Κεφ. 3.2. - Τράπεζα Θεμάτων 2022 - Γεωμετρία Α’ Λυκείου

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ & ΛΥΣΕΙΣ

Η Τράπεζα Θεμάτων για τη Γεωμετρία Α’ Λυκείου είναι μία μεγάλη «θάλασσα». Εμείς όμως έχουμε φροντίσει για εσένα, συγκεντρώνοντας εκείνα τα θέματα που αποτελούν τη «βάση» της γνώσης και για τα υπόλοιπα. Μελετώντας και κατανοώντας το μοτίβο σκέψης για τα συγκεκριμένα, μπορείς να λύσεις με επιτυχία και τα υπόλοιπα θέματα. Στην ιστοσελίδα μας www.arnos.gr για το Course της Γεωμετρίας, μελετάς και προετοιμάζεσαι με την αναλυτική διδασκαλία σε ασκήσεις και θέματα, στο ύφος της Τράπεζας.

Θέμα 2 - Κωδικοί:

1592, 1621, 1622, 1627, 1632, 1648, 1660, 12635, 12705

1. Θέμα 1592

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) . Στην προέκταση της πλευράς ΒΓ και προς τα δυο της άκρα, θεωρούμε σημεία Δ και Ε αντίστοιχα έτσι ώστε ΒΔ= ΓΕ.

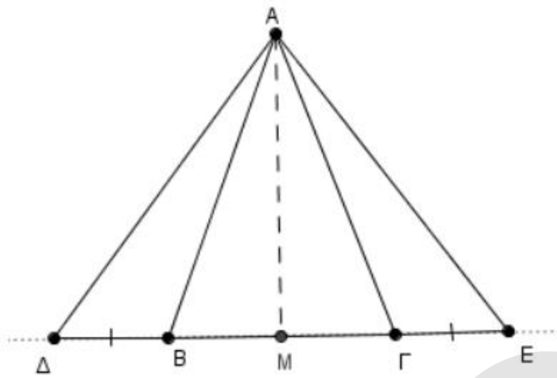
Να αποδείξετε ότι:

α) $\widehat{B_{\varepsilon\xi}} = \widehat{\Gamma_{\varepsilon\xi}}$ (Μονάδες 6)

β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

γ) Η διάμεσος ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ είναι και διάμεσος του τριγώνου ΑΔΕ.

(Μονάδες 7)



ΛΥΣΗ

α) Είναι $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ επειδή ΑΒΓ ισοσκελές τρίγωνο με βάση ΒΓ. Τότε:

$\widehat{B}_{\varepsilon\xi} = 180^o - \widehat{B} = 180^o - \widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}$

β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ έχουν:

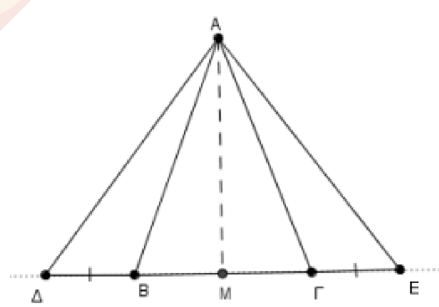
- ΑΒ = ΑΓ,
- ΒΔ = ΓΕ,
- $\widehat{B}_{\varepsilon\xi} = \widehat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}$

Από το κριτήριο Π – Γ – Π συμπεραίνουμε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα.

γ) Είναι ΒΜ = ΜΓ, αφού Μ μέσο της ΒΓ και ΒΔ = ΓΕ, από υπόθεση. Προσθέτοντας κατά μέλη βρίσκουμε:

ΒΜ + ΒΔ = ΜΓ + ΓΕ $\Leftrightarrow$ ΔΜ = ΜΕ

Επομένως το Μ είναι μέσο του ΔΕ, δηλαδή η ΑΜ είναι διάμεσος του ΑΔΕ.



