Κεφ. 3.16. - Τράπεζα Θεμάτων 2022 - Γεωμετρία Α' Λυκείου

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ & ΛΥΣΕΙΣ

Η Τράπεζα Θεμάτων για τη Γεωμετρία Α' Λυκείου είναι μία μεγάλη «θάλασσα». Εμείς όμως έχουμε φροντίσει για εσένα, συγκεντρώνοντας εκείνα τα θέματα που αποτελούν τη «βάση» της γνώσης και για τα υπόλοιπα. Μελετώντας και κατανοώντας το μοτίβο σκέψης για τα συγκεκριμένα, μπορείς να λύσεις με επιτυχία και τα υπόλοιπα θέματα. Στην ιστοσελίδα μας www.arnos.gr για το Course της Γεωμετρίας, μελετάς και προετοιμάζεσαι με την αναλυτική διδασκαλία σε ασκήσεις και θέματα, στο ύφος της Τράπεζας.

Θέμα 2 - Κωδικοί:

12417, 13757, 13758, 13835, 13836

1. Θέμα 12417

Έστω δύο κύκλοι (Κ, R) και (Λ, r), με $R=3$, $r=2$ και $ΚΛ=4$. Να αποδείξετε ότι:

α) Οι κύκλοι (Κ, R) και (Λ, r) τέμνονται σε δύο σημεία, έστω Α και Β.

(Μονάδες 15)

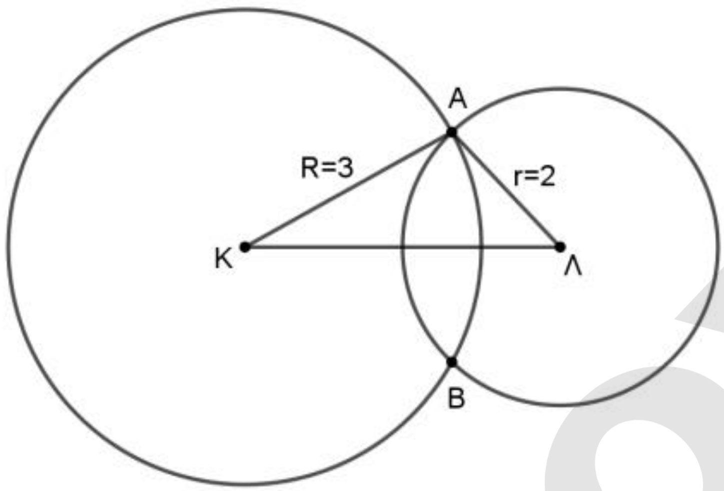
β) $Κ\hat{Α}Λ > Α\hat{Λ}Κ$.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Έστω οι κύκλοι (Κ, R) και (Λ, r), με $R=3$, $r=2$ και $ΚΛ=4$.

Έχουμε $R+r=5$ και $R-r=1$. Αφού $ΚΛ<R+r$ και $ΚΛ>R-r$, συμπεραίνουμε ότι οι κύκλοι (Κ, R) και (Λ, r) τέμνονται σε δύο σημεία Α και Β.



β) Στο τρίγωνο ΑΚΛ είναι ΚΛ>ΑΚ, αφού ΚΛ=4 και ΑΚ=R=3. Οπότε, οι απέναντι γωνίες $K\hat{A}\Lambda$ και $A\hat{\Lambda}K$ των άνισων πλευρών ΚΛ και ΑΚ αντίστοιχα, θα είναι ομοίως άνισες. Δηλαδή, $K\hat{A}\Lambda > A\hat{\Lambda}K$.

2. Θέμα 13757

Δίνονται δύο κύκλοι (Κ,2) και (Λ,5).

α) Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου ΚΛ, αν οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

(Μονάδες 6)

β) Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου ΚΛ, αν οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά. (Μονάδες 6)

γ) Μεταξύ ποιών τιμών βρίσκεται το μήκος της διακέντρου ΚΛ, αν ο κύκλος (Κ,2) βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου (Λ,5); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

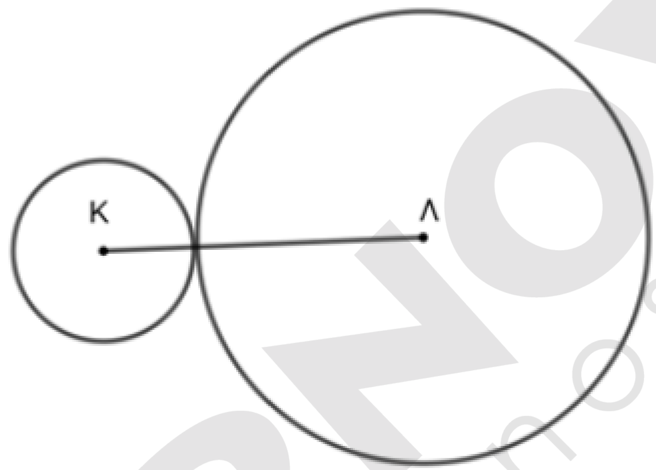
(Μονάδες 6)

δ) Μεταξύ ποιών τιμών βρίσκεται το μήκος της διακέντρου ΚΛ, αν οι κύκλοι τέμνονται; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

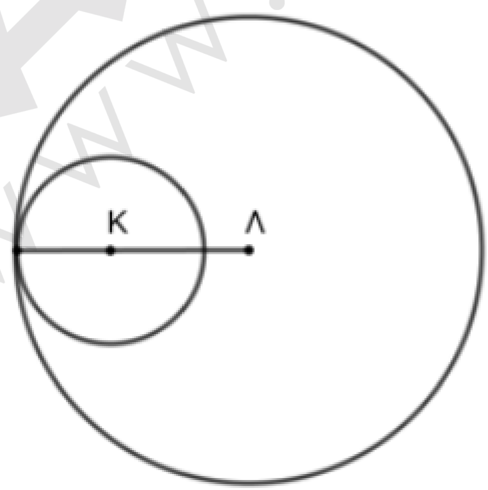
α) Αν οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά, τότε για τη διάκεντρο ΚΛ έχουμε :

ΚΛ = R + ρ = 5 + 2 = 7.

