Κεφ. 3.15. - Τράπεζα Θεμάτων 2022 - Γεωμετρία Α' Λυκείου

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ & ΛΥΣΕΙΣ

Η Τράπεζα Θεμάτων για τη Γεωμετρία Α' Λυκείου είναι μία μεγάλη «θάλασσα». Εμείς όμως έχουμε φροντίσει για εσένα, συγκεντρώνοντας εκείνα τα θέματα που αποτελούν τη «βάση» της γνώσης και για τα υπόλοιπα. Μελετώντας και κατανοώντας το μοτίβο σκέψης για τα συγκεκριμένα, μπορείς να λύσεις με επιτυχία και τα υπόλοιπα θέματα. Στην ιστοσελίδα μας www.arnos.gr για το Course της Γεωμετρίας, μελετάς και προετοιμάζεσαι με την αναλυτική διδασκαλία σε ασκήσεις και θέματα, στο ύφος της Τράπεζας.

Θέμα 2 - Κωδικοί:

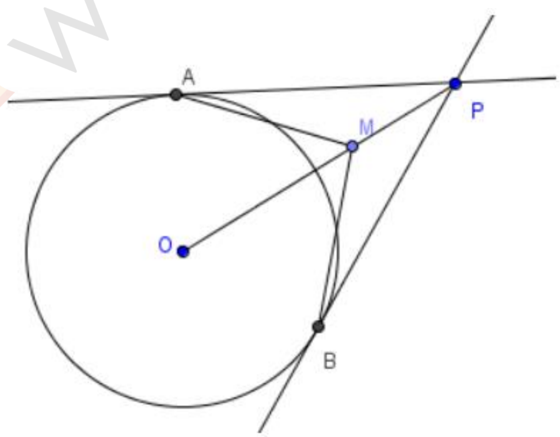
1617, 1620, 1667, 1684, 13817

1. Θέμα 1617

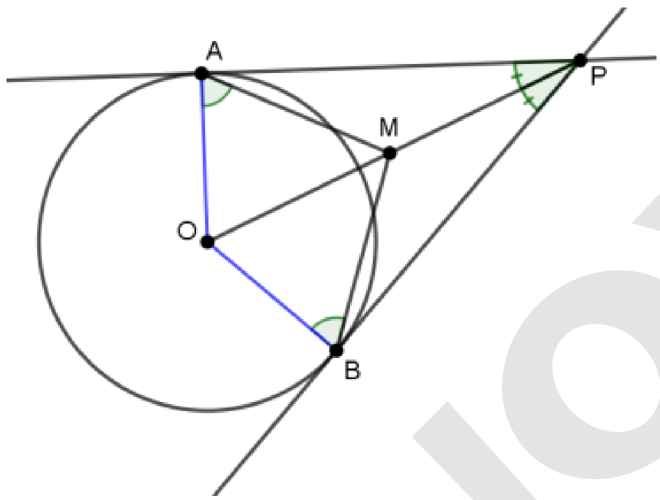
Από εξωτερικό σημείο Ρ ενός κύκλου (Ο,ρ) φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Αν Μ είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο του ευθυγράμμου τμήματος ΟΡ, να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΡΑΜ και ΡΜΒ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) οι γωνίες $\widehat{MAO}$ και $\widehat{MBO}$ είναι ίσες. (Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ



α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα PAM και PMB. Έχουν:

- PM κοινή πλευρά
- PA = PB ως εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από το P προς τον κύκλο
- $O\hat{P}A = O\hat{P}B$, διότι η διακεντρική ευθεία PO διχοτομεί την γωνία των εφαπτομένων.

Από το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα PAM και PMB είναι ίσα.

β) Από την ισότητα των τριγώνων PAM και PMB προκύπτει ότι $P\hat{A}M = P\hat{B}M$, καθώς οι γωνίες βρίσκονται απέναντι από την PM και στα δύο τρίγωνα.

Επίσης $O\hat{A}P = O\hat{B}P = 90^o$ διότι οι ακτίνες που καταλήγουν στα σημεία επαφής είναι κάθετες στις εφαπτόμενες ευθείες. Άρα $M\hat{A}O = O\hat{A}P - P\hat{A}M = O\hat{B}P - P\hat{B}M = M\hat{B}O$.

