Κεφ. 3.6. - Τράπεζα Θεμάτων 2022 - Γεωμετρία Α' Λυκείου

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ & ΛΥΣΕΙΣ

Η Τράπεζα Θεμάτων για τη Γεωμετρία Α' Λυκείου είναι μία μεγάλη «θάλασσα». Εμείς όμως έχουμε φροντίσει για εσένα, συγκεντρώνοντας εκείνα τα θέματα που αποτελούν τη «βάση» της γνώσης και για τα υπόλοιπα. Μελετώντας και κατανοώντας το μοτίβο σκέψης για τα συγκεκριμένα, μπορείς να λύσεις με επιτυχία και τα υπόλοιπα θέματα. Στην ιστοσελίδα μας www.arnos.gr για το Course της Γεωμετρίας, μελετάς και προετοιμάζεσαι με την αναλυτική διδασκαλία σε ασκήσεις και θέματα, στο ύφος της Τράπεζας.

Θέμα 2 - Κωδικοί:

1532, 1545, 1546, 1547, 1569, 1571, 1593, 1599, 1656, 1657, 1659

1676, 1677, 1688, 1698, 12149, 13517, 13533

1. Θέμα 1532

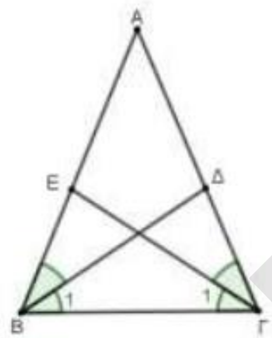
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και οι διχοτόμοι του ΒΔ και ΓΕ. Αν $ΕΗ \perp ΒΓ$ και $ΔΖ \perp ΒΓ$, να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΒΓΔ και ΓΒΕ είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) ΕΗ = ΔΖ. (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και ΒΔ, ΓΕ διχοτόμοι των γωνιών του Β, Γ αντίστοιχα.

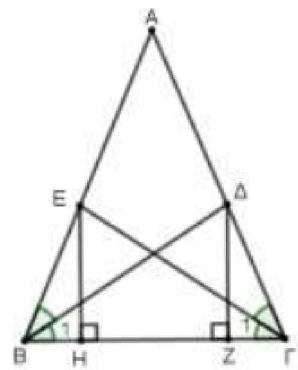


Τα τρίγωνα ΒΓΔ και ΓΒΕ έχουν:

- ΒΓ κοινή πλευρά
- $\widehat{B}$ =$\widehat{\Gamma}$ γωνίες βάσης ισοσκελούς τριγώνου
- $\widehat{B}_1 = \frac{\widehat{B}}{2} = \frac{\widehat{\Gamma}}{2} = \widehat{\Gamma}_1$ ως μισά των ίσων γωνιών Β και Γ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

Με βάση το κριτήριο ΓΠΓ τα τρίγωνα ΒΓΔ και ΓΒΕ είναι ίσα.

β) Έστω ΕΗ και ΔΖ οι κάθετες στην πλευρά ΒΓ.



Από το α) ερώτημα τα τρίγωνα ΒΓΔ και ΓΒΕ είναι ίσα, άρα θα είναι ίσες και οι πλευρές τους ΒΕ και ΓΔ που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{\Gamma}_1$ και $\widehat{B}_1$ αντίστοιχα. (1)

Τα τρίγωνα ΕΒΗ και ΔΖΓ έχουν:

- $\widehat{H} = \widehat{Z} = 90°$ (ΕΗ⊥ΒΓ και ΔΖ⊥ΒΓ)
- $\widehat{B}$ =$\widehat{\Gamma}$ (γωνίες βάσης ισοσκελούς τριγώνου)
- ΒΕ = ΓΔ από (1)

Άρα είναι ίσα γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία οξεία γωνία ίση. Οπότε είναι και ΕΗ = ΔΖ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ αντίστοιχα.

2. Θέμα 1545

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ.

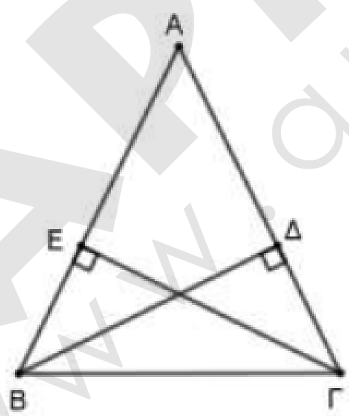
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΓΕΒ είναι ίσα. (Μονάδες 15)

β) ΑΔ=ΑΕ (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και ΒΔ, ΓΕ ύψη στις πλευρές ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα.



α) Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΓΕΒ έχουν:

- $\widehat{\Delta} = \widehat{\mathrm{E}} = 90°$ (ΒΔ$\perp$ΑΓ και ΓΕ$\perp$ΑΒ ως ύψη του τριγώνου)
- ΒΓ κοινή πλευρά
- $\widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\Gamma}$ γωνίες στη βάση ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου

Άρα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία οξεία γωνία ίση.

β) Από την ισότητα των τριγώνων ΒΔΓ και ΓΕΒ θα ισχύει ότι οι πλευρές ΒΕ και ΓΔ είναι ίσες γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $B\hat{\Gamma}E$ και $\Delta\widehat{B\Gamma}$ αντίστοιχα. Όμως είναι ΑΒ=ΑΓ, οπότε ΑΒ-ΒΕ =ΑΓ-ΓΔ, οπότε ΑΕ=ΑΔ ως διαφορές ίσων τμημάτων.

3. Θέμα 1546

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και το μέσο Μ της βάσης του ΒΓ. Φέρουμε τις αποστάσεις ΜΚ και ΜΛ του σημείου Μ από τις ίσες πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ.

Να αποδείξετε ότι:

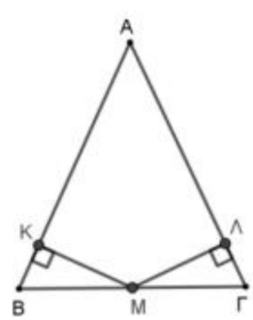
α) ΜΚ=ΜΛ. (Μονάδες 13)

β) Η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας ΚΜΛ. (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και Μ το μέσο της βάσης ΒΓ. Φέρουμε τις αποστάσεις ΜΚ και ΜΛ του Μ από τις ίσες πλευρές του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

α)

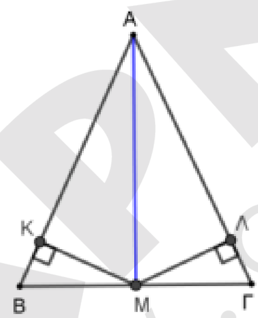


Τα τρίγωνα ΜΚΒ και ΜΛΓ έχουν:

- $\widehat{K} = \widehat{\Lambda} = 90°$ (ΜΚ⊥ΑΒ και ΜΛ⊥ΑΓ)
- ΜΒ = ΜΓ, αφού Μ μέσο του ΒΓ
- $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$, γωνίες στη βάση ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία οξεία γωνία ίση. Οπότε οι πλευρές ΜΚ και ΜΛ είναι ίσες αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ αντίστοιχα.

β)



Τα τρίγωνα ΑΚΜ και ΑΛΜ έχουν:

- $\widehat{K} = \widehat{\Lambda} = 90°$ (όπως προηγουμένως)
- ΑΜ κοινή πλευρά
- ΜΚ = ΜΛ από το α) ερώτημα

Άρα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία κάθετη πλευρά ίση. Οπότε, θα ισχύει ότι ΑΚ = ΑΛ και $A\widehat{M}K = A\widehat{M}\Lambda$ ως απέναντι γωνίες των ΑΚ, ΑΛ αντίστοιχα. Άρα, η διάμεσος ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ θα είναι διχοτόμος της $K\widehat{M}\Lambda$.

Σολωμού 29 Αθήνα τηλ: 210 38 22 157 info@arnos.gr www.arnos.gr

4. Θέμα 1547

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Από το μέσο Μ της ΒΓ φέρουμε τα κάθετα τμήματα ΜΔ και ΜΕ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι

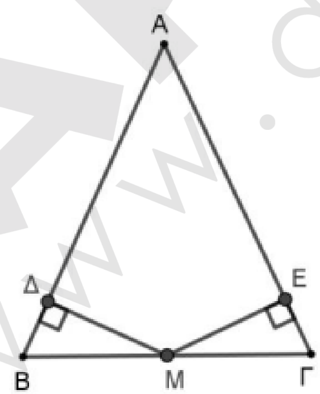
α) ΜΔ=ΜΕ (Μονάδες 12)

β) το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ, Μ το μέσο της βάσης του ΒΓ και ΜΔ, ΜΕ κάθετα τμήματα στις ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα.

α)

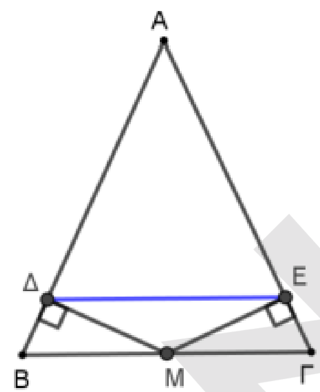


Τα τρίγωνα ΜΔΒ και ΜΕΓ έχουν:

- $\widehat{\Delta} = \widehat{E} = 90°$ (ΜΔ ⊥ ΑΒ και ΜΕ ⊥ ΑΓ)
- ΜΒ = ΜΓ, αφού Μ μέσο του ΒΓ
- $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$, αφού ΑΒΓ ισοσκελές τρίγωνο

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μια οξεία γωνία ίση. Οπότε έχουν και ΜΔ = ΜΕ, αφού οι πλευρές αυτές βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{B}$, $\widehat{\Gamma}$ αντίστοιχα.