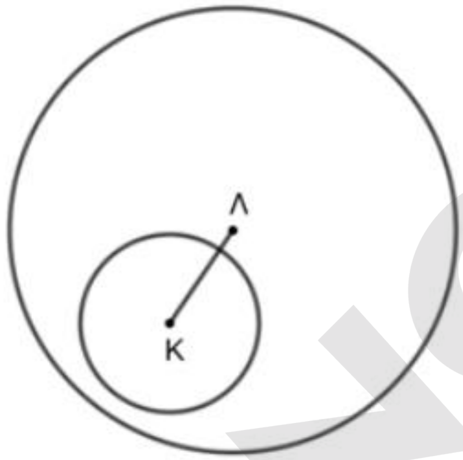


β) Αν οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά, τότε για τη διάκεντρο ΚΛ έχουμε :

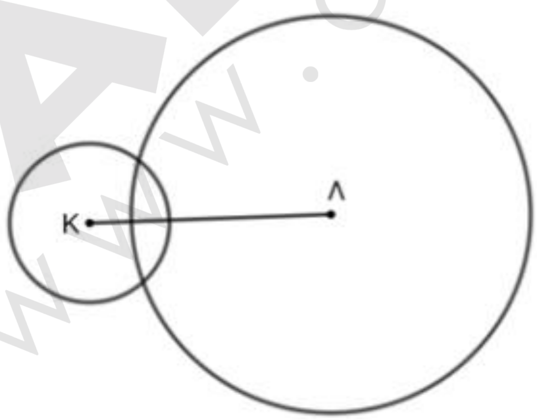
ΚΛ = R - ρ = 5 - 2 = 3.



γ) Για να είναι ο κύκλος (Κ,2) στο εσωτερικό του κύκλου (Λ,5) θα πρέπει ΚΛ < R –ρ, δηλαδή ΚΛ < 5- 2 ή ΚΛ < 3.



δ) Για να τέμνονται οι κύκλοι θα πρέπει R- ρ < ΚΛ < R + ρ, δηλαδή 5 – 2 < ΚΛ < 5 + 2 ή 3 < ΚΛ < 7.



3. Θέμα 13758

Δίνονται δύο κύκλοι (Κ,3) και (Λ,8). Να βρείτε τη σχετική θέση των δύο κύκλων, αιτιολογώντας την απάντησή σας, όταν:

α) ΚΛ = 13. (Μονάδες 5)

β) ΚΛ = 2. (Μονάδες 5)

γ) ΚΛ = 5. (Μονάδες 5)

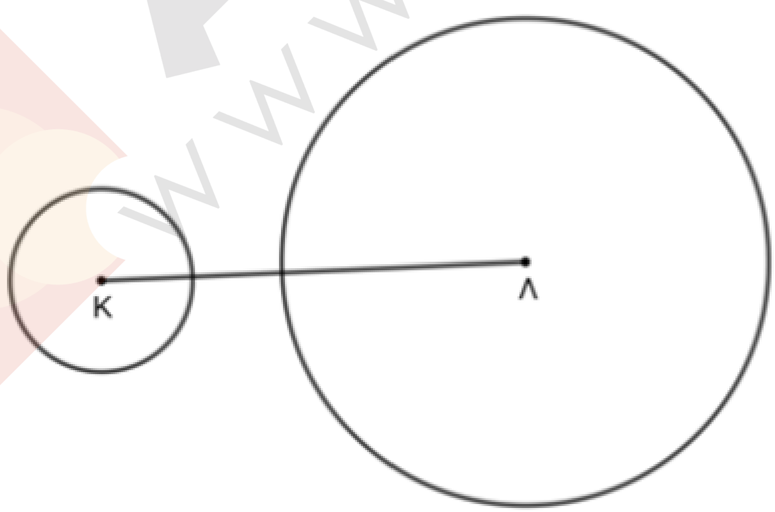
δ) ΚΛ = 11. (Μονάδες 5)

ε) ΚΛ = 9. (Μονάδες 5)

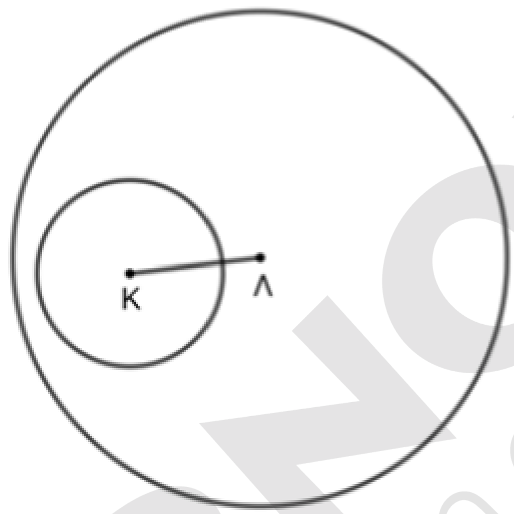
ΛΥΣΗ

Έστω R = 8 και ρ = 3. Υπολογίζουμε τη διαφορά και το άθροισμα των δύο ακτίνων, δηλαδή R - ρ = 8 - 3 = 5 και R + ρ = 8 + 3 = 11.