2.Θέμα 1621

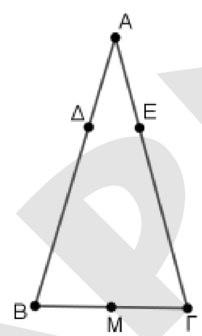
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και στις ίσες πλευρές ΑΒ,ΑΓ παίρνουμε αντίστοιχα τμήματα ΑΔ=$\frac{1}{3}$ΑΒ και ΑΕ=$\frac{1}{3}$ ΑΓ. Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι:

α) τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 5)

β) τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΜΕΓ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

γ) το τρίγωνο ΔΕΜ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

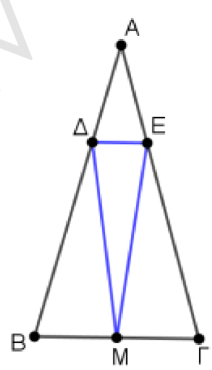
ΛΥΣΗ



α) Επειδή ΑΒ = ΑΓ και ΑΔ = ΑΕ, έχουμε ότι:

ΒΔ = ΑΒ – ΑΔ = ΑΓ – ΑΕ = ΓΕ

β) Φέρνουμε αρχικά τα ΔΜ και ΕΜ.



Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΜΕΓ, τα οποία έχουν:

- ΒΔ = ΓΕ, από το α)
- ΒΜ = ΜΓ, γιατί το Μ είναι μέσο της ΒΓ και
- $\widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\Gamma}$, ως γωνίες βάσης του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

Από το κριτήριο Π-Γ-Π συμπεραίνουμε ότι τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΜΕΓ είναι ίσα.

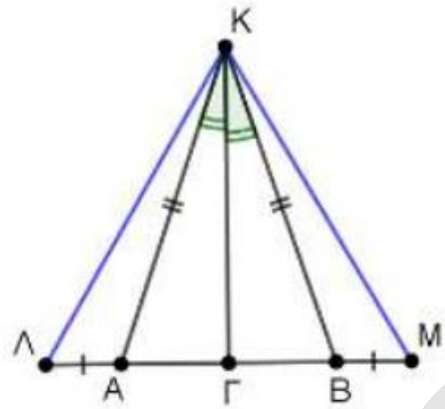
γ) Τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΜΕΓ είναι ίσα, από το β) και άρα ισχύει ΜΕ = ΜΔ (καθώς βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{\mathrm{B}}$ και $\widehat{\Gamma}$). Συνεπώς, το τρίγωνο ΜΔΕ είναι ισοσκελές.

3. Θέμα 1622

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΚΑΒ (ΚΑ=ΚΒ) και ΚΓ διχοτόμος της γωνίας $\hat{K}$. Στην προέκταση της ΒΑ (προς το Α) παίρνουμε σημείο Λ και στην προέκταση της ΑΒ (προς το Β) παίρνουμε σημείο Μ, έτσι ώστε ΑΛ=ΒΜ. Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισοσκελές (Μονάδες 12)

β) η ΚΓ είναι διάμεσος του τριγώνου ΚΛΜ (Μονάδες 13)



Είναι $B\hat{A}K = A\hat{B}K$ ως γωνίες βάσης του ισοσκελούς τριγώνου ΚΑΒ.

α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΚΑΛ και ΚΒΜ, το οποία έχουν:

- ΚΑ = ΚΒ, από την υπόθεση
- $K\hat{A}\Lambda = K\hat{B}M$, γιατί $K\hat{A}\Lambda = 180^o - B\hat{A}K = 180^o - A\hat{B}K = K\hat{B}M$
- ΑΛ = ΒΜ, από υπόθεση.

Από το κριτήριο Π-Γ-Π συμπεραίνουμε ότι τα τρίγωνα ΚΑΛ και ΚΒΜ είναι ίσα. Οπότε ισχύει ΚΛ = ΚΜ (είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες $K\hat{A}\Lambda$ και $K\hat{B}M$). Άρα το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισοσκελές.

β) Η ΚΓ είναι διχοτόμος του ισοσκελούς τριγώνου ΚΑΒ που αντιστοιχεί στη γωνία της κορυφής, οπότε είναι και διάμεσος του τριγώνου ΚΑΒ. Επομένως ΑΓ = ΒΓ.