β)



Επειδή τα τρίγωνα ΜΔΒ και ΜΕΓ είναι ίσα από το α) ερώτημα και τα υπόλοιπα στοιχεία τους θα είναι ίσα, επομένως ισχύει ΔΒ = ΕΓ.

Όμως ΑΒ = ΑΓ, οπότε ΑΔ=ΑΒ-ΔΒ και ΑΕ=ΑΓ-ΕΓ. Άρα τα τμήματα ΑΔ και ΑΕ είναι ίσα ως διαφορές ίσων τμημάτων. Κατά συνέπεια, το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

5. Θέμα 1569

Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ (προς το Μ) κατά ίσο τμήμα ΜΔ.

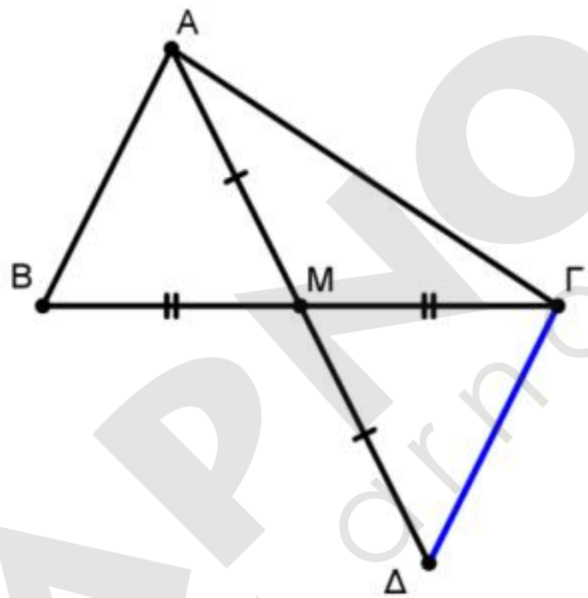
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΜΓΔ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) Τα σημεία Α και Δ ισαπέχουν από την πλευρά ΒΓ. (Μονάδες 13)

α) Τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΜΓΔ έχουν:

- ΑΜ = ΜΔ, από υπόθεση
- ΒΜ = ΜΓ, αφού το Μ είναι μέσο της ΒΓ
- $A\hat{M}B = \Delta\hat{M}\Gamma$, ως κατακορυφήν

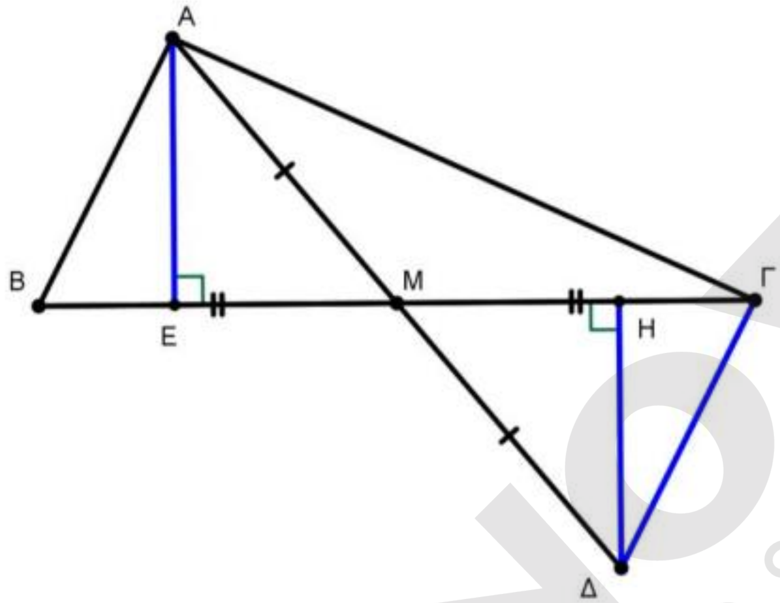


Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΜΓΔ είναι ίσα.

β) Ονομάζουμε ΑΕ και ΔΗ τις αποστάσεις των σημείων Α, Δ από τη ΒΓ.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΕΜ και ΜΔΗ, τα οποία είναι ορθογώνια και έχουν:

- ΑΜ = ΜΔ, από υπόθεση
- $A\hat{M}B = \Delta\hat{M}\Gamma$ ως κατακορυφήν



Άρα τα τρίγωνα ΑΕΜ και ΜΔΗ είναι ίσα, οπότε ισχύει και ΑΕ = ΔΗ, εφόσον οι πλευρές αυτές βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $A\hat{M}B = \Delta\hat{M}\Gamma$.

6. Θέμα 1571

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90^0$) και ΒΔ η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B}$. Από το Δ φέρουμε $ΔΕ \perp ΒΓ$, και έστω Ζ το σημείο στο οποίο η ευθεία ΕΔ τέμνει την προέκταση της ΒΑ (προς το Α).

Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΒ=ΒΕ (Μονάδες 13)

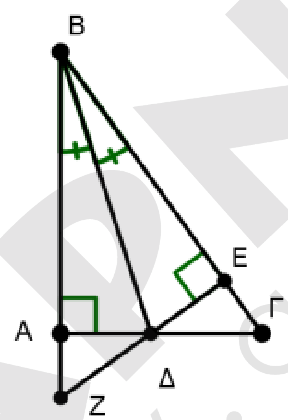
β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΕΒ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΕΔ είναι ορθογώνια και έχουν:

- ΒΔ κοινή πλευρά
- $A\hat{B}\Delta = E\hat{B}\Delta$, αφού ΒΔ διχοτόμος της $\hat{B}$

Επειδή τα ορθογώνια τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσές τους ίσες και μια οξεία γωνία του ενός είναι ίση με μια οξεία γωνία του άλλου, είναι ίσα. Άρα και οι αντίστοιχες πλευρές ΑΒ και ΒΕ θα είναι ίσες, δηλαδή ΑΒ = ΒΕ.



β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΕΒ είναι ορθογώνια και έχουν:

- κοινή τη γωνία $\hat{B}$
- ΑΒ = ΒΕ, όπως αποδείξαμε στο προηγούμενο ερώτημα

Επειδή τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΕΒ έχουν μία οξεία γωνία και μία κάθετη πλευρά ίσες μία προς μία, θα είναι ίσα.

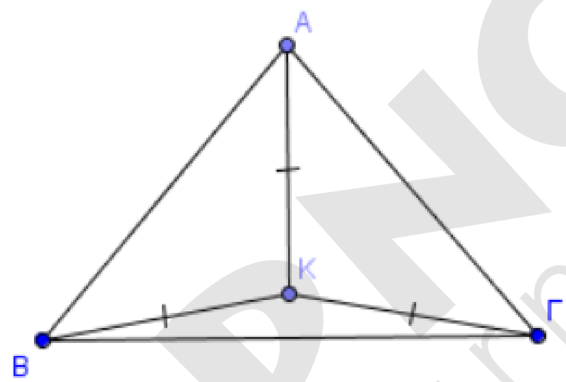
7. Θέμα 1593

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και $\hat{A} = 80^0$. Έστω Κ σημείο της διχοτόμου της γωνίας $\hat{A}$, τέτοιο ώστε ΚΒ=ΚΑ=ΚΓ.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΚΑ και ΓΚΑ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\widehat{AB K}$ και $\widehat{A\Gamma K}$. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{BK\Gamma}$. (Μονάδες 7)

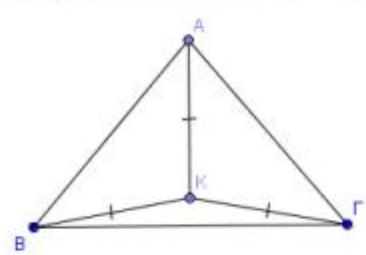


ΛΥΣΗ

α) Τα τρίγωνα ΒΚΑ και ΓΚΑ έχουν:

- ΚΑ κοινή πλευρά
- ΒΚ = ΚΓ, από υπόθεση
- ΑΒ = ΑΓ, διότι ΑΒΓ ισοσκελές τρίγωνο.

Από το κριτήριο Π – Π – Π τα τρίγωνα ΒΚΑ και ΓΚΑ είναι ίσα.



β) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΓ, ισχύει ότι $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ (1)

Επειδή η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$, ισχύει ότι:

$B\widehat{A}K = K\widehat{A}\Gamma = \frac{80^o}{2} = 40^o$

Επειδή ΚΒ = ΚΑ, το τρίγωνο ΚΑΒ είναι ισοσκελές. Όμοια, επειδή ΚΑ = ΚΓ και το τρίγωνο ΑΓΚ είναι ισοσκελές. Άρα

$A\widehat{B}K = B\widehat{A}K = 40^o$ και $K\widehat{\Gamma}A = K\widehat{A}\Gamma = 40^o$

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΚ έχουμε:

$A\widehat{K}B + A\widehat{B}K + B\widehat{A}K = 180^o \Leftrightarrow A\widehat{K}B + 2 \cdot 40^o = 180^o \Leftrightarrow A\widehat{K}B = 100^o$

Όμοια από το τρίγωνο ΑΓΚ βρίσκουμε ότι $A\widehat{K}\Gamma = 100^o$.

