Κεφ. 3.11. - Τράπεζα Θεμάτων 2022 - Γεωμετρία Α’ Λυκείου

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ & ΛΥΣΕΙΣ

Η Τράπεζα Θεμάτων για τη Γεωμετρία Α’ Λυκείου είναι μία μεγάλη «θάλασσα». Εμείς όμως έχουμε φροντίσει για εσένα, συγκεντρώνοντας εκείνα τα θέματα που αποτελούν τη «βάση» της γνώσης και για τα υπόλοιπα. Μελετώντας και κατανοώντας το μοτίβο σκέψης για τα συγκεκριμένα, μπορείς να λύσεις με επιτυχία και τα υπόλοιπα θέματα. Στην ιστοσελίδα μας www.arnos.gr για το Course της Γεωμετρίας, μελετάς και προετοιμάζεσαι με την αναλυτική διδασκαλία σε ασκήσεις και θέματα, στο ύφος της Τράπεζας.

Θέμα 2 - Κωδικοί:

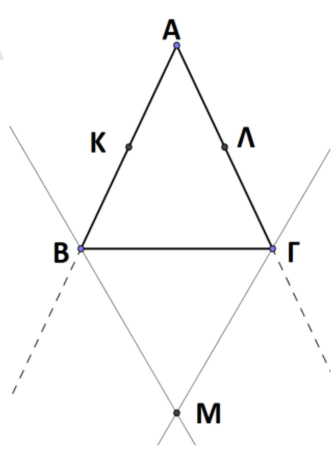
1553, 1558, 1568, 1578, 1585, 1658

1. Θέμα 1553

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών Β και Γ τέμνονται στο σημείο Μ και Κ, Λ είναι αντίστοιχα τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ.

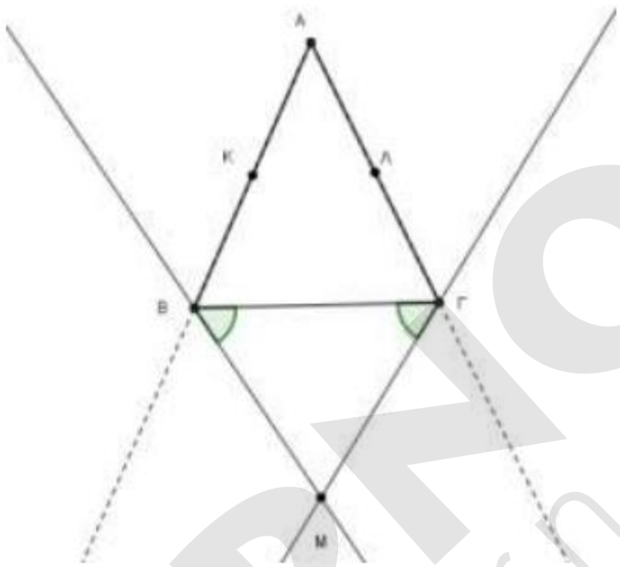
α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΒΜΓ είναι ισοσκελές με ΜΒ=ΜΓ. (Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι ΜΚ=ΜΛ. (Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ

α)



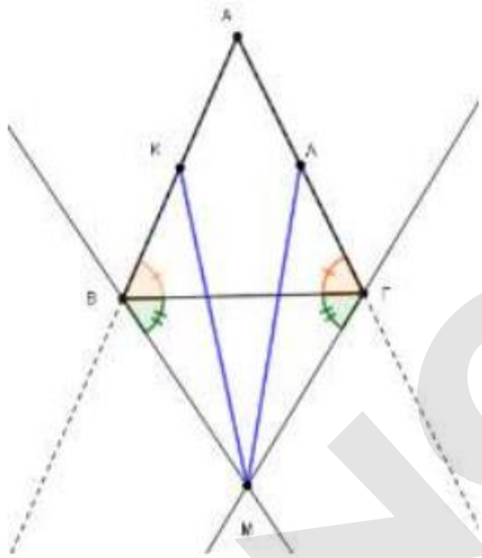
Αφού το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές άρα οι προσκείμενες στη βάση του ΒΓ γωνίες θα είναι ίσες, δηλαδή $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.

