M}\Lambda$ στα ίσα τρίγωνα.

γ) Είναι ΑΕ = ΑΖ, λόγω του ισοσκελούς ΑΕΖ.

Επίσης ΑΖ = ΑΓ – ΓΖ = ΑΓ – ΒΛ, καθώς ΓΖ = ΒΛ, από το β).

Άρα, ΑΕ = ΑΓ – ΒΛ.

11. Θέμα 13822

Δίνονται οι ευθείες (ε) και (ψ).

α) Αν η γωνία $B\hat{A}\Gamma$ είναι μεγαλύτερη από την $A\hat{B}\psi$:

i. Να αποδείξετε ότι $B\hat{A}\varepsilon + A\hat{B}\psi < 180^o$. (Μονάδες 6)

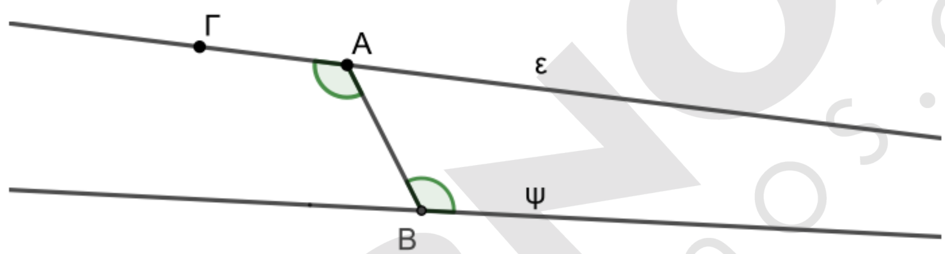
ii. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε και ψ τέμνονται. Σε ποιο από τα ημιεπίπεδα που χωρίζει το επίπεδο η ΑΒ βρίσκεται το σημείο τομής των ε και ψ και γιατί;

(Μονάδες 6)

β) Να διατυπώσετε την πρόταση που αποδείχθηκε στο α) για τις εντός και εναλλάξ γωνίες δύο ευθειών που τέμνονται από τρίτη και το σημείο τομής των ευθειών αυτών.

(Μονάδες 7)

γ) Αν ισχύει $B\hat{A}\Gamma < A\hat{B}\psi$, τότε σε ποιο από τα ημιεπίπεδα που χωρίζει το επίπεδο η ΑΒ βρίσκεται το σημείο τομής των ε και ψ και γιατί; (Μονάδες 6)



ΛΥΣΗ

α) i. Η γωνία $B\hat{A}\varepsilon$ είναι παραπληρωματική της $B\hat{A}\Gamma$ άρα $B\hat{A}\varepsilon + B\hat{A}\Gamma = 180^o$.

Όμως η $A\hat{B}\psi$ είναι μικρότερη από την $B\hat{A}\Gamma$, λόγω της υπόθεσης. Άρα το άθροισμα $B\hat{A}\varepsilon + A\hat{B}\psi$ είναι μικρότερο από το άθροισμα $B\hat{A}\varepsilon + B\hat{A}\Gamma$.

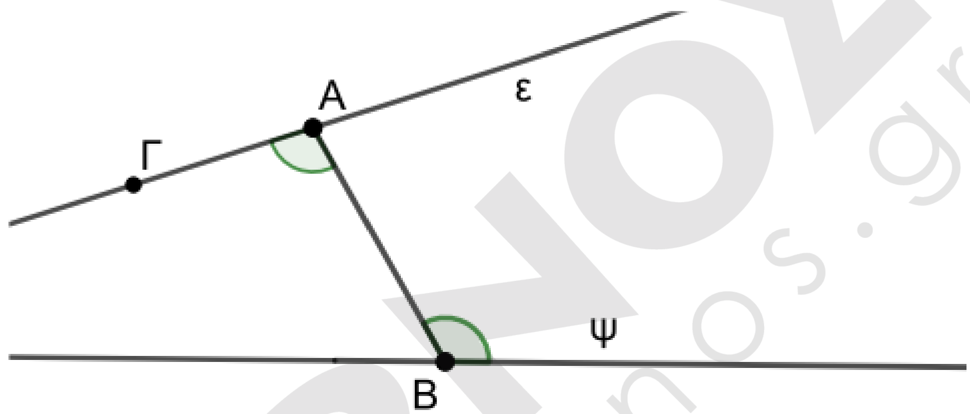
Επομένως $B\hat{A}\varepsilon + A\hat{B}\psi < 180^o$.

ii. Οι γωνίες $B\hat{A}\varepsilon$ και $A\hat{B}\psi$ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των ε και ψ που τέμνονται από την ΑΒ και επειδή $B\hat{A}\varepsilon + A\hat{B}\psi < 180^o$ οι ε και ψ τέμνονται στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την ΑΒ προς το μέρος που βρίσκεται η $A\hat{B}\psi$.