γ) Είναι

$B\widehat{K}\Gamma + A\widehat{K}B + A\widehat{K}\Gamma = 360^o \Leftrightarrow B\widehat{K}\Gamma + 100^o + 100^o = 360^o \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow B\widehat{K}\Gamma + 200^o = 360^o \Leftrightarrow B\widehat{K}\Gamma = 160^o$

8. Θέμα 1599

Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ, αν Μ και Ν είναι τα μέσα των ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) ΜΔ=ΜΓ. (Μονάδες 12)

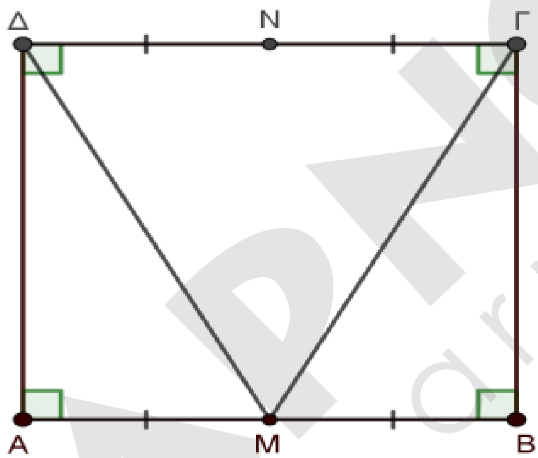
β) Η ευθεία ΜΝ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΓΔ. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

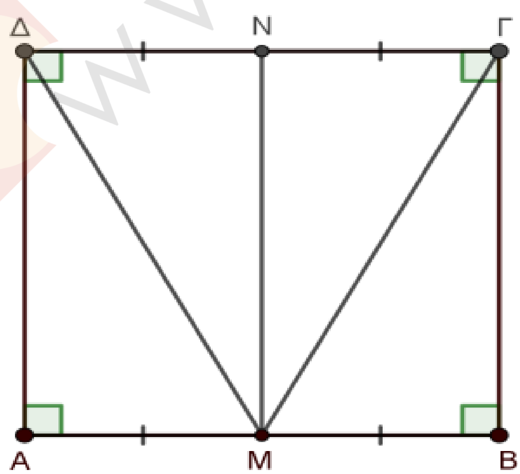
α) Τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΜΒΓ είναι ορθογώνια και έχουν:

- ΑΔ = ΒΓ, ως απέναντι πλευρές ορθογωνίου
- ΑΜ = ΜΒ, διότι το Μ είναι μέσο του ΑΒ.

Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΜΔ και ΜΒΓ έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία, οπότε είναι ίσα. Από την ισότητα αυτή προκύπτει ότι και οι υποτείνουσές τους είναι ίσες, δηλαδή ΜΔ = ΜΓ.



β) Στο ισοσκελές τρίγωνο ΜΓΔ το ευθύγραμμο τμήμα ΜΝ είναι διάμεσος, οπότε είναι και ύψος. Άρα το ΜΝ είναι μεσοκάθετος του ΓΔ.



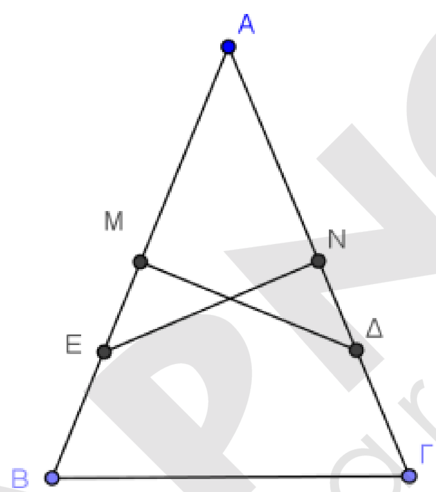
9. Θέμα 1656

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ΜΔ, ΝΕ οι μεσοκάθετοι των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Αν ΜΔ = ΝΕ τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)

β) Αν ΑΒ = ΑΓ τότε ΜΔ = ΝΕ (Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΜΔ και ΑΕΝ έχουν:

- ΜΔ = ΝΕ
- $\widehat{A}$ κοινή γωνία

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα και ισχύει ΑΜ = ΑΝ γιατί έχουν τις προσκείμενες γωνίες τους ίσες μία προς μία, άρα $\frac{AB}{2} = \frac{A\Gamma}{2}$ οπότε ΑΒ = ΑΓ

Άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΜΔ και ΑΕΝ έχουν:

- ΑΜ = ΑΝ, ως μισά των ίσων πλευρών ΑΒ και ΑΓ
- $\widehat{A}$ κοινή γωνία

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε έχουν ΜΔ= ΝΕ επειδή έχουν την απέναντι γωνία τους $\widehat{A}$ κοινή.

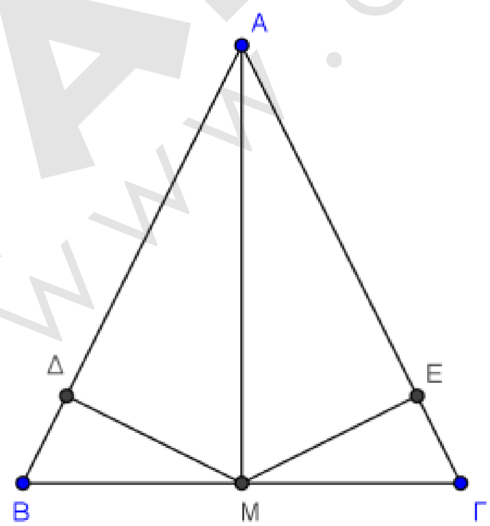
10. Θέμα 1657

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και από σημείο Μ της πλευράς ΒΓ φέρουμε τα κάθετα τμήματα ΜΔ και ΜΕ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Αν ΜΔ = ΜΕ, τότε τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΑΜΕ είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) Αν ΑΒ = ΑΓ και Μ μέσο του ΒΓ, τότε ΜΔ = ΜΕ. (Μονάδες 12)



ΛΥΣΗ

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΜΔ και ΑΜΕ έχουν:

- ΜΑ κοινή πλευρά
- ΜΔ = ΜΕ

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) Επειδή ΑΒ = ΑΓ, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΜΔΒ και ΜΕΓ έχουν:

- $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, ως γωνίες βάσης ισοσκελούς τριγώνου
- ΜΒ = ΜΓ, αφού Μ μέσο του ΒΓ

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε έχουν ΜΔ= ΜΕ, αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$.

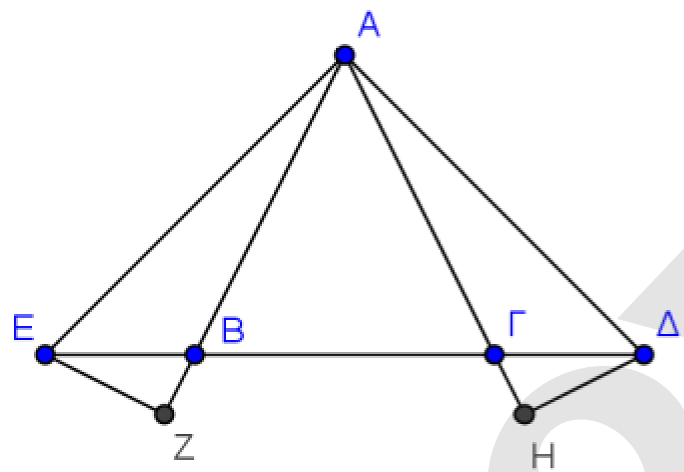
11. Θέμα 1659

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Στην προέκταση της ΒΓ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο Δ και στην προέκταση της ΓΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Ε έτσι ώστε ΓΔ = ΒΕ. Από το Δ φέρουμε ΔΗ κάθετη στην ευθεία ΑΓ και από το Ε φέρουμε ΕΖ κάθετη στην ευθεία ΑΒ.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΔ = ΑΕ (Μονάδες 12)

β) ΕΖ = ΔΗ (Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ

α) Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΔ έχουν:

- ΑΒ = ΑΓ από την υπόθεση,
- ΓΔ = ΒΕ από την υπόθεση,
- $A\hat{B}E = A\hat{\Gamma}\Delta$ ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

Από το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΔ είναι ίσα, οπότε έχουν και ΑΔ=ΑΕ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $A\hat{B}E$ και $A\hat{\Gamma}\Delta$.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΕΒΖ και ΓΗΔ έχουν:

- ΓΔ = ΒΕ από την υπόθεση,
- $E\hat{B}Z = \Delta\hat{\Gamma}H$ ως κατακορυφήν με τις ίσες γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

Άρα τα τρίγωνα ΕΒΖ και ΓΗΔ είναι ίσα οπότε ΕΖ =ΔΗ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $E\hat{B}Z = \Delta\hat{\Gamma}H$.

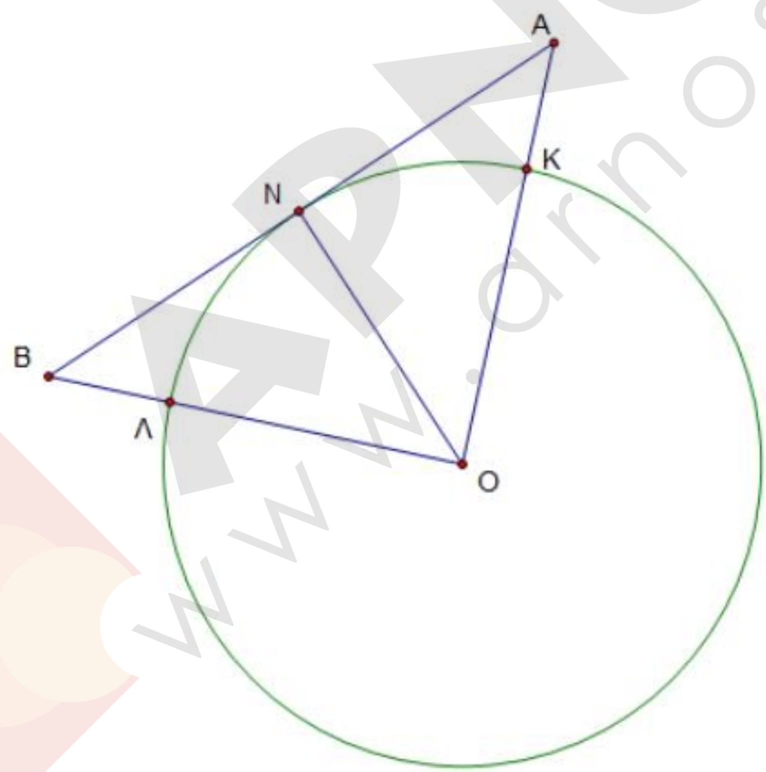
12. Θέμα 1676

Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Σε σημείο Ν του κύκλου φέρουμε την εφαπτόμενή του, και εκατέρωθεν του Ν θεωρούμε σημεία Α και Β, τέτοια ώστε ΝΑ=ΝΒ. Οι ΟΑ και ΟΒ τέμνουν τον κύκλο στα Κ και Λ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $\overset{\Delta}{AOB}$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 13)