Επειδή οι ΒΜ και ΓΜ είναι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ αντίστοιχα, έχουμε: $M\hat{B}\Gamma = \frac{\hat{B}_{\varepsilon\xi}}{2} = \frac{180^o - \hat{B}}{2} = \frac{180^o - \hat{\Gamma}}{2} = \frac{\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}}{2} = M\hat{\Gamma}B$

Οπότε, το τρίγωνο ΜΓΒ έχει δύο γωνίες του που πρόσκεινται στην πλευρά ΒΓ ίσες.

Άρα το τρίγωνο ΜΓΒ είναι ισοσκελές με βάση την ΒΓ, οπότε ΜΒ = ΜΓ.

β)



Τα τρίγωνα ΚΒΜ και ΛΓΜ έχουν:

- ΚΒ = ΛΓ, ως μισά των ίσων πλευρών ΑΒ και ΑΓ
- $K\hat{B}M = \hat{B} + M\hat{B}\Gamma = \hat{\Gamma} + M\hat{\Gamma}B = \Lambda\hat{\Gamma}M$, αφού $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ ως γωνίες παρά τη βάση ΒΓ του ισοσκελούς τρίγωνου ΑΒΓ.
- ΜΒ = ΜΓ από α) ερώτημα

Από το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΚΒΜ και ΛΓΜ είναι ίσα, οπότε θα είναι ΜΚ = ΜΛ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $K\hat{B}M$ και $\Lambda\hat{\Gamma}M$ των δύο ίσων τριγώνων.

2. Θέμα 1558

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και Ι το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΒΙΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

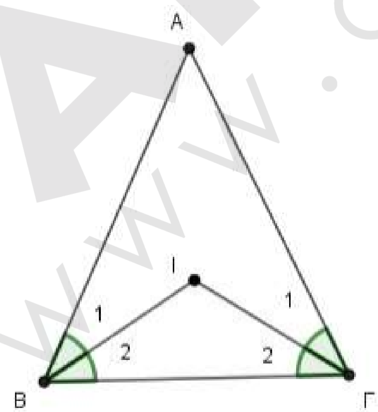
β) Οι γωνίες $A\hat{I}\Gamma$ και $A\hat{I}B$ είναι ίσες. (Μονάδες 10)

γ) Η ευθεία ΑΙ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΒΓ. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και Ι το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών του Β και Γ.

α)



Αφού είναι ΒΙ διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ και ΓΙ διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$ τότε θα είναι

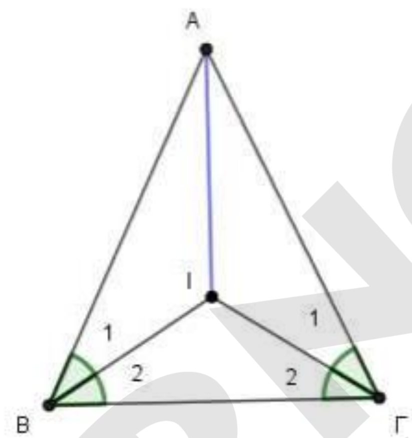
$\hat{B}_2 = \frac{\hat{B}}{2}$ (1) και $\hat{\Gamma}_2 = \frac{\hat{\Gamma}}{2}$ (2), αντίστοιχα.

Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΓ οι προσκείμενες στη βάση του γωνίες είναι ίσες, δηλαδή $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (3)

Λόγω των σχέσεων (1), (2) και (3) θα είναι: $\hat{B}_2 = \frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{\Gamma}}{2} = \hat{\Gamma}_2$

Άρα, το τρίγωνο ΒΙΓ έχει δύο γωνίες που πρόσκεινται στην πλευρά του ΒΓ ίσες, τις $\hat{B}_2$ και $\hat{\Gamma}_2$, οπότε θα είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά του ΒΓ.

β) Φέρνουμε το τμήμα ΑΙ.

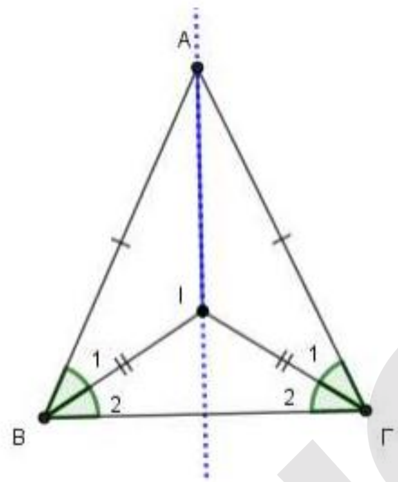


Τα τρίγωνα ΑΙΒ και ΑΙΓ έχουν:

- ΑΒ = ΑΓ ως πλευρές του ισοσκελούς ΑΒΓ της υπόθεσης.
- ΒΙ = ΙΓ, ως ίσες πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου ΒΙΓ του α) ερωτήματος.
- $\hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{\Gamma}}{2} = \hat{\Gamma}_1$ αφού ΒΙ και ΓΙ είναι διχοτόμοι των ίσων γωνιών της βάσης ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΒΙΓ του α) ερωτήματος.