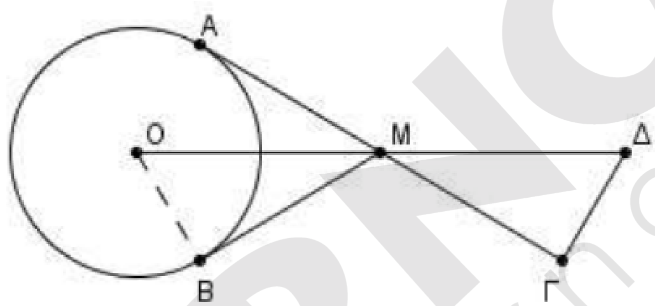
2. Θέμα 1620

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται κύκλος (O,R) και τα εφαπτόμενα τμήματα ΜΑ και ΜΒ. Προεκτείνουμε την ΑΜ κατά τμήμα ΜΓ=ΜΑ και την ΟΜ κατά τμήμα ΜΔ=ΟΜ.

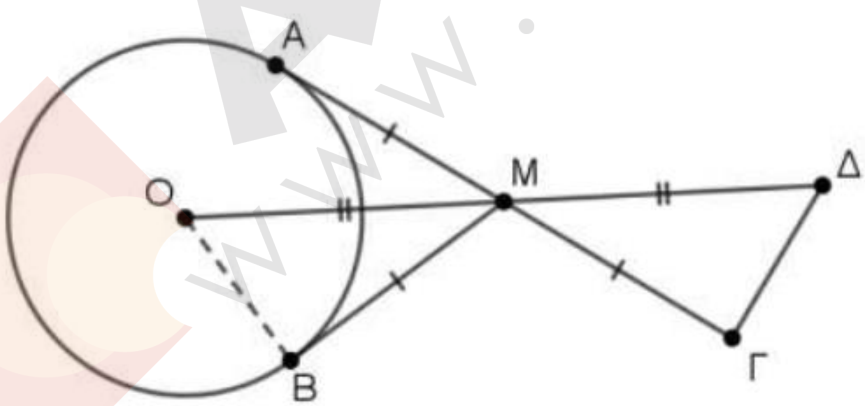
α) Να αποδείξετε ότι ΜΒ = ΜΓ. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΜΒ και ΜΓΔ είναι ίσα.

. (Μονάδες 15)



ΛΥΣΗ



α) Ισχύει ότι ΜΑ = ΜΒ ως εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από σημείο εκτός κύκλου (το σημείο Μ). Επίσης, από υπόθεση ισχύει ότι ΜΓ = ΜΑ οπότε προκύπτει ΜΒ = ΜΓ (1).

β) Ακόμα ισχύει ότι και $A\widehat{M}O = B\widehat{M}O$ (2) γιατί η διακεντρική ευθεία ΟΜ διχοτομεί τη γωνία των εφαπτομένων, η οποία είναι η $A\widehat{M}B$.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΟΜΒ και ΜΓΔ, τα οποία έχουν:

- ΜΔ = ΟΜ, από την υπόθεση
- ΜΒ = ΜΓ, λόγω της (1)
- $B\widehat{M}O = \Gamma\widehat{M}\Delta$, διότι $A\widehat{M}O = \Gamma\widehat{M}\Delta$ (ως κατακορυφήν) και $A\widehat{M}O = B\widehat{M}O$ (λόγω της (2)).