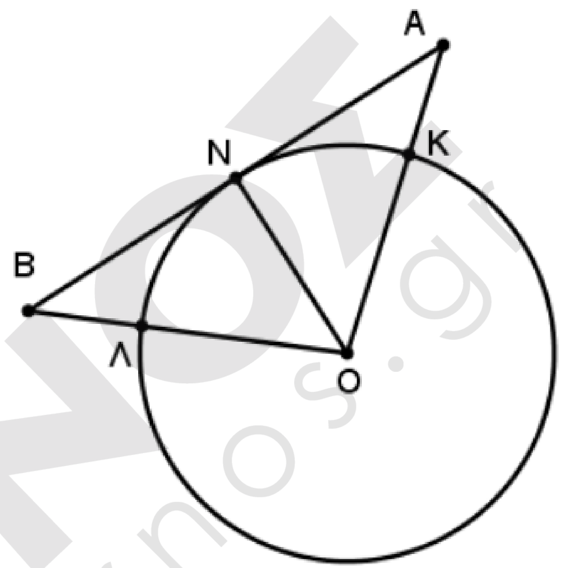
β) Το σημείο Ν είναι μέσο του τόξου ΚΛ. (Μονάδες 12)



ΛΥΣΗ

α) Στο τρίγωνο ΟΑΒ η ΟΝ είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

β) Στο ισοσκελές τρίγωνο ΟΑΒ η διάμεσος ΟΝ είναι και διχοτόμος της γωνίας $\hat{O}$. Άρα $K\hat{O}N=N\hat{O}\Lambda$. Επειδή οι επίκεντρες γωνίες είναι ίσες, θα είναι και τα αντίστοιχα τόξα τους ίσα.
Δηλαδή $\overset{\frown}{KN} = \overset{\frown}{N\Lambda}$. Άρα το Ν είναι μέσο του τόξου $\overset{\frown}{K\Lambda}$.

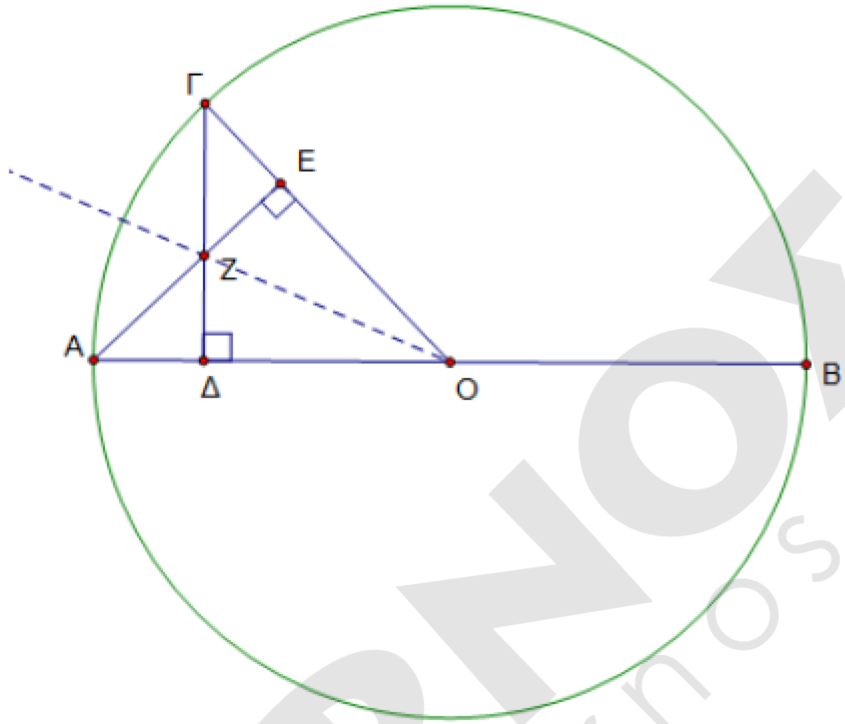


13. Θέμα 1677

Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Θεωρούμε διάμετρο ΑΒ και τυχαίο σημείο Γ του κύκλου. Αν ΑΕ κάθετο στην ΟΓ και ΓΔ κάθετο στην ΑΟ να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $\overset{\Delta}{\Delta O E}$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 13)

β) Η ΟΖ διχοτομεί τη γωνία $A\hat{O}\Gamma$ και προεκτεινόμενη διέρχεται από το μέσο του τόξου ΑΓ. (Μονάδες 12)



ΛΥΣΗ

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΕΟ και ΓΔΟ έχουν:

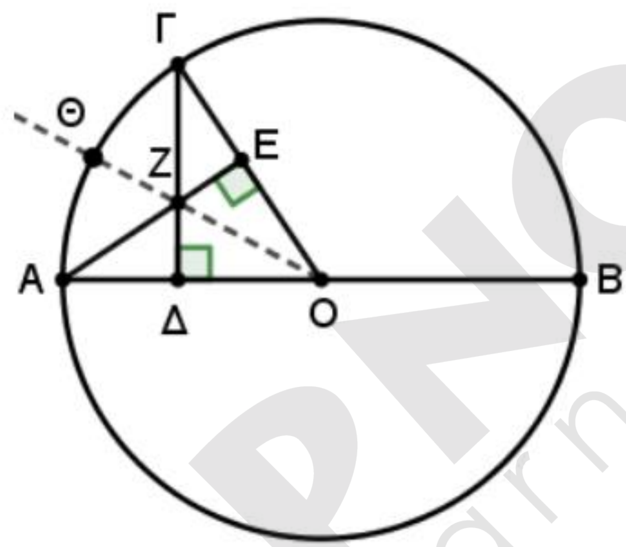
- ΟΑ = ΟΓ ως ακτίνες κύκλου
- $\hat{O}$ κοινή γωνία,

Άρα τα τρίγωνα ΑΕΟ και ΓΔΟ είναι ίσα, οπότε έχουν και ΟΔ = ΟΕ γιατί έχουν τις προσκείμενες γωνίες τους ίσες μία προς μία, οπότε το τρίγωνο ΟΔΕ είναι ισοσκελές.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΖΔΟ και ΖΕΟ έχουν:

- ΟΔ=ΟΕ, από το ερώτημα (α)
- ΟΖ κοινή πλευρά,

Άρα τα τρίγωνα ΖΔΟ και ΖΕΟ είναι ίσα, οπότε έχουν και $\Delta\hat{O}Z = Z\hat{O}E$ αφού έχουν τις προσκείμενες πλευρές τους ίσες μία προς μία, δηλαδή η ΟΖ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{O}\Gamma$. Οι γωνίες $A\hat{O}\Theta$ και $\Theta\hat{O}\Gamma$ είναι επίκεντρες και ίσες, οπότε και τα αντίστοιχα τόξα $\overset{\frown}{A\Theta}$ και $\overset{\frown}{\Theta\Gamma}$ είναι ίσα, άρα το Θ είναι μέσο του τόξου $\overset{\frown}{A\Gamma}$.



14. Θέμα 1688

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε το χάρτη μίας περιοχής όπου είναι κρυμμένος ένας θησαυρός. Οι ημιευθείες Αx και Αy παριστάνουν δύο ποτάμια και στα σημεία Β και Γ βρίσκονται δύο πλατάνια.

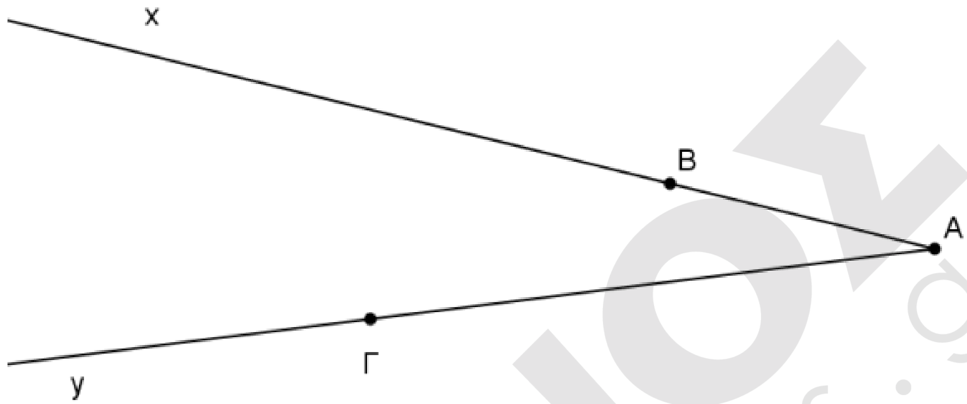
Να προσδιορίσετε γεωμετρικά τις δυνατές θέσεις του θησαυρού, αν είναι γνωστό ότι:

α) ισαπέχει από τα δύο πλατάνια. (Μονάδες 9)

β) ισαπέχει από τα δύο ποτάμια. (Μονάδες 9)

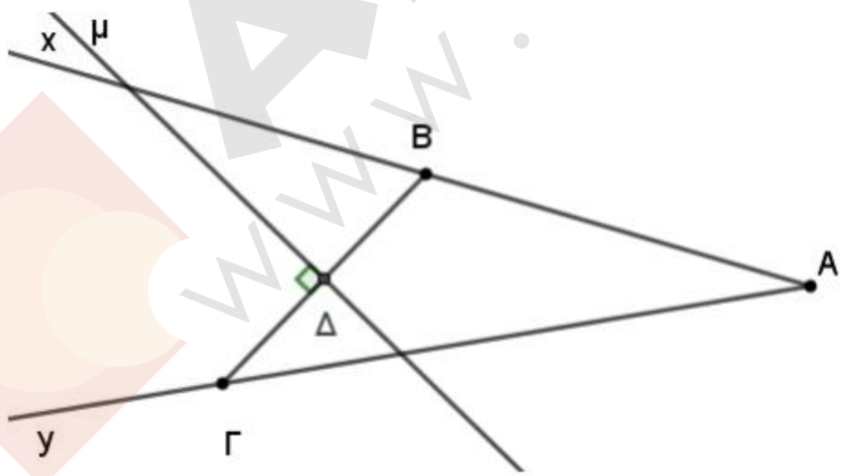
γ) ισαπέχει και από τα δύο πλατάνια και από τα δύο ποτάμια. (Μονάδες 7)

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση.