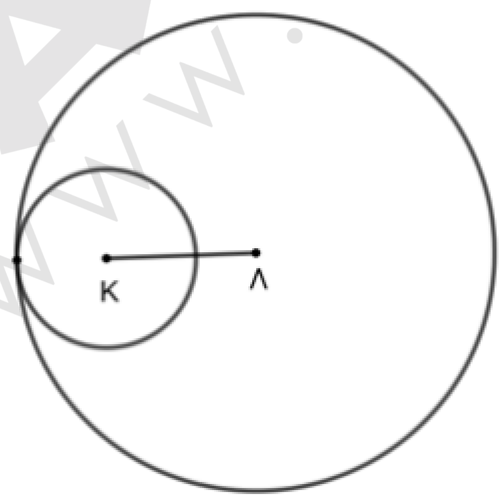
α) Επειδή η διάκεντρος ΚΛ = 13 έχει μεγαλύτερο μήκος από το άθροισμα των δύο ακτίνων R + ρ = 11, ο κύκλος (Λ,8) βρίσκεται στο εξωτερικό του κύκλου (Κ,3).



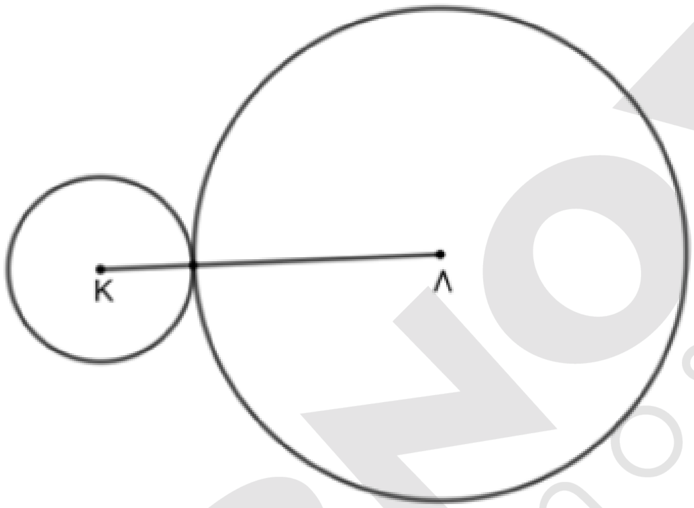
β) Επειδή η διάκεντρος ΚΛ = 2 έχει μικρότερο μήκος από τη διαφορά των δύο ακτίνων R - ρ = 5, ο κύκλος (Κ,3) βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου (Λ,8).



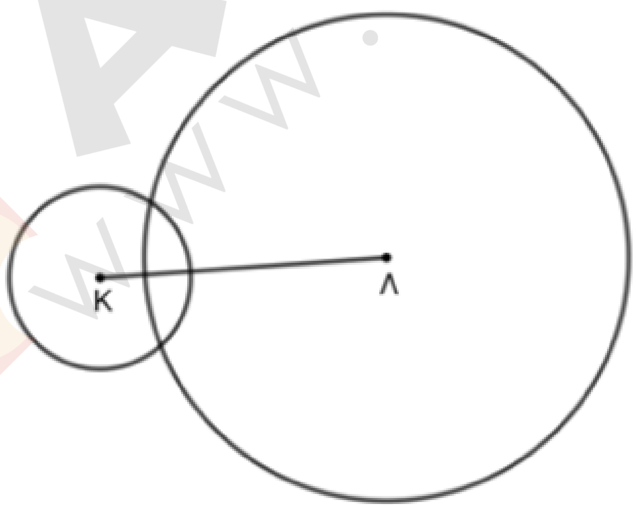
γ) Επειδή η διάκεντρος ΚΛ = 5 έχει ίσο μήκος με τη διαφορά των δύο ακτίνων R - ρ = 5, οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά.



δ) Επειδή η διάκεντρος ΚΛ = 11 έχει ίσο μήκος με το άθροισμα των δύο ακτίνων R + ρ = 11, οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.



ε) Επειδή η διάκεντρος ΚΛ = 9 έχει μήκος μεταξύ της διαφοράς R - ρ = 5 και του αθροίσματος των δύο ακτίνων R + ρ = 11, οι κύκλοι τέμνονται.

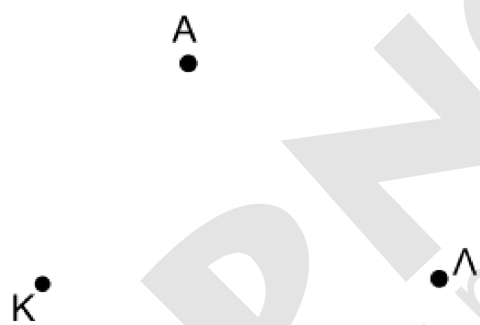


4. Θέμα 13835

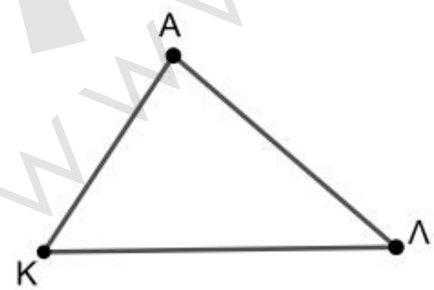
Τα σημεία Α, Κ και Λ δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Το σημείο Α απέχει 4 από το Κ και 5 από το Λ.