Από το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΑΙΒ και ΑΙΓ θα είναι ίσα, οπότε έχουν και $A\hat{I}B = A\hat{I}\Gamma$ ως γωνίες απέναντι από ίσες πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

γ)



Επειδή ΑΒ = ΑΓ από υπόθεση και ΒΙ = ΙΓ από α) ερώτημα, τα σημεία Ι και Α ισαπέχουν από τα Β και Γ άρα είναι σημεία της μεσοκαθέτου του τμήματος ΒΓ.

Άρα η ΑΙ είναι μεσοκάθετος του ΒΓ.

3. Θέμα 1568

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ που αντιστοιχούν στις πλευρές του ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι :

α) Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ=ΑΓ, τότε τα ύψη ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα.

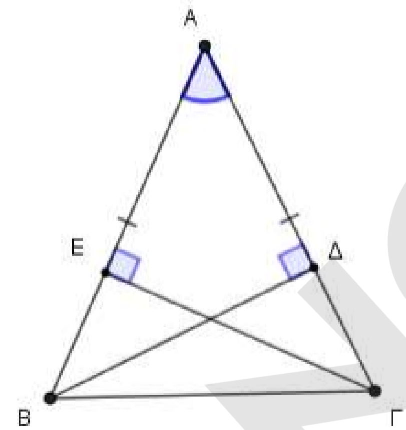
(Μονάδες 12)

β) Αν τα ύψη ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα, τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΓ=ΑΒ.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και ΒΔ, ΓΕ τα ύψη του στις πλευρές ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα.

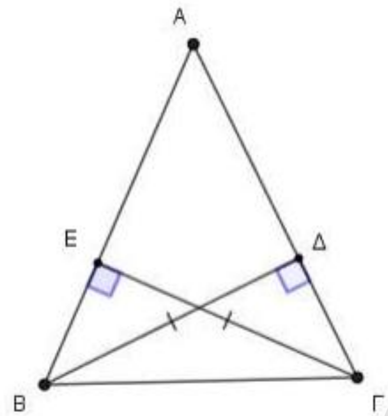


Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΕΓ έχουν:

- $A\hat{\Delta}B = A\hat{E}\Gamma = 90^0$, γιατί ΒΔ και ΓΕ ύψη του τριγώνου ΑΒΓ από υπόθεση.
- ΑΒ=ΑΓ ως πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.
- $\hat{A}$ γωνία κοινή

Άρα τα τρίγωνα ΒΔΑ και ΓΕΑ είναι ίσα ως ορθογώνια που έχουν τις υποτείνουσές τους ίσες και μια οξεία γωνία ίση. Οπότε θα έχουν και τις πλευρές ΒΔ και ΕΓ ίσες που βρίσκονται απέναντι από την κοινή τους γωνία $\hat{A}$.

β) Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ΒΔ, ΓΕ ύψη του στις πλευρές ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα τα οποία είναι ίσα.



Τα τρίγωνα ΒΕΓ και ΒΔΓ έχουν:

- $B\hat{E}\Gamma = B\hat{\Delta}\Gamma = 90^0$, γιατί ΓΕ και ΒΔ ύψη του τριγώνου ΑΒΓ από υπόθεση.
- ΒΓ κοινή πλευρά
- ΒΔ = ΓΕ ως δεδομένο