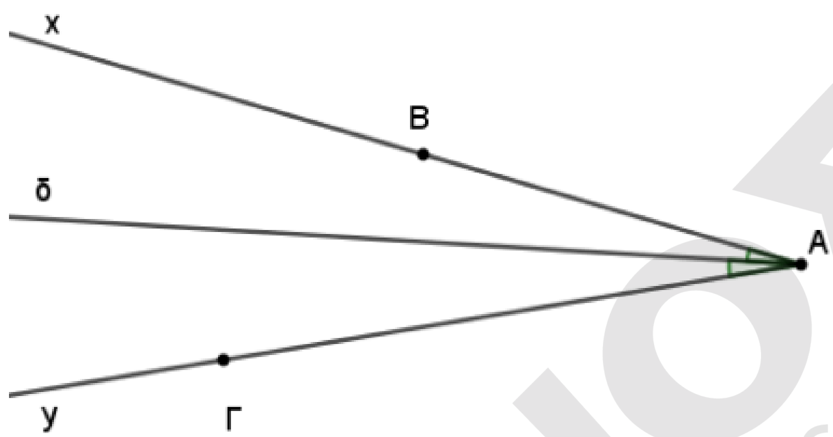


ΛΥΣΗ

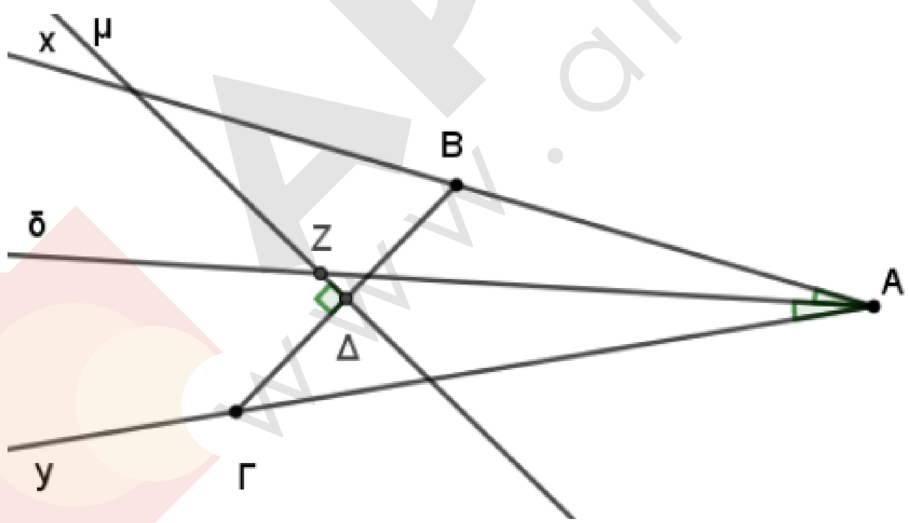
α) Τα σημεία που ισαπέχουν από δύο σημεία Β και Γ, βρίσκονται στη μεσοκάθετο του τμήματος ΒΓ. Άρα ο θησαυρός βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετο μ του ΒΓ.



β) Ο θησαυρός ισαπέχει από τις πλευρές Αx και Αy της γωνίας $x\widehat{A}y$, άρα θα βρίσκεται στη διχοτόμο Αδ.



γ) Ο θησαυρός ισαπέχει από τα δύο πλατάνια και από τα δύο ποτάμια. Άρα ανήκει και στη μεσοκάθετο του ΒΓ και στη διχοτόμο Αδ της γωνίας $x\widehat{A}y$, έτσι ο θησαυρός βρίσκεται στο σημείο τομής Ζ των Αδ και μ.

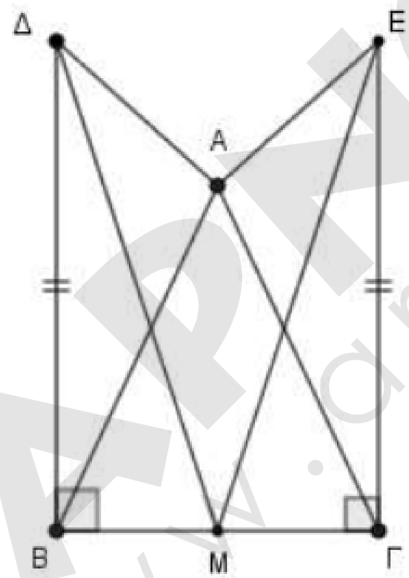


15. Θέμα 1698

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Στα σημεία Β και Γ της ΒΓ φέρουμε προς το ίδιο μέρος της ΒΓ όπως στο σχήμα, τα τμήματα ΒΔ ⊥ ΒΓ και ΓΕ ⊥ ΒΓ τέτοια ώστε ΒΔ=ΓΕ. Αν Μ το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι:

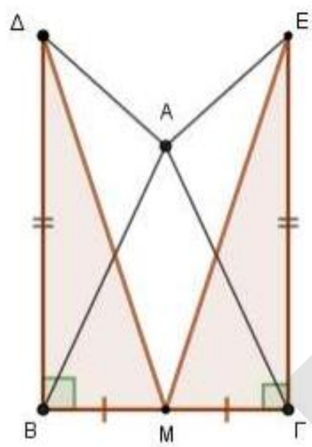
α) τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) ΑΔ=ΑΕ. (Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ

α)



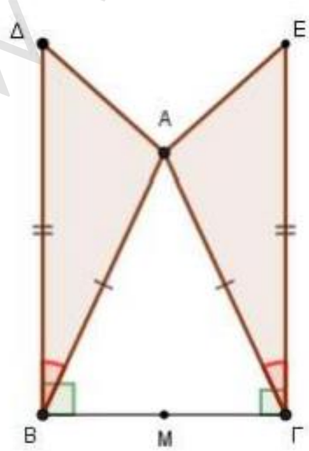
Εφόσον τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΔ και ΓΕ είναι κάθετα στη ΒΓ, άρα

$M\widehat{B}\Delta = M\widehat{\Gamma}E = 90^0$ οπότε τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ είναι ορθογώνια και έχουν:

- ΒΔ = ΓΕ από υπόθεση
- ΒΜ = ΜΓ, αφού Μ μέσο της ΒΓ

Άρα, τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ είναι ίσα, γιατί έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία.

β)



Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΕΓ έχουν:

- ΒΔ = ΓΕ από υπόθεση
- ΑΒ = ΑΓ ως ίσες πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ με βάση ΒΓ
- $A\hat{B}\Delta = A\hat{\Gamma}E$ ως συμπληρωματικές γωνίες των ίσων γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ

Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και ΑΔ = ΑΕ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $A\hat{B}\Delta$ και $A\hat{\Gamma}E$ αντίστοιχα.

16. Θέμα 12149

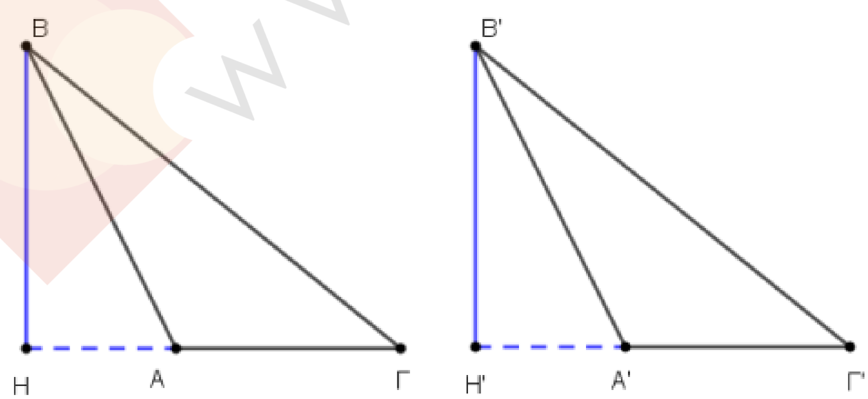
Δίνονται τα αμβλυγώνια τρίγωνα ΑΒΓ ($\hat{A} > 90^o$) και Α΄Β΄Γ΄ ($\hat{A}' > 90^o$) με γ = γ΄ και β = β΄. Αν τα ύψη ΒΗ και Β΄Η΄ των τριγώνων ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ αντίστοιχα είναι ίσα, να αποδείξετε ότι:

α) $B\hat{A}H = B'\hat{A}'H'$.