α) Να αποδείξετε ότι $1 < KΛ < 9$. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε ένα σημείο Β του επιπέδου διαφορετικό από το Α, που να απέχει 4 από το Κ και 5 από το Λ. (Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ

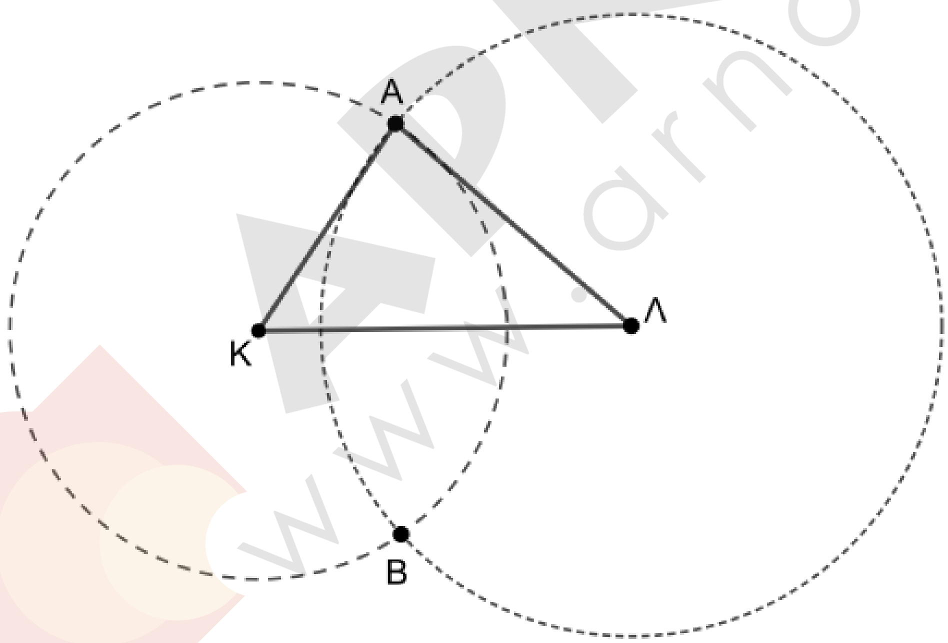


α) Τα τρία μη συνευθειακά σημεία Α, Κ και Λ ορίζουν το τρίγωνο ΑΚΛ. Λόγω της τριγωνικής ανισότητας ισχύει ότι $AΛ - AK < KΛ < AΛ + A$.

Άρα $5 - 4 < KΛ < 5 + 4$ ή $1 < KΛ < 9$.

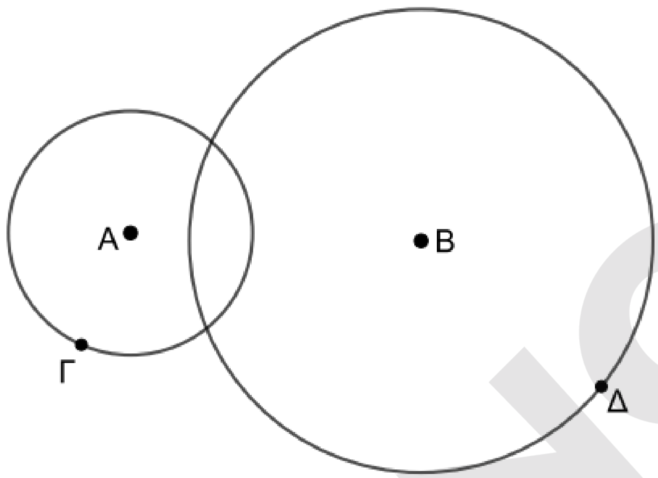
β) Το ζητούμενο σημείο είναι σημείο του κύκλου (Κ, 4) και του κύκλου (Λ, 5). Σχεδιάζουμε δύο κύκλους: ο ένας έχει κέντρο το Κ και ακτίνα 4 και ο άλλος έχει κέντρο το Β και ακτίνα 5. Από το α)ερώτημα για τη διάκεντρο των κύκλων έχουμε ότι:

$ΑΛ - ΑΚ < ΚΛ < ΑΛ + ΑΚ$ ή $R - \rho < ΚΛ < R + \rho$, όπου R είναι η ακτίνα του κύκλου με κέντρο το Λ και ρ είναι η ακτίνα του κύκλου με κέντρο το Κ. Άρα οι κύκλοι τέμνονται σε δύο σημεία. Το ένα είναι το Α και το άλλο είναι το Β, που είναι και το ζητούμενο σημείο.



5. Θέμα 13836

α) Στο παρακάτω σχήμα για τους κύκλους (Α, ρ) και (Β, R) ισχύει $\rho < R$.