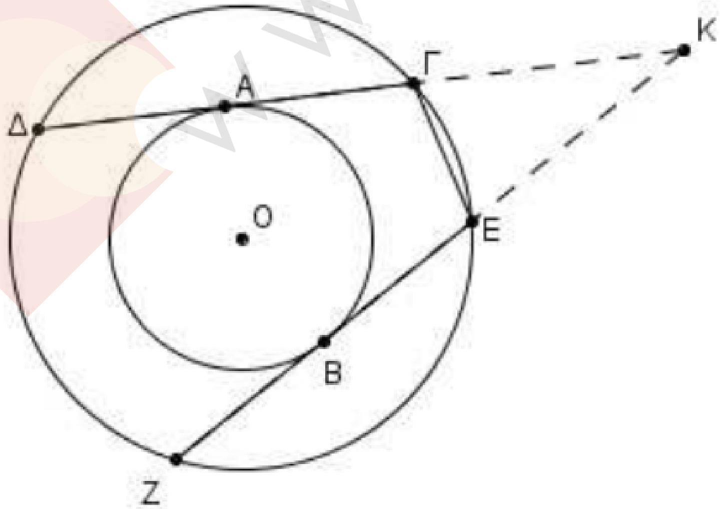
Από το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα ΟΜΒ και ΜΓΔ είναι ίσα.

3. Θέμα 1667

Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο Ο και ακτίνες ρ και R (ρ<R). Οι χορδές ΔΓ και ΖΕ του κύκλου (O,R) εφάπτονται του κύκλου (O, ρ) στα σημεία Α και Β αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι ΔΓ=ΖΕ. (12 Μονάδες)

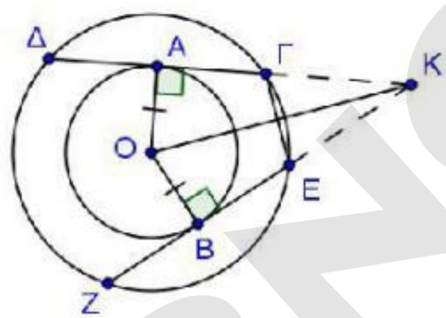
β) Αν οι ΔΓ και ΖΕ προεκτεινόμενες τέμνονται στο σημείο Κ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΕΓ είναι ισοσκελές. (13 Μονάδες)



ΛΥΣΗ

α) Οι ακτίνες ΟΑ και ΟΒ του κύκλου (Ο, ρ) καταλήγουν στα σημεία επαφής με τις εφαπτομένες. Τότε ΟΑ ⊥ ΓΔ και ΟΒ ⊥ ΕΖ.

Τα ΟΑ, ΟΒ είναι αποστήματα των χορδών ΓΔ και ΕΖ στον κύκλο (Ο,R) και είναι ίσα αφού ΟΑ = ΟΒ = ρ. Άρα και οι χορδές ΓΔ και ΕΖ είναι ίσες



β) Είναι ΚΑ = ΚΒ (1) ως εφαπτόμενα τμήματα από το Κ προς τον κύκλο (Ο, ρ). Επειδή τα ΟΑ, ΟΒ είναι αποστήματα των χορδών ΓΔ και ΕΖ, τα σημεία Α και Β είναι μέσα των χορδών και επειδή οι χορδές είναι ίσες, είναι και ΑΓ = ΒΕ (2).

Αφαιρούμε κατά μέλη τις (1), (2) και βρίσκουμε: ΚΑ – ΑΓ= ΚΒ – ΒΕ οπότε ΚΓ= ΚΕ.

Άρα το τρίγωνο ΚΓΕ είναι ισοσκελές.

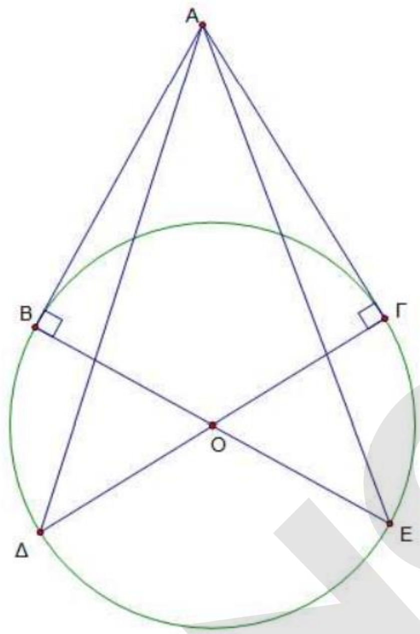
4. Θέμα 1684

Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Από σημείο Α εκτός του κύκλου, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΑΒ και ΑΓ. Τα σημεία Ε και Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία των Β και Γ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΔ είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 12)