β) Στο α) αποδείξαμε ότι αν δύο ευθείες τεμνόμενες από άλλη ευθεία σχηματίζουν εντός και εναλλάξ γωνίες που δεν είναι ίσες, τότε οι δύο αυτές ευθείες τέμνονται στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την τέμνουσα προς το μέρος που βρίσκεται η μικρότερη από τις δύο εντός και εναλλάξ γωνίες.

γ) Οι γωνίες $B\hat{A}\Gamma$ και $A\hat{B}\psi$ είναι εντός και εναλλάξ των ευθειών ε και ψ με τέμνουσα την ΑΒ. Όμως δίνεται ότι $B\hat{A}\Gamma < A\hat{B}\psi$.

Εφαρμόζοντας την πρόταση που διατυπώσαμε στο β) για τις γωνίες $B\hat{A}\Gamma$ και $A\hat{B}\psi$, οι ευθείες ε και ψ τέμνονται στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την ΑΒ προς το μέρος της $B\hat{A}\Gamma$, όπως φαίνεται παρακάτω.



12. Θέμα 13843

Έστω ότι οι ευθείες x΄x και y΄y εφάπτονται στον κύκλο (O,R) στα άκρα μιας διαμέτρου του ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:

α) οι ευθείες x΄x και y΄y είναι παράλληλες. (Μονάδες 4)

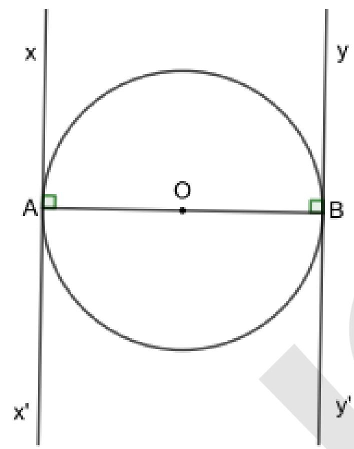
β) οι διχοτόμοι των γωνιών ΒΑx και ΑΒy τέμνονται σε σημείο Μ. (Μονάδες 6)

γ) το σημείο Μ είναι το μέσο του ημικυκλίου ΑΒ. (Μονάδες 10)

δ) αν η διχοτόμος της γωνίας ΒΑx τέμνει την y΄y στο σημείο Γ και η διχοτόμος της γωνίας ΑΒy τέμνει την x΄x στο σημείο Δ, τότε ΜΓ = ΜΔ. (Μονάδες 5)

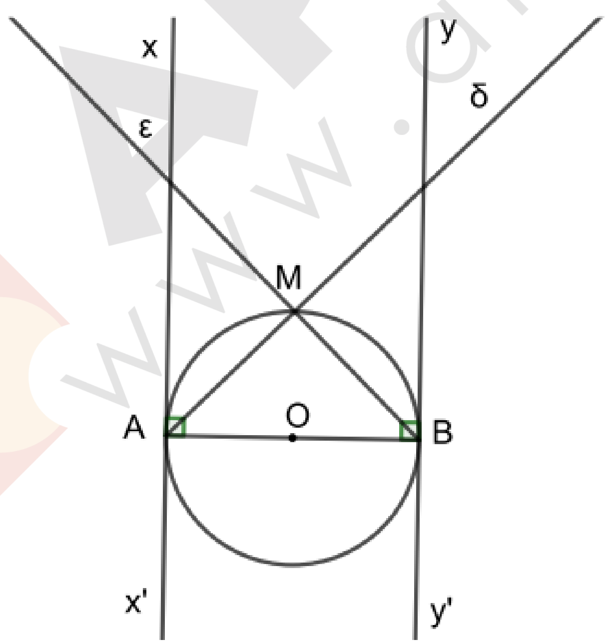
ΛΥΣΗ

α)



Οι ευθείες x΄x και y΄y εφάπτονται στον κύκλο (O,R) στα άκρα της διαμέτρου του ΑΒ, επομένως, είναι κάθετες στην ΑΒ και συνεπώς είναι μεταξύ τους παράλληλες.