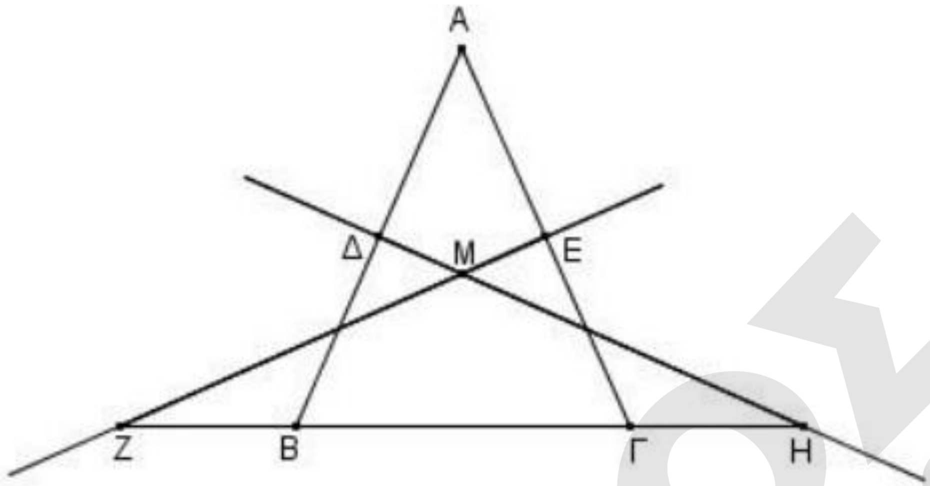
Άρα τα τρίγωνα ΒΕΓ και ΒΔΓ είναι ίσα, ως ορθογώνια που έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία. Οπότε, έχουν και $\hat{\Gamma} = \hat{B}$ (1) ως απέναντι γωνίες των ίσων πλευρών ΒΔ και ΓΕ, αντίστοιχα. Οπότε, το τρίγωνο ΑΒΓ έχει δύο γωνίες του ίσες, τις $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$, άρα είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ.

4. Θέμα 1578

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Οι μεσοκάθετες ευθείες των ίσων πλευρών του τέμνονται στο Μ και προεκτεινόμενες τέμνουν τη βάση ΒΓ στα Ζ και Η.

α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔΒΗ και ΕΖΓ. (Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΖΗ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)



ΛΥΣΗ

α) Τα τρίγωνα ΔΒΗ και ΕΖΓ είναι ορθογώνια και έχουν:

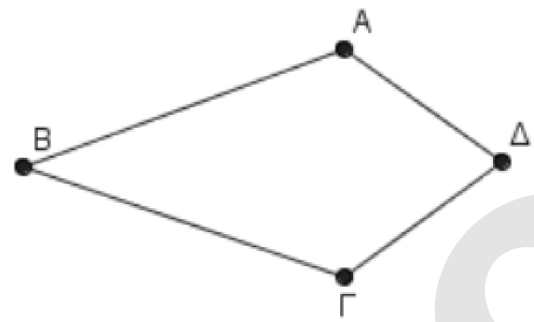
- ΔΒ = ΕΓ ως μισά των ίσων πλευρών ΑΒ και ΑΓ
- $\widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\Gamma}$, ως γωνίες βάσης του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

Επομένως, τα τρίγωνα έχουν μία κάθετη πλευρά και μία οξεία γωνία ίσες μία προς μία, άρα είναι ίσα.

β) Επειδή τα τρίγωνα ΔΒΗ και ΕΓΖ είναι ίσα, όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους θα είναι ίσα, άρα και $\widehat{\mathrm{Z}} = \widehat{\mathrm{H}}$. Επειδή το τρίγωνο ΜΖΗ έχει δύο γωνίες ίσες, είναι ισοσκελές.

5. Θέμα 1585

Έστω κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ με ΒΑ = ΒΓ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$.



Να αποδείξτε ότι:

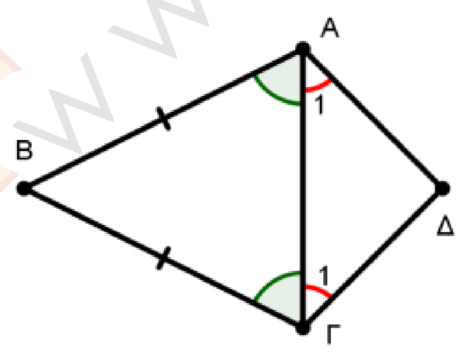
α) $B\hat{A}\Gamma = B\hat{\Gamma}A$. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

γ) Η ευθεία ΒΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΓ. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Είναι ΒΑ = ΒΓ οπότε το τρίγωνο ΒΑΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΓ. Άρα $B\hat{A}\Gamma = B\hat{\Gamma}A$.