(Μονάδες 13)

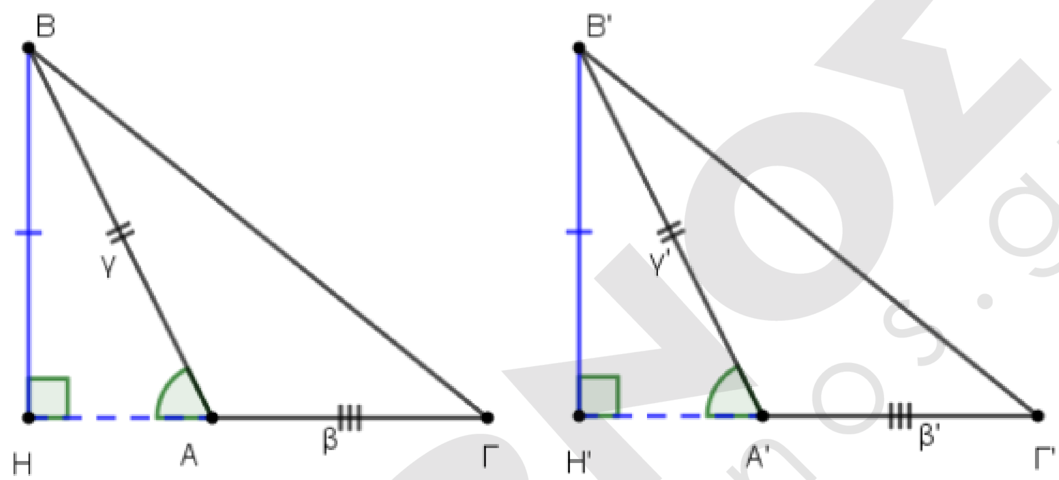
β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσα.

(Μονάδες 12)



ΛΥΣΗ

Έστω τα αμβλυγώνια τρίγωνα ΑΒΓ ($\widehat{A} > 90^o$) και Α΄Β΄Γ΄ ($\widehat{A}' > 90^o$) με γ = γ΄, β = β΄ και $BH = B'H'$.



α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΒΗΑ και Β΄Η΄Α΄. Αυτά έχουν:

$BH = B'H'$, από υπόθεση

γ = γ΄, από υπόθεση

$\widehat{H} = \widehat{H}'$= 90° (τα ΒΗ και Β΄Η΄ είναι ύψη, άρα κάθετα στον φορέα της ΑΓ και της Α΄Γ΄.

Επομένως είναι ίσα, επειδή είναι ορθογώνια και έχουν την υποτείνουσα και μία κάθετη πλευρά αντίστοιχα ίσες μία προς μία.

Άρα και οι γωνίες που είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές ΒΗ και Β΄Η΄ είναι ίσες, δηλαδή $B\widehat{A}H = B'\widehat{A}'H'$ (1).

β) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ. Αυτά έχουν:

γ = γ΄, από υπόθεση

β = β΄, από υπόθεση

$B\hat{A}\Gamma = B'\hat{A}'\Gamma'$, ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $B\hat{A}H$ και $B'\hat{A}'H'$ αντίστοιχα από τη σχέση (1).

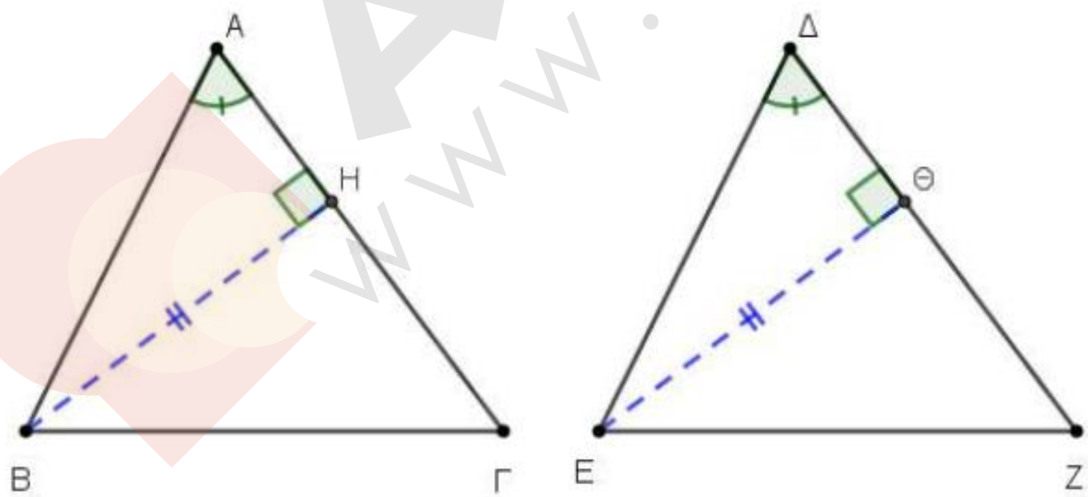
Επομένως, τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ είναι ίσα, αφού έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες.

17. Θέμα 13517

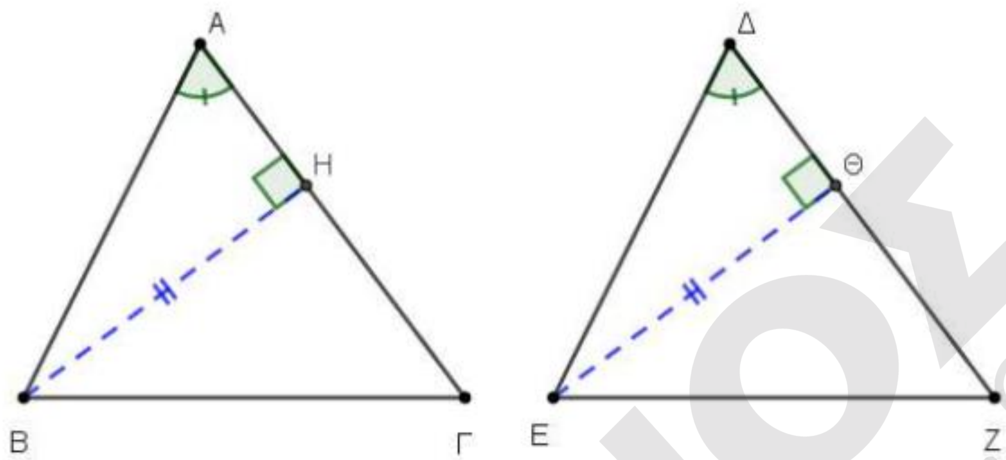
Δίνονται δύο οξυγώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ με $\hat{A}=\hat{\Delta}$, $A\hat{B}\Gamma = \Delta\hat{E}Z$. Αν τα ύψη τους ΒΗ και ΕΘ είναι ίσα τότε να αποδείξετε ότι:

α) ΑΒ = ΔΕ. (Μονάδες 13)

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα . (Μονάδες 12)



ΛΥΣΗ



α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΗ και ΔΕΘ. Αυτά έχουν:

ΒΗ = ΕΘ, από υπόθεση,

$\widehat{A}=\widehat{\Delta}$, από υπόθεση,

$\widehat{H} = \widehat{\Theta} = 90^o$.

Επομένως, τα τρίγωνα ΑΒΗ και ΔΕΘ είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια και έχουν μια κάθετη πλευρά τους και την απέναντι οξεία γωνία τους αντίστοιχα ίσες μία προς μία. Επομένως, θα έχουν τις υποτείνουσες ίσες, δηλαδή ΑΒ = ΔΕ (1).

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν:

ΑΒ =ΔΕ, από (1),

$\widehat{A}=\widehat{\Delta}$, από υπόθεση,

$A\widehat{B}\Gamma = \Delta\widehat{E}Z$, από υπόθεση.

Επομένως τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία.

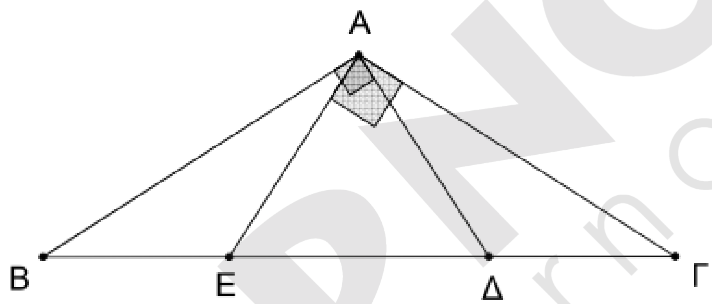
18. Θέμα 13533

Δίνεται ισοσκελές και αμβλυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$. Η κάθετη στην ΑΒ στο σημείο Α τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Δ και η κάθετη στην ΑΓ στο σημείο Α τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

β) το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

γ) $BE = \Gamma\Delta$. (Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ

α) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ έχουν:

- $B\hat{A}\Delta = \Gamma\hat{A}E = 90^o$, γιατί η ΑΔ είναι κάθετη στην ΑΒ και η ΑΕ κάθετη στην ΑΓ.
- $AB = A\Gamma$, από τα δεδομένα.
- $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, γιατί είναι προσκείμενες γωνίες στη βάση ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια και έχουν μια κάθετη πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία ίσες μία προς μία.

β) Από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΓΕ προκύπτει ότι $ΑΔ = ΑΕ$ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες τους $\hat{Β}, \hat{Γ}$ αντίστοιχα. Άρα το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

γ) Από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΓΕ έχουμε ότι $ΒΔ = ΓΕ$ (1) ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες τους $Β\hat{Α}Δ$ και $Γ\hat{Α}Ε$ αντίστοιχα.

Λόγω της (1) είναι $ΒΕ = ΒΔ - ΔΕ = ΓΕ - ΔΕ = ΓΔ$.