β)

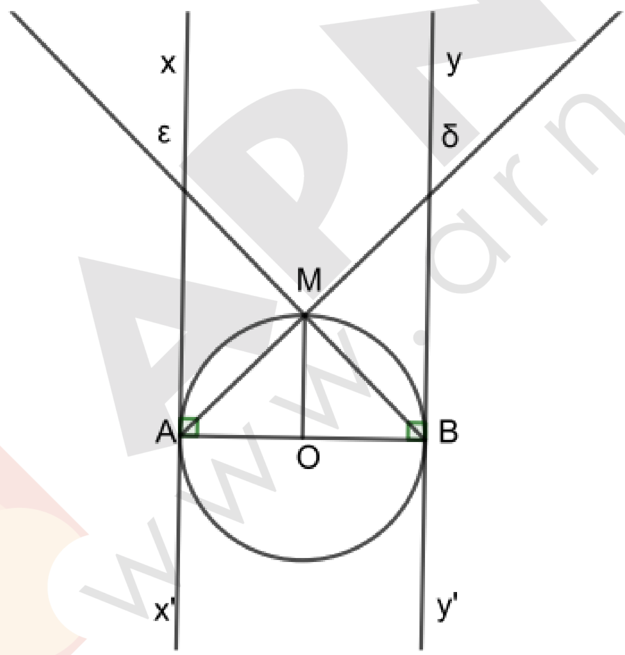


Έστω Αδ και Βε οι διχοτόμοι των γωνιών ΒΑx και ΑΒy αντίστοιχα, οι οποίες τέμνονται από τη διάμετρο ΑΒ. Αρκεί να αποδείξουμε ότι οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες που σχηματίζονται έχουν άθροισμα μικρότερο από 180°, οπότε η Αδ και η Βε θα τέμνονται προς το μέρος της τέμνουσας ΑΒ που βρίσκονται οι γωνίες.

Πράγματι, έχουμε ότι $B\hat{A}\delta + A\hat{B}\varepsilon = \frac{90^\circ}{2} + \frac{90^\circ}{2} = 90^\circ < 180^\circ$.

Άρα, οι Αδ και Βε τέμνονται σε σημείο Μ του ημιεπιπέδου στο οποίο βρίσκονται οι γωνίες.

γ)



Από το ερώτημα (β) έχουμε $B\hat{A}M = B\hat{A}\delta = 45^\circ$ και $A\hat{B}M = A\hat{B}\varepsilon = 45^\circ$.

Επομένως, το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισοσκελές με ΜΑ = ΜΒ.

Άρα, το σημείο Μ ανήκει στη μεσοκάθετο της διαμέτρου ΑΒ.

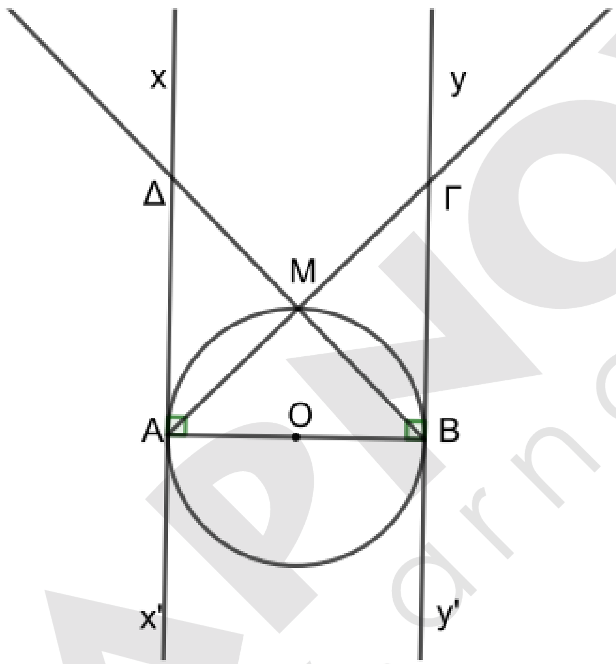
Το τρίγωνο ΑΟΜ είναι ορθογώνιο διότι ΜΟ μεσοκάθετος της ΑΒ, οπότε $A\hat{O}M = 90^\circ$.

Στο τρίγωνο ΑΟΜ έχουμε $O\hat{A}M = 45^\circ$ επομένως, $O\hat{M}A = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$.

Το τρίγωνο ΑΟΜ είναι ισοσκελές με ΟΜ = ΟΑ = R.

Δηλαδή, το σημείο Μ είναι σημείο του κύκλου (Ο,R) και επειδή ανήκει στη μεσοκάθετο της ΑΒ συμπεραίνουμε ότι το σημείο είναι το μέσο του ημικυκλίου ΑΒ.

δ)



Τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΒΜΓ έχουν :

- ΑΜ = ΒΜ, από το ερώτημα (γ)
- $A\hat{M}\Delta = B\hat{M}\Gamma$, ως κατακορυφήν
- $M\hat{A}\Delta = M\hat{B}\Gamma = 45°$

Από το κριτήριο ισότητας Γ-Π-Γ τα τρίγωνα είναι ίσα. Απέναντι από τις ίσες γωνίες ΜΑΔ και ΜΒΓ βρίσκονται αντίστοιχα ίσες πλευρές, δηλαδή ΜΔ = ΜΓ