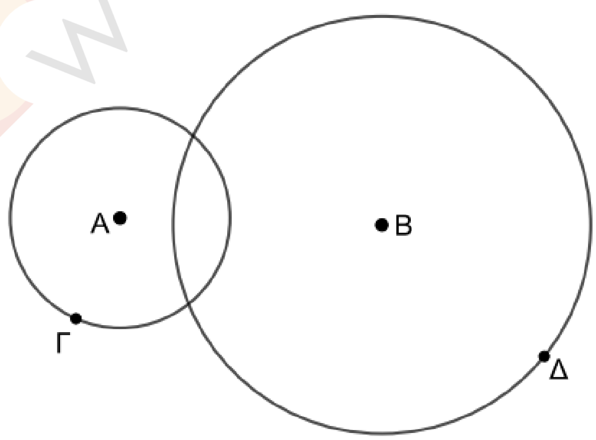


Να αποδείξετε ότι $BΔ - AΓ < AB < AΓ + BΔ$. (Μονάδες 10)

β) Ο χάρτης ενός κρυμμένου θησαυρού έχει δύο σταθερά σημεία Α και Β, τα οποία απέχουν μεταξύ τους 6. Επίσης γράφει ότι ο θησαυρός είναι κρυμμένος σε ένα σημείο το οποίο απέχει 3 από το Α του χάρτη και 5 από το Β του χάρτη. Ποια είναι τα σημεία του χάρτη στα οποία μπορεί να είναι κρυμμένος ο θησαυρός;

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

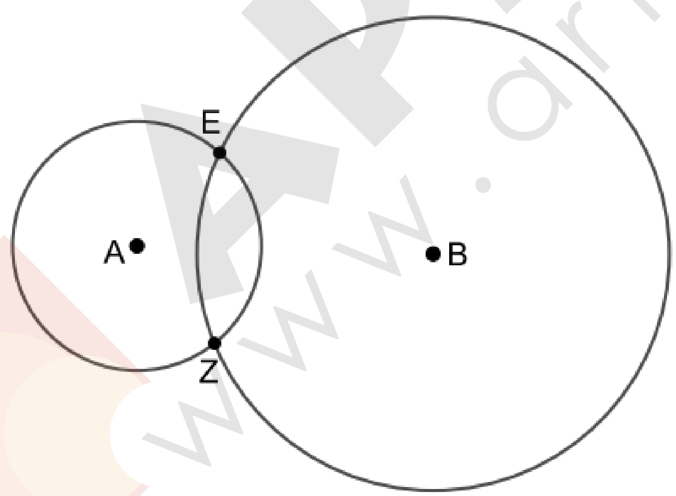


α) Οι κύκλοι είναι τεμνόμενοι.

Άρα ισχύει $R-\rho<\delta<R+\rho$, όπου ρ είναι η ακτίνα του κύκλου με κέντρο το Α, R είναι η ακτίνα του κύκλου με κέντρο Β και δ η διάκεντρός τους. Όμως η διάκεντρος είναι η ΑΒ και επιπλέον ισχύουν ΑΓ = ρ και ΒΔ = R. Επομένως $B\Delta-A\Gamma<AB<B\Delta+A\Gamma$.

β) Ο θησαυρός, επειδή απέχει 3 από το Α και 5 από το Β είναι σε σημείο του κύκλου με κέντρο το Α και ακτίνα 3 και σε σημείο του κύκλου με κέντρο το Β και ακτίνα 5. Σχεδιάζουμε δύο κύκλους (Α, ρ) και (Β, R) με ρ = 3 και R = 5. Τότε η ΑΒ = 6 είναι η διάκεντρος του κύκλου και ισχύει $R-\rho<AB<R+\rho$ γιατί αντικαθιστώντας έχουμε $5-3<6<5+3$, που είναι αληθές.

Επομένως οι κύκλοι είναι τεμνόμενοι δηλαδή έχουν δύο κοινά σημεία τα Ε και Ζ. Αυτά τα σημεία έχουν την ιδιότητα να απέχουν 3 από το Α και 5 από το Β, άρα είναι τα σημεία που μπορεί να κρύβεται ο θησαυρός.



Θέμα 3 - Κωδικοί:

13702

6. Θέμα 13702

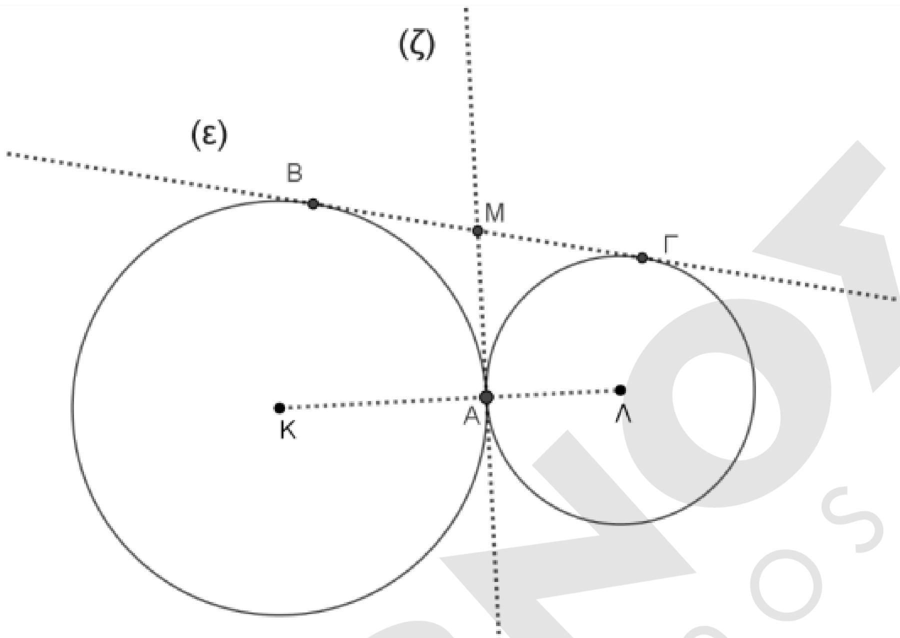
Δίνονται δυο κύκλοι (Κ, ρ_1) και (Λ, ρ_2) που εφάπτονται εξωτερικά σε σημείο Α. Μια ευθεία (ε) εφάπτεται εξωτερικά στους δυο κύκλους σε σημεία Β και Γ αντίστοιχα. Αν η εσωτερική εφαπτομένη των κύκλων στο σημείο επαφής τους Α τέμνει την ευθεία (ε) σε σημείο Μ, να αποδείξετε ότι:

α) τα σημεία Α, Β και Γ ανήκουν σε κύκλο του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα. (Μονάδες 12)

β) ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία Α, Β και Γ εφάπτεται στη διάκεντρο ΚΛ των κύκλων (Κ, ρ_1) και (Λ, ρ_2). (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

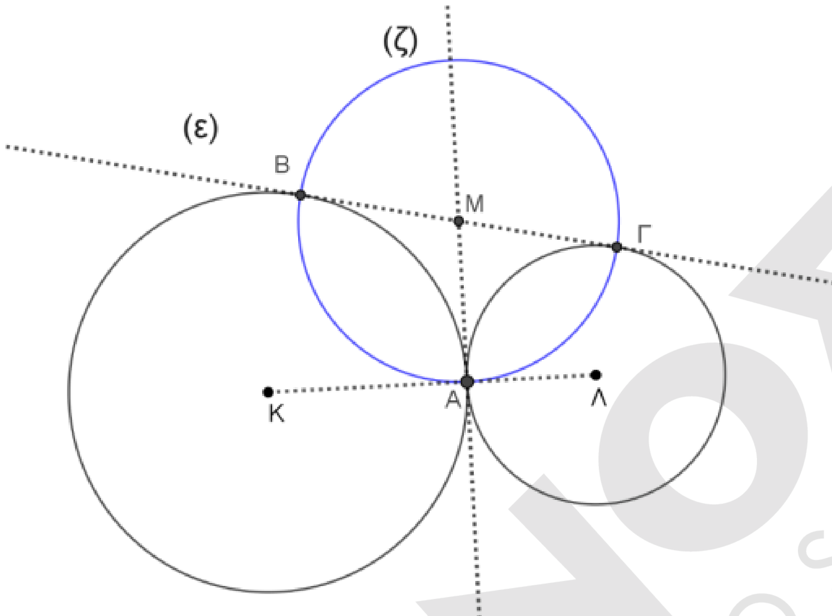
Έστω οι κύκλοι (Κ, ρ_1) και (Λ, ρ_2) που εφάπτονται εξωτερικά σε σημείο Α, (ε) η ευθεία η οποία εφάπτεται εξωτερικά στους δυο κύκλους σε σημεία τους Β και Γ αντίστοιχα, (ζ) η κοινή εσωτερική εφαπτομένη των κύκλων στο σημείο επαφής τους Α και Μ το σημείο στο οποίο τέμνει την ευθεία (ε).



α) Το σημείο Α είναι σημείο της διακέντρου ΚΛ και τα Β, Γ είναι σημεία επαφής της κοινής εξωτερικής εφαπτομένης των δυο κύκλων με αυτούς, οπότε τα τρία σημεία Α, Β και Γ δεν είναι συνευθειακά. Άρα τα σημεία Α, Β και Γ θα είναι σημεία ενός μοναδικού κύκλου.

Το σημείο Μ είναι εξωτερικό σημείο των κύκλων $(Κ, ρ_1)$ και $(Λ, ρ_2)$ ως σημείο τομής των κοινών εφαπτομένων τους από τα δεδομένα.

Είναι ΜΒ = ΜΑ ως εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου $(Κ, ρ_1)$ από το σημείο Μ. Επίσης είναι ΜΑ = ΜΓ ως εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου $(Λ, ρ_2)$ από το σημείο Μ. Οπότε θα είναι ΜΒ = ΜΑ = ΜΓ (= κ). Άρα ο κύκλος που ζητείται να κατασκευαστεί θα έχει κέντρο το σημείο Μ και ακτίνα ίση με κ.



β) Επειδή οι κύκλοι (Κ, $ρ_1$) και (Λ, $ρ_2$) εφάπτονται εξωτερικά στο Α, η κοινή εφαπτομένη τους (ζ) είναι κάθετη στην ακτίνα ΚΑ και κάθετη στην ακτίνα ΛΑ αντίστοιχα. Και επειδή το σημείο Α είναι σημείο της διακέντρου ΚΛ, η εφαπτομένη (ζ) των δυο κύκλων στο Α θα είναι κάθετη στη διάκεντρο ΚΛ.