Θέμα 4 - Κωδικοί:

1707, 1724, 13839, 13854

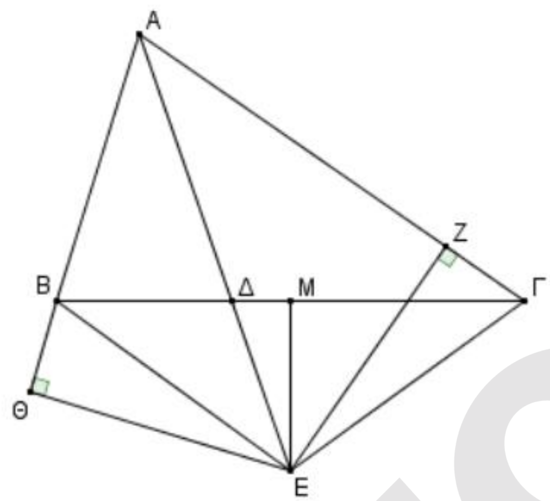
19. Θέμα 1707

Στο τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ<ΑΓ) του παρακάτω σχήματος, η κάθετη στο μέσο Μ της ΒΓ τέμνει την προέκταση της διχοτόμου ΑΔ στο σημείο Ε. Αν Θ, Ζ είναι οι προβολές του Ε στις ΑΒ, ΑΓ, να αποδείξετε ότι:

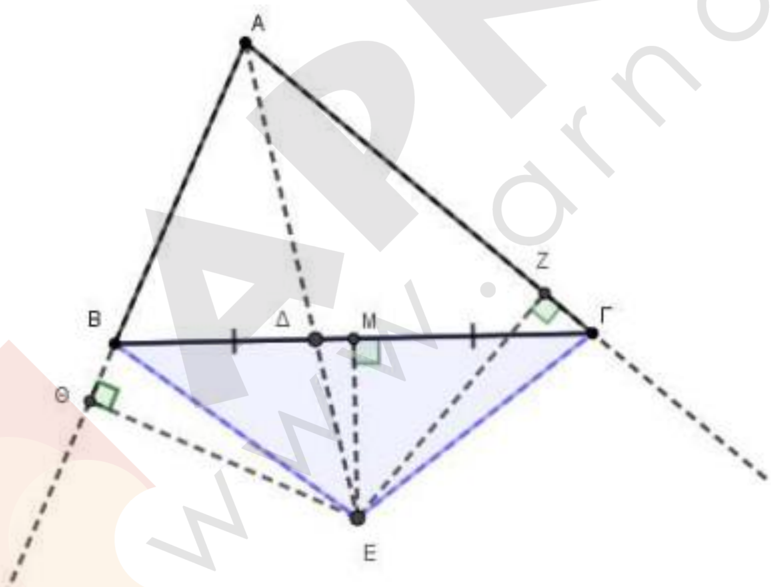
α) Το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 5)

β) Τα τρίγωνα ΘΒΕ και ΖΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 8)

γ) $Α\hat{Γ}Ε + Α\hat{Β}Ε = 180^\circ$ (Μονάδες 12)



ΛΥΣΗ



α) Στο τρίγωνο ΒΕΓ το τμήμα ΕΜ είναι ύψος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ισοσκελές.

β) Αφού Θ, Ζ είναι οι προβολές του Ε στις ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα τότε τα ΕΘ, ΕΖ θα είναι κάθετα τμήματα στις ΑΒ, ΑΓ οπότε $E\hat{\Theta}B = E\hat{Z}\Gamma = 90^0$.

Τα τρίγωνα ΕΘΒ και ΕΖΓ έχουν:

- $E\hat{\Theta}B = E\hat{Z}\Gamma = 90^0$
- ΕΒ = ΕΓ , ως πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου ΕΒΓ από α) ερώτημα.
- ΕΘ = ΕΖ , γιατί το Ε είναι σημείο της διχοτόμου ΑΕ οπότε ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$.

Άρα, τα τρίγωνα ΕΘΒ και ΕΖΓ είναι ίσα ως ορθογώνια που έχουν δυο ομόλογες πλευρές τους (υποτείνουσα - κάθετη πλευρά) ίσες μία προς μία.

γ) Επειδή τα τρίγωνα ΕΘΒ και ΕΖΓ είναι ίσα θα ισχύει και $\Theta\hat{B}E = Z\hat{\Gamma}E$ ή διαφορετικά $\Theta\hat{B}E = A\hat{\Gamma}E$ (1)

Ισχύει ότι $\Theta\hat{B}E + A\hat{B}E = 180^o$ και αφού $\Theta\hat{B}E = A\hat{\Gamma}E$ τότε θα είναι $A\hat{\Gamma}E + A\hat{B}E = 180^o$.

20. Θέμα 1724

Έστω ΑΒΓ τρίγωνο και τα ύψη του BE και $\Gamma\Delta$ που αντιστοιχούν στις πλευρές $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα. Δίνεται η ακόλουθη πρόταση:

Π: Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ=ΑΓ, τότε τα ύψη BE και $\Gamma\Delta$ που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του είναι ίσα.

α) Να εξετάσετε αν ισχύει η πρόταση ***Π*** αιτιολογώντας την απάντησή σας

(Μονάδες 10)

β) Να διατυπώσετε την ***αντίστροφη*** πρόταση της ***Π*** και να αποδείξετε ότι ισχύει.

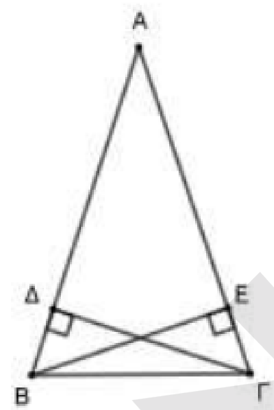
(Μονάδες 10)

γ) Να διατυπώσετε την πρόταση ***Π*** και την ***αντίστροφή της*** ως ενιαία πρόταση.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΒΕ και ΓΔ που αντιστοιχούν στις πλευρές ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα.



α) Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ=ΑΓ, τότε τα ύψη ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα.

Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΒΕΓ έχουν:

- $\widehat{\Delta} = \widehat{\mathrm{E}} = 90°$ αφού ΓΔ, ΒΕ ύψη
- ΒΓ κοινή πλευρά
- $\Delta\widehat{B}\Gamma = E\widehat{\Gamma}B$, γωνίες της βάσης του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία οξεία γωνία ίση. Επομένως θα είναι ίσες και οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\Delta\widehat{B}\Gamma$ και $E\widehat{\Gamma}B$ αντίστοιχα. Δηλαδή ΒΕ = ΓΔ.

β) Αντίστροφη πρόταση:

Αν δύο ύψη ενός τριγώνου είναι ίσα, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές με ίσες τις πλευρές στις οποίες αντιστοιχούν τα ύψη αυτά.

Απόδειξη

Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΒΕΓ έχουν:

- $\widehat{\Delta} = \hat{E} = 90°$ αφού ΓΔ, ΒΕ ύψη
- ΒΓ κοινή πλευρά
- ΒΕ = ΓΔ (υπόθεση)

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία κάθετη πλευρά ίση. Οπότε θα έχουν ίσες και τις γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΒΕ και ΓΔ αντίστοιχα. Δηλαδή $\Delta\widehat{B}\Gamma$ = $E\widehat{\Gamma}B$ ή $\widehat{B}$=$\widehat{\Gamma}$. Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ έχει δύο γωνίες ίσες, είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ.

γ) Ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές αν και μόνο αν τα ύψη που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του είναι ίσα.

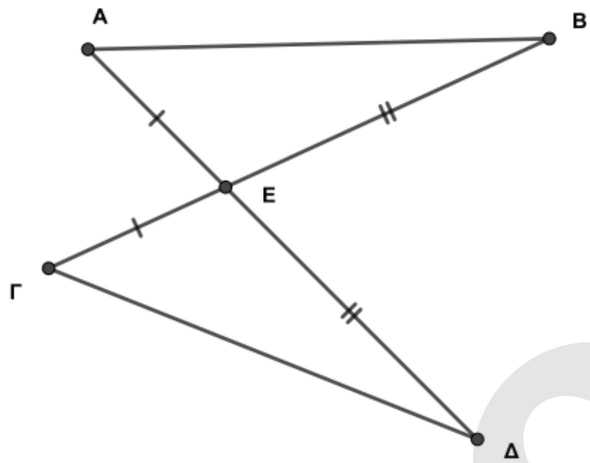
21. Θέμα 13839

Τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ και ΒΓ τέμνονται στο σημείο Ε έτσι ώστε ΑΕ=ΓΕ και ΒΕ=ΕΔ.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΓΔΕ είναι ίσα. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις ΕΗ και ΕΘ του σημείου Ε από τις πλευρές ΑΒ και ΓΔ, αντίστοιχα, είναι ίσες. (Μονάδες 5)

γ) Αν οι προεκτάσεις των ΑΒ και ΓΔ προς τα Α και Γ αντίστοιχα τέμνονται στο Ζ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΖ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)



ΛΥΣΗ

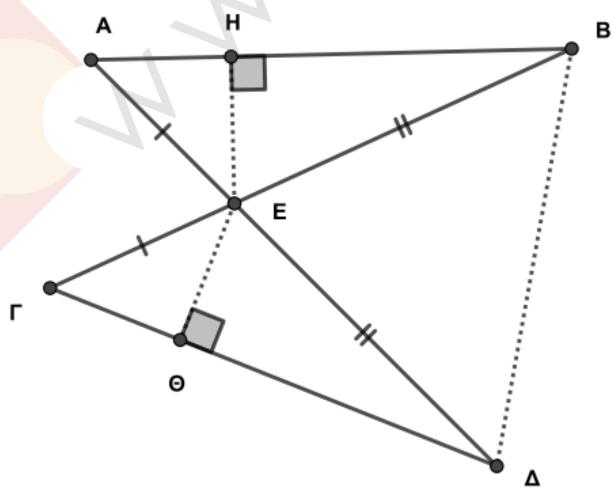
α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΓΔΕ που έχουν:

i. ΑΕ=ΓΕ (υπόθεση)

ii. ΒΕ=ΔΕ (υπόθεση)

iii. $A\hat{E}B=\Gamma\hat{E}\Delta$ (ως κατακορυφήν)

Τα τρίγωνα είναι ίσα επειδή έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες.