Από την υπόθεση έχουμε ότι ΑΛ = ΒΜ.

Άρα, ΓΛ = ΑΛ + ΑΓ = ΒΜ + ΒΓ = ΓΜ.

Συνεπώς, το Γ είναι μέσο της ΛΜ και επομένως η ΚΓ είναι διάμεσος του ΚΛΜ.

4. Θέμα 1627

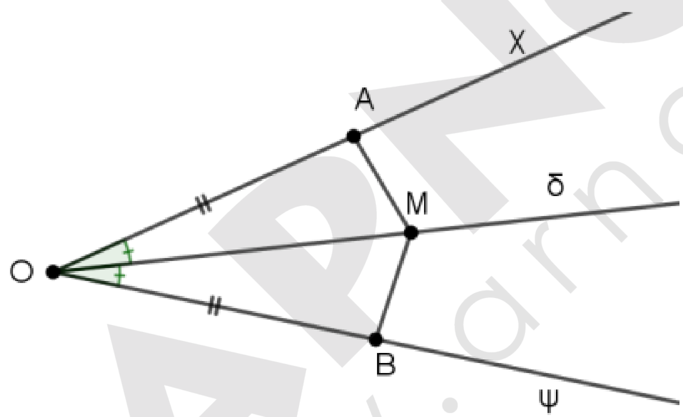
Δίνεται γωνία $x\hat{O}y$ και η διχοτόμος της Οδ. Θεωρούμε σημείο Μ της Οδ και σημεία Α και Β στις ημιευθείες Οx και Οy αντίστοιχα, τέτοια ώστε ΟΑ=ΟΒ.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΜΑ=ΜΒ. (Μονάδες 15)

β) Η Οδ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{M}B$. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ



α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΒΜΟ και ΑΜΟ, τα οποία έχουν:

- ΟΜ κοινή πλευρά
- ΟΑ = ΟΒ και
- $A\hat{O}M = B\hat{O}M$ γιατί η Οδ είναι διχοτόμος της γωνίας $x\hat{O}\psi$.

Από το κριτήριο Π-Γ-Π συμπεραίνουμε ότι τα τρίγωνα ΒΜΟ και ΑΜΟ είναι ίσα οπότε, απέναντι από τις ίσες γωνίες $A\hat{O}M$ και $B\hat{O}M$ βρίσκονται οι ίσες πλευρές ΜΑ = ΜΒ.

β) Επειδή τα τρίγωνα ΒΜΟ και ΑΜΟ είναι ίσα, έχουν και $O\hat{M}A = O\hat{M}B$ (απέναντι από τις ίσες πλευρές ΟΑ και ΟΒ), άρα η Οδ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{M}B$.

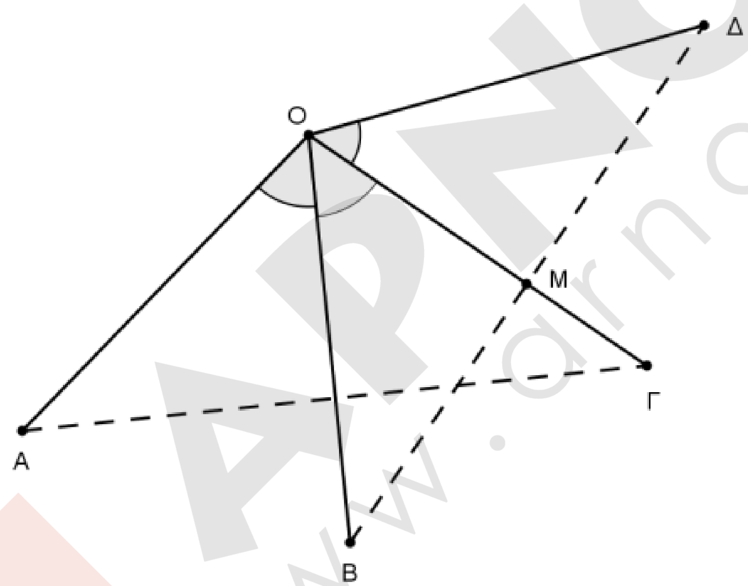
5. Θέμα 1632

Αν $A\hat{O}B = B\hat{O}\Gamma = \Gamma\hat{O}\Delta$ και $OA=OB=O\Gamma=O\Delta$, να αποδείξετε ότι:

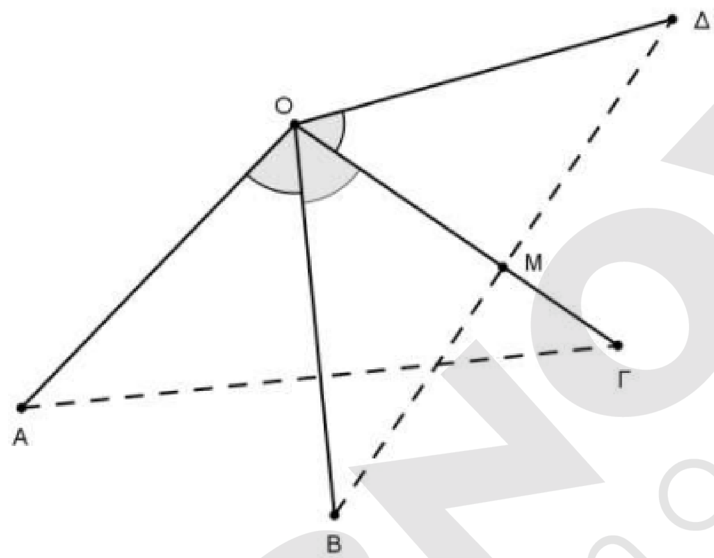
α) $A\Gamma = B\Delta$. (Μονάδες 10)

β) Το Μ είναι μέσον της ΒΔ, όπου Μ το σημείο τομής των τμημάτων ΟΓ και ΒΔ.

(Μονάδες 15)



ΛΥΣΗ



α) Έστω ότι $A\hat{O}B = B\hat{O}\Gamma = \Gamma\hat{O}\Delta = \hat{\omega}$.

Τα τρίγωνα ΑΟΓ και ΒΟΔ έχουν:

ΟΑ = ΟΒ, από υπόθεση

ΟΓ = ΟΔ, από υπόθεση

$A\hat{O}\Gamma = B\hat{O}\Delta$, διότι $A\hat{O}\Gamma = A\hat{O}B + B\hat{O}\Gamma = 2\hat{\omega}$ και $B\hat{O}\Delta = B\hat{O}\Gamma + \Gamma\hat{O}\Delta = 2\hat{\omega}$

Από το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΑΟΓ και ΒΟΔ είναι ίσα οπότε έχουν και

ΑΓ = ΒΔ επειδή είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες ΑΟΓ, ΒΟΔ.

β) Στο ισοσκελές τρίγωνο ΒΟΔ η ΟΜ είναι διχοτόμος της γωνίας της κορυφής του, άρα είναι και διάμεσος του ΒΟΔ. Επομένως το Μ είναι μέσο του ΒΔ.

6. Θέμα 1648

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ και ΓΑ (προς το Α) θεωρούμε τα σημεία Ε και Δ αντίστοιχα τέτοια ώστε ΑΔ = ΑΕ.

Να αποδείξετε ότι:

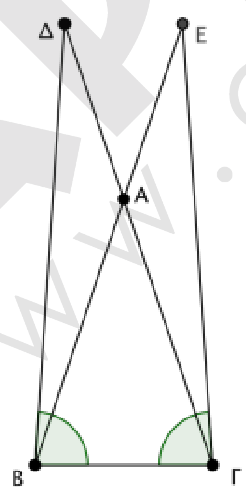
α) ΒΕ = ΓΔ (Μονάδες 6)

β) ΒΔ = ΓΕ (Μονάδες 10)

γ) $\Delta\hat{B}\Gamma = E\hat{\Gamma}B$ (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Επειδή ΑΒ = ΑΓ και ΑΕ = ΑΔ είναι ΑΒ + ΑΕ = ΑΓ + ΑΔ $\Leftrightarrow$ ΒΕ = ΓΔ.