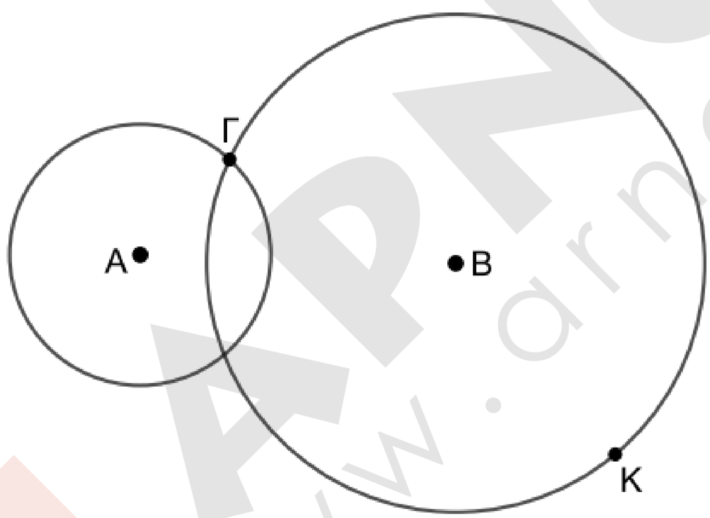
Η ακτίνα ΜΑ (=κ) του κύκλου που σχεδιάζεται με κέντρο το Μ έχει ως φορέα την εφαπτομένη (ζ) των δυο κύκλων στο σημείο επαφής τους Α, οπότε η ακτίνα ΜΑ θα είναι κάθετη στη διάκεντρο ΚΛ. Άρα ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία Α, Β και Γ θα εφάπτεται της διακέντρου ΚΛ στο σημείο Α.

Θέμα 4 - Κωδικοί:

13823, 13846

7. Θέμα 13823

α) Στο παρακάτω σχήμα για τους κύκλους (Α, ρ) και (Β, R) ισχύει $\rho < R$ και ΑΒ = 6.



i. Να αποδείξετε ότι $BK - A\Gamma < AB < BK + A\Gamma$.

ii. Παρακάτω γράφονται οι ιδιότητες 1 και 2. Ποιο σημείο από τα Κ και Γ έχει την ιδιότητα 1, ποιο την ιδιότητα 2 και ποιο έχει και τις δύο;

Ιδιότητα 1: «Το σημείο απέχει R από το Β.»

Ιδιότητα 2: «Το σημείο απέχει ρ από το Α.»

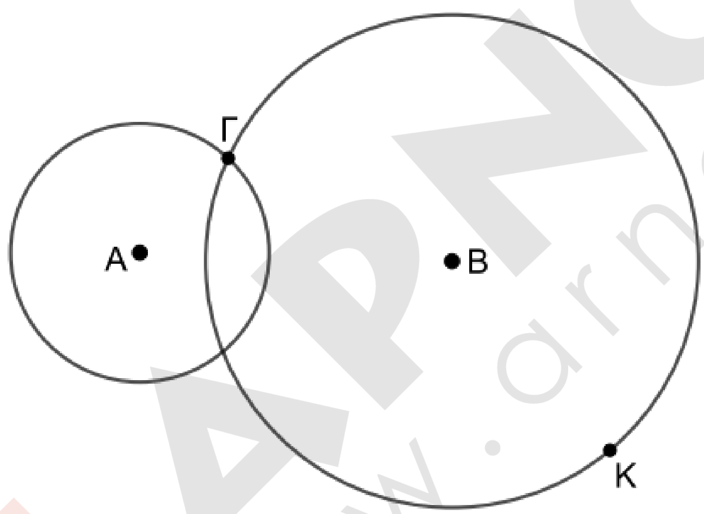
Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

(Μονάδες 16)

β) Ο χάρτης ενός κρυμμένου θησαυρού έχει δύο σταθερά σημεία Α και Β, τα οποία απέχουν μεταξύ τους 6. Επίσης γράφει ότι ο θησαυρός είναι κρυμμένος σε ένα σημείο το οποίο απέχει 3 από το Α του χάρτη και 2 από το Β του χάρτη. Μπορεί να είναι σωστή η πληροφορία που δίνει ο χάρτης για να βρει κανείς το θησαυρό;

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

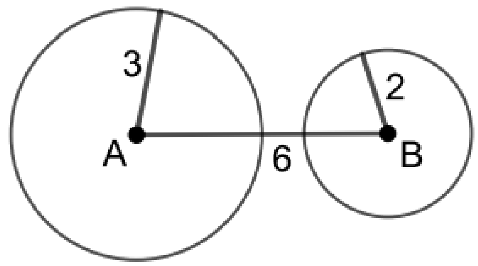


α) i. Οι κύκλοι είναι τεμνόμενοι.

Άρα ισχύει $R - \rho < \delta < R + \rho$, όπου ρ είναι η ακτίνα του κύκλου με κέντρο το Α, R είναι η ακτίνα του κύκλου με κέντρο Β και δ η διάκεντρός τους. Όμως η διάκεντρος είναι η ΑΒ και επίσης $\rho = A\Gamma$ και $R = BK$. Επομένως $BK - A\Gamma < AB < BK + A\Gamma$.

ii. Το σημείο Κ έχει μόνο την ιδιότητα 1, γιατί είναι σημείο του κύκλου (Β, R) και όχι του κύκλου (Α, ρ). Το σημείο Γ έχει και τις δύο ιδιότητες γιατί είναι σημείο και των δύο κύκλων, δηλαδή απέχει ρ από το Α και R από το Β.

β) Έστω Α και Β τα δύο σημεία του χάρτη.



Σύμφωνα με την οδηγία το σημείο του θησαυρού ανήκει σε ένα κύκλο κέντρου Α και ακτίνας 3 και σε κύκλο κέντρου Β και ακτίνας 2. Επειδή απέχει 3 από το Α και 2 από το Β θα είναι το σημείο τομής των δύο αυτών κύκλων, αν υπάρχει.

Όμως η απόσταση των σημείων Α και Β που είναι η διάκεντρος των κύκλων (Α,3) και (Β,2) είναι 6, δηλαδή είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα των ακτίνων τους. Αυτό σημαίνει ότι οι κύκλοι δεν έχουν κοινά σημεία και μάλιστα ο ένας είναι εξωτερικός του άλλου.