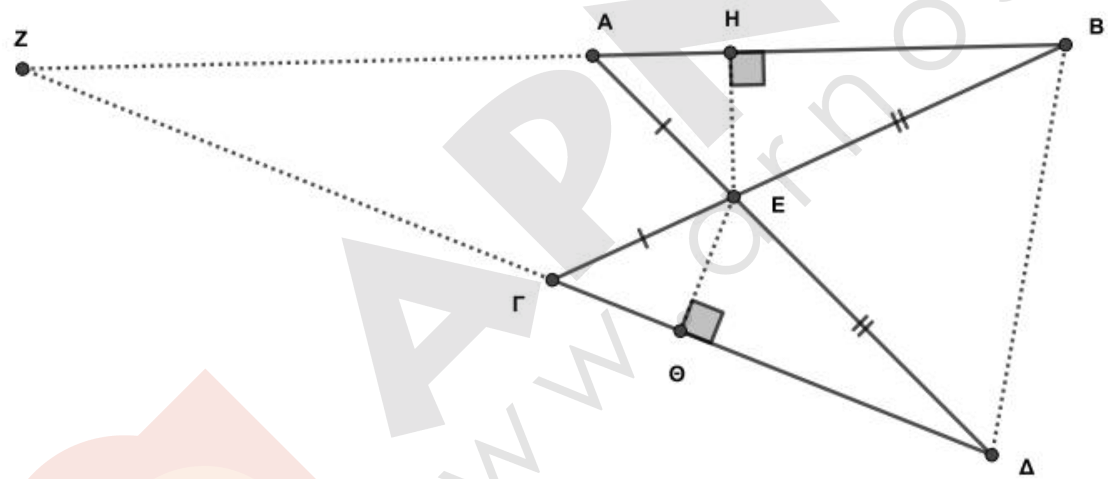
β) Συγκρίνω τα τρίγωνα ΑΕΗ και ΓΕΘ τα οποία έχουν:

i. ΑΕ=ΓΕ (υπόθεση)

ii. $\hat{H} = \hat{\Theta} = 90^o$

iii. $E\hat{A}H = E\hat{\Gamma}\Theta$ (από σύγκριση ερωτήματος α) αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΕΒ και ΕΔ)

Τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια, που έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία ίσες μία προς μία, άρα και ΕΗ=ΕΘ ως πλευρές απέναντι από τις ίσες γωνίες $E\hat{A}H$ και $E\hat{\Gamma}\Theta$ αντίστοιχα.



γ) Από την ισότητα των τριγώνων του α) ερωτήματος έχουμε ότι $A\hat{B}E = \Gamma\hat{\Delta}E$ αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΕ και ΕΓ αντίστοιχα. Από υπόθεση έχουμε ΕΒ=ΕΔ άρα το τρίγωνο ΕΒΔ είναι ισοσκελές με βάση ΒΔ συνεπώς οι προσκείμενες στη βάση γωνίες θα είναι ίσες μεταξύ τους, δηλαδή $E\hat{B}\Delta = E\hat{\Delta}B$. Το τρίγωνο ΒΔΖ είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΔ αφού οι προσκείμενες στη βάση γωνίες, $Z\hat{B}\Delta$ και $Z\hat{\Delta}B$, είναι ίσες μεταξύ τους ως άθροισμα ίσων γωνιών: $A\hat{B}E + E\hat{B}\Delta = \Gamma\hat{\Delta}E + E\hat{\Delta}B$ ή $Z\hat{B}\Delta = Z\hat{\Delta}B$.

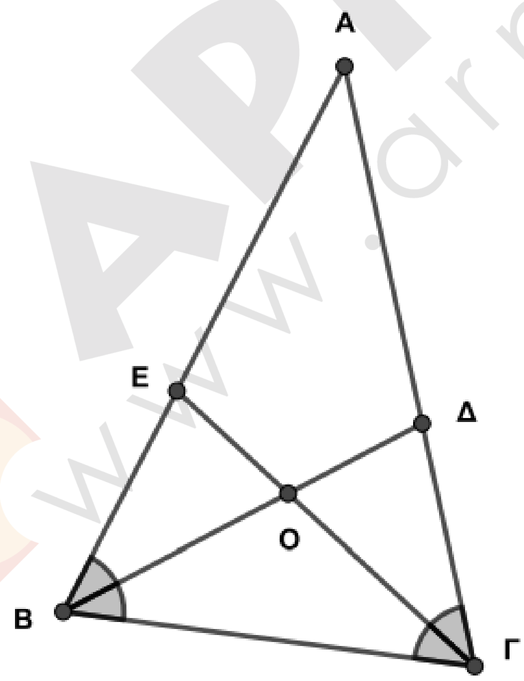
22. Θέμα 13854

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Οι διχοτόμοι ΒΔ και ΓΕ των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ αντίστοιχα, τέμνονται στο σημείο Ο.

α) Να αποδείξετε ότι ΒΔ=ΓΕ. (Μονάδες 9)

β) Από τα σημεία Ε και Δ φέρνουμε κάθετες ΕΛ και ΔΚ στις πλευρές ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι: ΔΚ=ΕΛ. (Μονάδες 9)

γ) Να εντοπίσετε και να σχεδιάσετε σημείο Ζ της πλευράς ΒΓ που η απόστασή του από το σημείο Ε να ισούται με την απόσταση των σημείων Δ και Κ αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 7)



ΛΥΣΗ

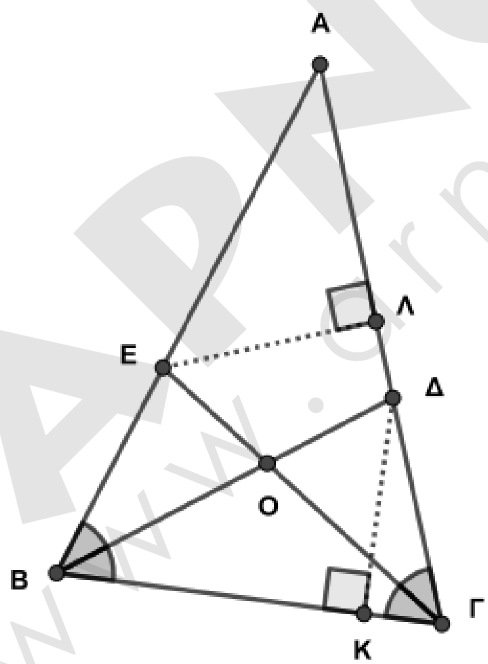
α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΒΓΔ και ΒΓΕ που έχουν:

i. ΒΓ κοινή πλευρά

ii. $Γ\widehat{Β}Δ = Β\widehat{Γ}Ε$ (μισά των ίσων γωνιών $\widehat{Β}$ και $\widehat{Γ}$)

iii. $Δ\widehat{Γ}Β = Ε\widehat{Β}Γ$ (ως προσκείμενες στη βάση ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ)

Τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, άρα ΒΔ=ΓΕ ως απέναντι πλευρές των ίσων γωνιών $\widehat{Γ}$ και $\widehat{Β}$.



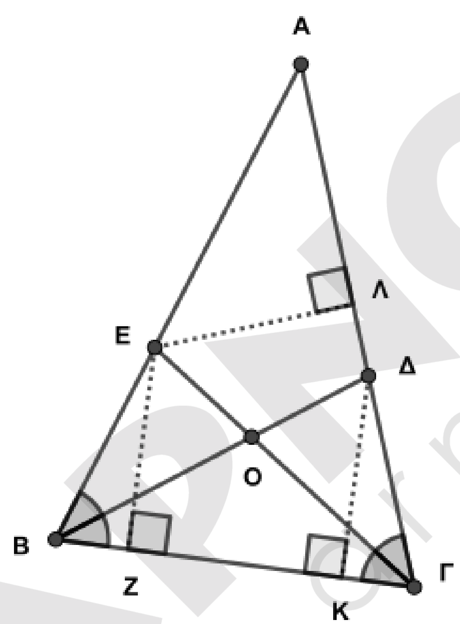
β) Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΔΚ και ΓΕΛ που έχουν:

i. $\widehat{Κ} = \widehat{Λ} = 90^o$

ii. ΒΔ=ΓΕ (από ερώτημα α))

iii. $K\hat{B}\Delta = \Lambda\hat{\Gamma}E$ (μισά των ίσων γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$)

Τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί είναι ορθογώνια, που έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία ίσες μία προς μία, άρα ΔΚ=ΕΛ ως απέναντι πλευρές των ίσων γωνιών $K\hat{B}\Delta$ και $\Lambda\hat{\Gamma}E$.



γ) Αναζητούμε ένα σημείο Ζ της πλευράς ΒΓ το οποίο να ικανοποιεί τη σχέση ΖΕ=ΔΚ. Από το β) ερώτημα έχουμε ότι ΔΚ=ΕΛ συνεπώς το σημείο Ζ που αναζητούμε θα πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση ΖΕ=ΕΛ. Το σημείο Ε ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{\Gamma}$ και ΕΛ είναι η απόστασή του από την πλευρά ΓΑ, η οποία είναι ίση με την απόσταση του σημείο Ε από τη άλλη πλευρά, ΒΓ, της γωνίας. Συνεπώς το ζητούμενο σημείο Ζ θα είναι το ίχνος της κάθετης από το σημείο Ε στην πλευρά ΒΓ.