β) Τα τρίγωνα ΔΒΑ και ΕΑΓ έχουν:

ΑΒ = ΑΓ, από υπόθεση

ΑΔ = ΑΓ, από υπόθεση

$\Delta\widehat{A}B = E\widehat{A}\Gamma$, ως κατακορυφήν.

Από το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΔΒΑ και ΕΑΓ είναι ίσα οπότε ΒΔ = ΓΕ επειδή είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες $Δ\hat{Α}Β$, $Ε\hat{Α}Γ$.

γ) Τα τρίγωνα ΔΒΑ και ΕΑΓ είναι ίσα οπότε: $Δ\hat{Β}Α = Ε\hat{Γ}Α$ επειδή είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΔ και ΑΕ. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές συνεπώς: $Γ\hat{Β}Α = Β\hat{Γ}Α$.

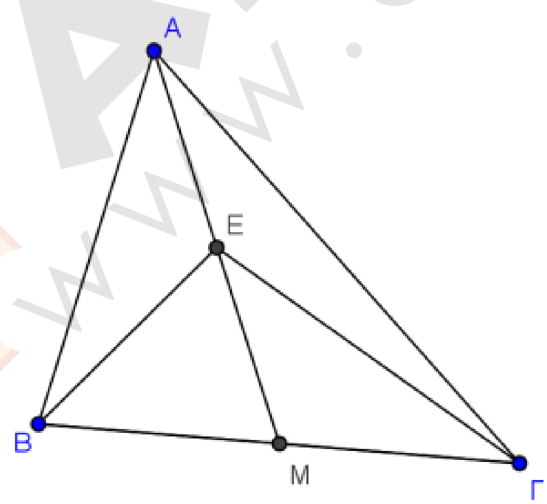
Άρα $Δ\hat{Β}Α + Γ\hat{Β}Α = Ε\hat{Γ}Α + Β\hat{Γ}Α$ ή $Δ\hat{Β}Γ = Ε\hat{Γ}Β$.

7. Θέμα 1660

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Ε το μέσο της διαμέσου του ΑΜ. Αν ΒΓ = 2 ΒΕ να αποδείξετε ότι:

α) $Α\hat{Ε}Β = Ε\hat{Μ}Γ$ (Μονάδες 12)

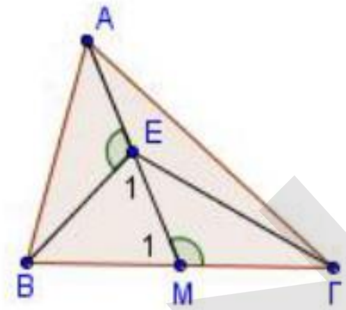
β) ΑΒ = ΕΓ . (Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ

α) Είναι ΒΜ = $\frac{ΒΓ}{2} = \frac{2ΒΕ}{2}$ = ΒΕ, άρα το τρίγωνο ΒΕΜ είναι ισοσκελές και έχει $\hat{Ε}_1 = \hat{Μ}_1$.

Όμως $Α\hat{Ε}Β = 180^\circ - \hat{Ε}_1$ και $Ε\hat{Μ}Γ = 180^\circ - \hat{Μ}_1$, άρα $Α\hat{Ε}Β = Ε\hat{Μ}Γ$.



β) Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΕΜΓ έχουν:

- ΑΕ = ΕΜ, διότι Ε μέσο του ΑΜ
- ΒΕ = ΒΜ = ΜΓ
- $Α\hat{Ε}Β = Ε\hat{Μ}Γ$
- Από το κριτήριο Π-Γ-Π συμπεραίνουμε ότι τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΕΜΓ είναι ίσα, οπότε έχουν και ΑΒ = ΕΓ ως απέναντι πλευρές στις ίσες γωνίες $Α\hat{Ε}Β = Ε\hat{Μ}Γ$.