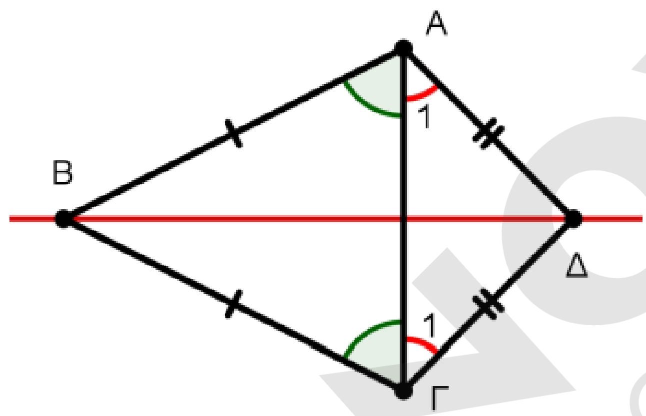


β) Επειδή $B\hat{A}\Delta = B\hat{\Gamma}\Delta$ και $B\hat{A}\Gamma = B\hat{\Gamma}A$, είναι και

$B\hat{A}\Delta - B\hat{A}\Gamma = B\hat{\Gamma}\Delta - B\hat{\Gamma}A$, οπότε $\hat{A}_1 = \hat{\Delta}_1$.

Άρα το τρίγωνο ΔΑΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΓ και είναι ΔΑ = ΔΓ (1).

γ) Επειδή ΒΑ = ΒΓ και ΔΑ = ΔΓ, τα σημεία Β, Δ ισαπέχουν από τα Α, Γ. Άρα η ΒΔ είναι μεσοκάθετος του ΑΓ.



6. Θέμα 1658

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή και από το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ φέρουμε τα κάθετα τμήματα ΜΔ και ΜΕ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

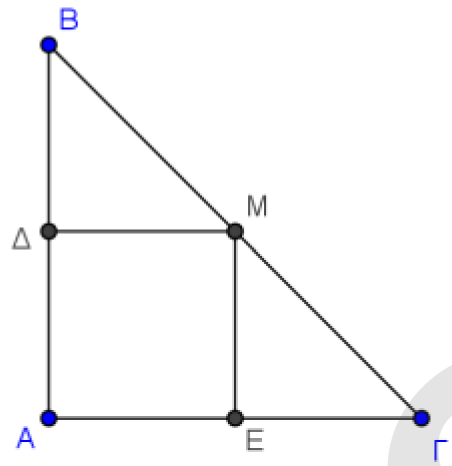
Να αποδείξετε ότι:

α) Αν ΜΔ = ΜΕ τότε:

i. τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ είναι ίσα. (Μονάδες 8)

ii. το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

β) Αν ΑΒ = ΑΓ τότε ΜΔ = ΜΕ. (Μονάδες 8)

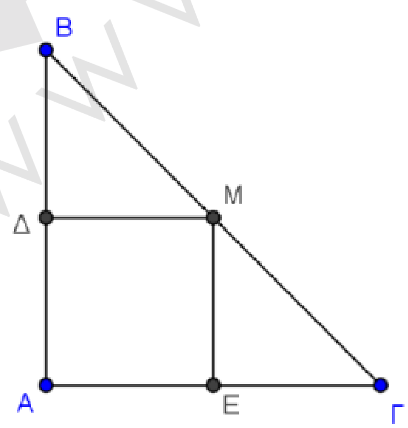


ΛΥΣΗ

α) i. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ έχουν:

- ΜΔ = ΜΕ
- ΜΒ = ΜΓ, διότι Μ μέσο της ΒΓ.

Άρα τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ είναι ίσα.



ii. Από τα ίσα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ προκύπτει ότι $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$, διότι είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές ΜΔ και ΜΕ. Άρα ΑΒΓ ισοσκελές τρίγωνο.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ έχουν:

ΜΒ = ΜΓ, διότι Μ μέσο της ΒΓ

$\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$, ως προσκείμενες στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

Άρα τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ είναι ίσα, οπότε ισχύει ΜΔ = ΜΕ ως απέναντι πλευρές στις ίσες γωνίες $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$.