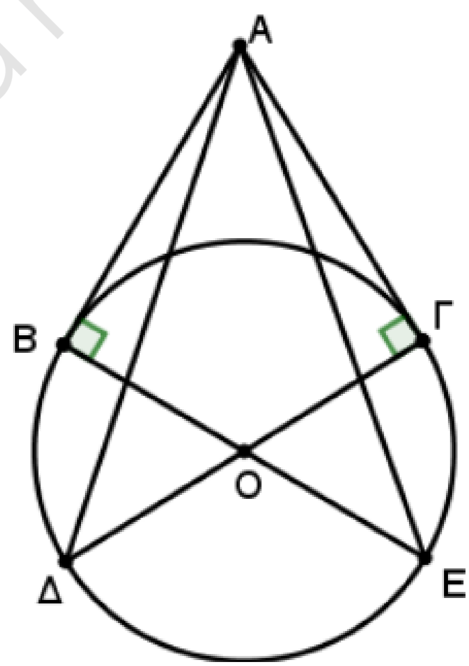
ΛΥΣΗ

α) Είναι $A\hat{B}E = A\hat{\Gamma}\Delta = 90^o$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΔ έχουν:

- ΑΒ = ΑΓ, ως εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από σημείο εκτός κύκλου προς αυτόν
- ΒΕ = ΓΔ = 2ρ

Άρα τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΔ είναι ίσα.

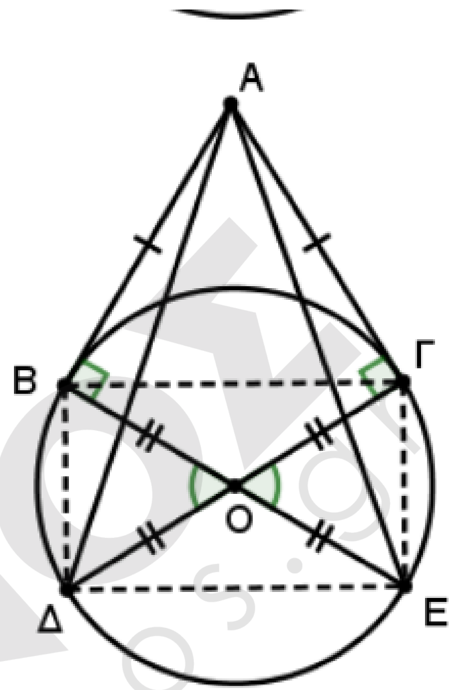


β) $B\hat{O}\Delta = \Gamma\hat{O}E$ ως κατακορυφήν γωνίες, άρα $\overset{\frown}{\Delta B}=\overset{\frown}{E\Gamma} \Leftrightarrow$ ΔΒ=ΕΓ.

Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ έχουν:

- ΑΒ=ΑΓ
- ΑΔ=ΑΕ, αφού τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΔ είναι ίσα ως υποτείνουσες των ίσων τριγώνων,
- ΒΔ=ΓΕ

Από το κριτήριο Π-Π-Π τα τρίγωνα είναι ίσα.