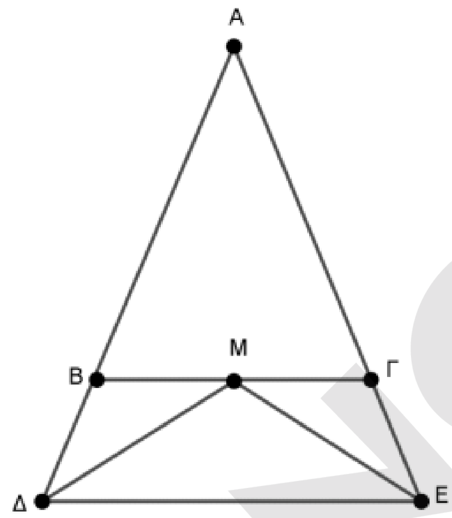
8. Θέμα 12635

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και Μ είναι το μέσο της βάσης του ΒΓ. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ, ΑΓ προς τα Β,Γ αντίστοιχα, παίρνουμε τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ ώστε ΒΔ=ΓΕ.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΜΒΔ και ΜΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία ΜΔΕ είναι ίση με τη γωνία ΜΕΔ. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ



α) Τα τρίγωνα ΜΒΔ και ΜΓΕ έχουν:

- ΜΒ=ΜΓ το Μ είναι μέσο της ΒΓ
- ΒΔ=ΓΕ από την υπόθεση
- $M\hat{B}\Delta = M\hat{\Gamma}E$ ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών Β και Γ

άρα τα τρίγωνα ΜΒΔ και ΜΓΕ είναι ίσα (ΠΓΠ).

β) Λόγω του (α) είναι ΜΔ=ΜΕ ως πλευρές των ίσων τριγώνων ΜΒΔ και ΜΓΕ που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες ΜΒΔ και ΜΓΕ αντίστοιχα. Επομένως το τρίγωνο ΜΔΕ είναι ισοσκελές, οπότε οι γωνίες της βάσης του ΜΔΕ και ΜΕΔ είναι ίσες.

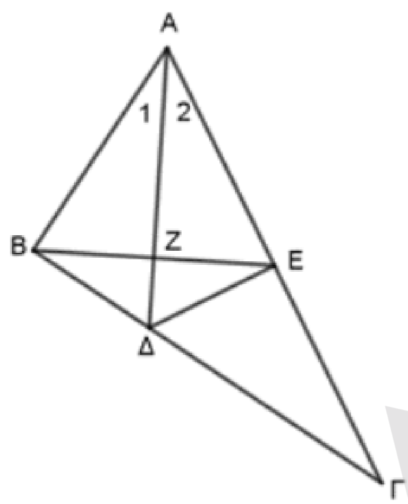
9. Θέμα 12705

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ τέτοιο, ώστε ΑΓ = 2ΑΒ. Η διχοτόμος του ΑΔ τέμνει την διάμεσο ΒΕ στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΒ = ΑΕ = $\frac{ΑΓ}{2}$. (Μονάδες 7)

β) ΔΒ = ΔΕ. (Μονάδες 8)

γ) ΑΖ $\perp$ ΒΕ (Μονάδες 10)



ΛΥΣΗ

α) Η ΒΕ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ, επομένως, ΑΕ = $\frac{ΑΓ}{2}$. Όμως ΑΒ = $\frac{ΑΓ}{2}$.

Άρα, ΑΒ = ΑΕ = $\frac{ΑΓ}{2}$.

β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΕΔ έχουν:

- ΑΒ = ΑΕ σύμφωνα με το ερώτημα (α)
- ΑΔ κοινή πλευρά
- $\widehat{Α}_1 = \widehat{Α}_2$, η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Α

Επομένως, από το κριτήριο ισότητας Π-Γ Π, τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΕΔ είναι ίσα.

Άρα, απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{A}_1, \widehat{A}_2$ έχουμε αντίστοιχα ίσες πλευρές δηλαδή ΔΒ = ΔΕ.

γ) Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΕ και η ΑΖ είναι διχοτόμος του.

Επομένως, η ΑΖ είναι και ύψος. Άρα, ΑΖ $\perp$ ΒΕ.