Συνεπώς η οδηγία δεν είναι σωστή, γιατί δεν υπάρχει σημείο του επιπέδου (άρα και του χάρτη) για το οποίο να ισχύει αυτό που περιγράφει η οδηγία.

8. Θέμα 13846

Δίνεται το παρακάτω σχήμα με τους κύκλους (Α, ρ) και (Β, R) με R > ρ. Επίσης ΑΒ = 9.

α) Να αποδείξετε ότι $R + \rho < 9$. (Μονάδες 7)

β) Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο ΚΛΜ με ΚΛ να είναι ίση με ρ και η πλευρά ΛΜ να είναι ίση με R. Να περιγράψετε τον τρόπο που το σχεδιάσατε και να αποδείξετε ότι η τρίτη πλευρά του είναι μικρότερη από 9.

(Μονάδες 10)

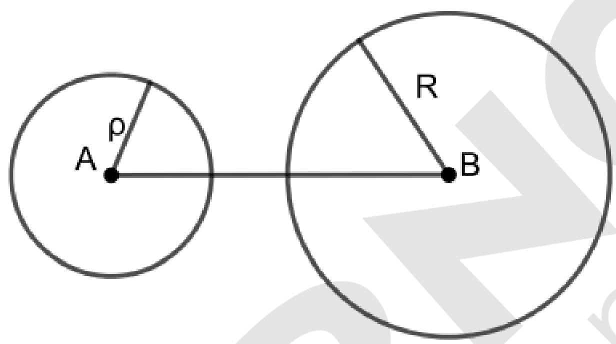
γ) Έστω το τρίγωνο ΚΛΜ που σχεδιάσατε στο β) ερώτημα. Πόσα σημεία του επιπέδου έχουν και τις δύο ιδιότητες Ι1 και Ι2 που περιγράφονται παρακάτω;

Ι1: «Η απόσταση των σημείων από το Κ είναι ίση με ρ».

Ι2: «Η απόσταση των σημείων από το Μ είναι ίση με R».

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

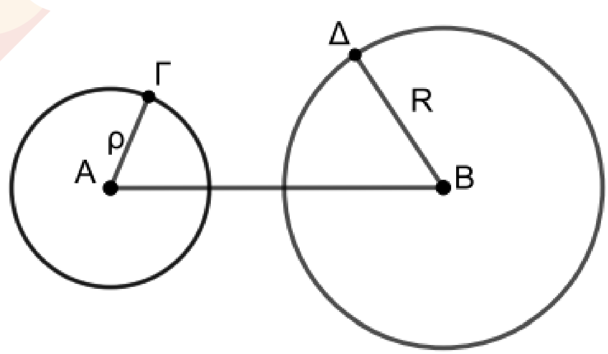
(Μονάδες 8)

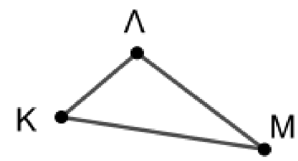


ΛΥΣΗ

α) Οι κύκλοι δεν έχουν κοινά σημεία και είναι ο ένας στο εξωτερικό του άλλου και η διάκεντρός τους είναι το ευθύγραμμο ΑΒ. Άρα ισχύει $R+\rho<AB$ ή $R+\rho<9$.

β) Έστω Γ σημείο του κύκλου με κέντρο Α και ακτίνα ρ και Δ σημείο του κύκλου με κέντρο Β και ακτίνα R, όπως στο παρακάτω σχήμα. Με το διαβήτη «μεταφέρουμε» τα ΑΓ=ρ και ΒΔ=R έτσι ώστε να σχηματίζονται τα ευθύγραμμα τμήματα ΚΛ και ΛΜ. Στη συνέχεια σχεδιάζουμε και την ΚΜ.





Ισχύει ότι $\Lambda M > K\Lambda$, γιατί $R > \rho$. Άρα από την τριγωνική ανισότητα για το τρίγωνο ΚΛΜ έχουμε ότι $\Lambda M - K\Lambda < KM < \Lambda M + K\Lambda$ ή $R - \rho < KM < R + \rho$.

Όμως από το α) έχουμε ότι $R + \rho < 9$. Άρα $KM < 9$. Δηλαδή η τρίτη πλευρά του τριγώνου είναι μικρότερη από 9.

γ) Έστω το τρίγωνο ΚΛΜ που έχουμε σχεδιάσει. Τα σημεία του επιπέδου που έχουν την ιδιότητα Ι1 είναι τα σημεία του κύκλου με κέντρο Κ και ακτίνα ρ, ενώ τα σημεία του επιπέδου που έχουν την ιδιότητα Ι2 είναι τα σημεία του κύκλου με κέντρο Μ και ακτίνα R. Επομένως, τα σημεία του επιπέδου που έχουν και τις δύο ιδιότητες Ι1 και Ι2 είναι εκείνα που βρίσκονται και στους δύο αυτούς κύκλους. Δηλαδή είναι τα κοινά σημεία των δύο κύκλων.

Όπως έχουμε αποδείξει στο β) ερώτημα ισχύει $R - \rho < KM < R + \rho$, όπου ΚΜ είναι η διάκεντρος των δύο κύκλων. Επομένως οι κύκλοι είναι τεμνόμενοι και έχουν δύο σημεία τομής. Άρα δύο είναι τα σημεία του επιπέδου που έχουν και τις δύο ιδιότητες: τα σημεία τομής των κύκλων (Κ, ρ) και (Μ, R), δηλαδή τα Λ και Λ΄.