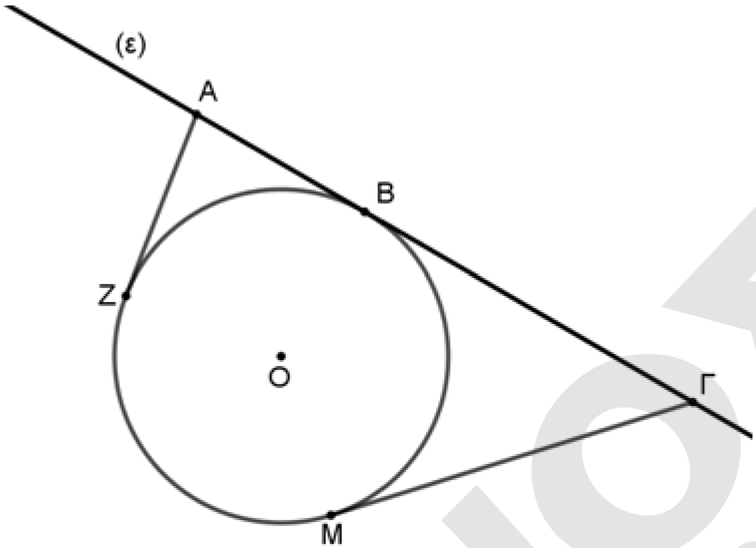


5. Θέμα 13817

Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Σε σημείο Β του κύκλου φέρουμε εφαπτόμενη ευθεία (ε). Θεωρούμε στην ευθεία (ε) δύο σημεία Α και Γ εκατέρωθεν του Β έτσι ώστε ΒΑ < ΒΓ και από τα σημεία αυτά, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΑΖ και ΓΜ στον κύκλο.

α) Να γράψετε τα ευθύγραμμα τμήματα τα οποία είναι ίσα, αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι ΑΓ = ΑΖ + ΜΓ. (Μονάδες 10)



ΛΥΣΗ

α) Από τα δεδομένα τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΑΖ είναι εφαπτόμενα στον κύκλο από σημείο εκτός αυτού, άρα είναι ίσα, δηλαδή ΑΒ = ΑΖ. Όμοια από το σημείο Γ που είναι εκτός του κύκλου τα ευθύγραμμα τμήματα ΓΒ,ΓΜ είναι εφαπτόμενα σε αυτόν, άρα ΓΒ =ΓΜ

β) Λόγω του ερωτήματος (α) έχουμε ΑΓ = ΑΒ + ΒΓ = ΑΖ + ΜΓ.

Θέμα 4 - Κωδικοί:

1751, 1752

6. Θέμα 1751

Έστω ότι ο κύκλος (Ο, ρ) εφάπτεται των πλευρών του τριγώνου ΡΓΕ στα σημεία Α, Δ και Β.

α) Να αποδείξετε ότι:

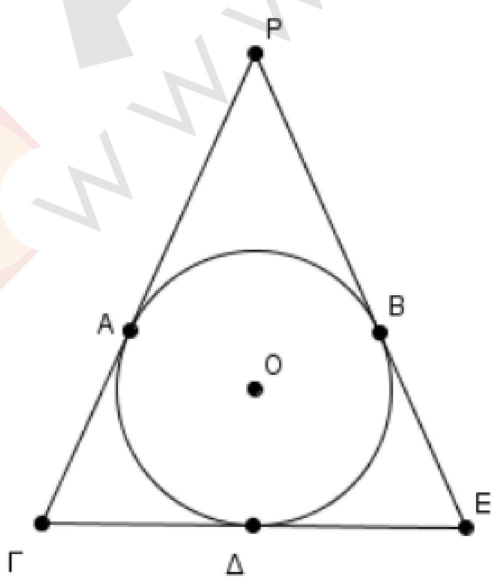
I. $ΡΓ = ΓΔ + ΑΡ$ (Μονάδες 6)

II. $ΡΓ - ΓΔ = ΡΕ - ΔΕ$ (Μονάδες 8)

β) Αν ΑΓ=ΒΕ, να αποδείξετε ότι

I. Το τρίγωνο ΡΓΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

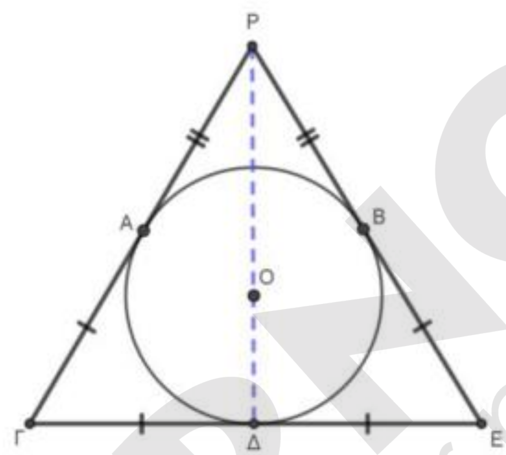
II. Τα σημεία Ρ, Ο και Δ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 5)



ΛΥΣΗ

α) i. Τα ΓΑ, ΓΔ είναι εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από το Γ προς τον κύκλο, οπότε ΓΑ = ΓΔ. Τότε:

ΡΓ = ΡΑ + ΑΓ ή ΡΓ = ΡΑ + ΓΔ.



ii. Τα ΕΒ, ΕΔ είναι εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από το Ε προς τον κύκλο, οπότε ΕΒ = ΕΔ.

Επίσης τα ΡΑ, ΡΒ είναι εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από το Ρ προς τον κύκλο και ισχύει ΡΑ = ΡΒ.

Όμως ΡΓ = ΓΔ + ΡΑ ή ΡΑ = ΡΓ – ΓΔ (1) και ΡΒ = ΡΕ – ΒΕ = ΡΕ – ΔΕ (2).

Οπότε, από (1), (2) βρίσκουμε ΡΓ – ΓΔ = ΡΕ – ΔΕ

β) i. Αν ΑΓ = ΒΕ, τότε ΑΓ = ΓΔ = ΔΕ = ΒΕ.

Είναι ΡΓ = ΓΔ + ΡΑ, ΡΕ = ΡΒ + ΔΕ, οπότε ΡΓ = ΡΕ. Άρα το τρίγωνο ΡΓΕ είναι ισοσκελές.

ii. ΟΔ $\perp$ ΓΔ διότι ΟΔ ακτίνα κύκλου. Επίσης ΡΔ $\perp$ ΓΔ, διότι ΡΔ διάμεσος του ισοσκελούς τριγώνου ΡΓΕ οπότε και ύψος. Άρα ΟΔ και ΡΔ ταυτίζονται επομένως Ρ, Ο και Δ συνευθειακά.

7. Θέμα 1752

Θεωρούμε κύκλο κέντρου Ο και εξωτερικό σημείο του Ρ . Από το Ρ φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήμα ΡΑ και ΡΒ. Η διακεντρική ευθεία ΡΟ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Λ. Η εφαπτόμενη του κύκλου στο Λ τέμνει τα ΡΑ και ΡΒ στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΡΓΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

β) ΓΑ= ΔΒ. (Μονάδες 8)

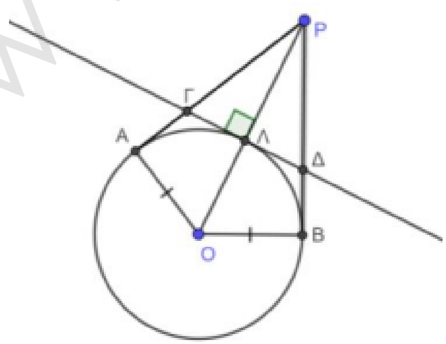
γ) η περίμετρος του τριγώνου ΡΓΔ είναι ίση με ΡΑ + ΡΒ. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Επειδή τα ΡΑ και ΡΒ είναι εφαπτόμενα τμήματα η ΡΟ είναι διχοτόμος της $A\hat{P}B$.

Επίσης ΓΔ⊥ΟΛ, οπότε είναι ΡΟ⊥ΓΔ.

Άρα στο τρίγωνο ΡΓΔ το ΡΛ είναι ύψος και διχοτόμος οπότε είναι ισοσκελές με ΡΓ = ΡΔ.



β) Επειδή τα ΡΑ και ΡΒ είναι εφαπτόμενα τμήματα ισχύει ότι:

ΡΑ = ΡΒ $\Leftrightarrow$ ΡΓ + ΓΑ = ΡΔ + ΔΒ

Οπότε λόγω του ερωτήματος (α) προκύπτει ΓΑ = ΔΒ

γ) Είναι ΓΛ = ΓΑ (1) και ΔΛ = ΔΒ (2) ως εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από τα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Τότε η περίμετρος Π του τριγώνου ΡΓΔ είναι:

Π = ΡΓ + ΓΔ + ΡΔ = ΡΓ + ΓΛ + ΛΔ + ΡΔ

Οπότε λόγω των σχέσεων (1), (2) βρίσκουμε Π = ΡΓ + ΓΑ + ΔΒ + ΡΔ = ΡΑ + ΡΒ