Θέμα 3 - Κωδικοί:
12069

7. Θέμα 12069

Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) παίρνουμε στην πλευρά ΑΒ σημείο Δ, ώστε ΔΒ = 2ΑΔ, και στην πλευρά ΑΓ σημείο Ε, ώστε ΕΓ= 2ΑΕ. Το Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τμήματα ΔΒ και ΕΓ είναι ίσα. (Μονάδες 6)

ii. Το τρίγωνο ΜΔΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

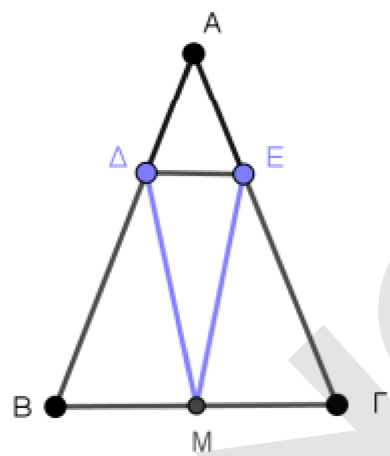
β) Αν Ρ το σημείο τομής των τμημάτων ΒΕ και ΓΔ να δείξετε ότι:

i. Οι γωνίες $\Gamma\widehat{B}E$ και $B\widehat{\Gamma}\Delta$ είναι ίσες. (Μονάδες 6)

ii. Το τμήμα ΡΜ διχοτομεί τη γωνία $B\widehat{P}\Gamma$. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και Μ το μέσο της πλευράς του ΒΓ.



i. Στην πλευρά ΑΔ θεωρούμε σημείο Δ, τέτοιο ώστε ΔΒ = 2 ΑΔ. Το σημείο Δ χωρίζει την πλευρά ΑΒ σε δυο τμήματα, από τα οποία το ένα είναι διπλάσιο του άλλου. Συνεπώς το τμήμα ΑΔ είναι ίσο με $\frac{1}{3}$ της ΑΒ. Αντίστοιχα και στην πλευρά ΑΓ ισχύει ότι το ΑΕ είναι ίσο με $\frac{1}{3}$ της ΑΓ. Για τα τμήματα ΔΒ και ΕΓ ισχύει ότι ΔΒ = $\frac{2}{3}$ ΑΒ και ΕΓ $= \frac{2}{3}$ ΑΓ, και αφού ΑΒ = ΑΓ θα ισχύει και ότι ΔΒ = ΕΓ.

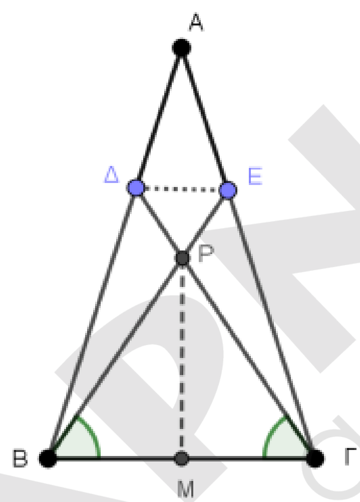
ii. Συγκρίνω τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ. Έχουν:

- ΒΜ = ΜΓ αφού το Μ είναι μέσο της ΒΓ
- ΔΒ = ΕΓ όπως αποδείξαμε στο ερώτημα α)
- $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ επειδή είναι οι προσκείμενες γωνίες στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

Τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ έχουν τις δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία τους ίση, οπότε είναι ίσα. Συνεπώς οι πλευρές τους ΜΔ και ΜΕ θα είναι ίσες αφού είναι οι τρίτες πλευρές απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$.

Στο τρίγωνο ΜΔΕ οι δυο πλευρές του είναι ίσες , οπότε αυτό είναι ισοσκελές.

β) Φέρω τα τμήματα ΒΕ και ΓΔ και έστω Ρ το σημείο τομής τους.



i. Συγκρίνω τα τρίγωνα ΓΒΕ και ΒΓΔ. Έχουν:

- ΕΓ = ΔΒ από το ερώτημα α)
- ΒΓ κοινή πλευρά
- Ε$\widehat{\Gamma}$Β = Δ$\widehat{B}$Γ ως προσκείμενες στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

Από το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε οι γωνίες Γ$\widehat{B}$Ε και Β$\widehat{\Gamma}$Δ που είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές ΕΓ και ΔΒ, είναι ίσες.

ii. Στο τρίγωνο ΡΒΓ οι δύο γωνίες του Γ$\widehat{B}$Ρ και Β$\widehat{\Gamma}$Ρ είναι ίσες, από το προηγούμενο ερώτημα, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΓ. Το ΡΜ είναι διάμεσος προς τη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΡΒΓ οπότε είναι και διχοτόμος της γωνίας Β$\widehat{P}$Γ.

Θέμα 4 - Κωδικοί:

1725, 1846, 1875

8. Θέμα 1725

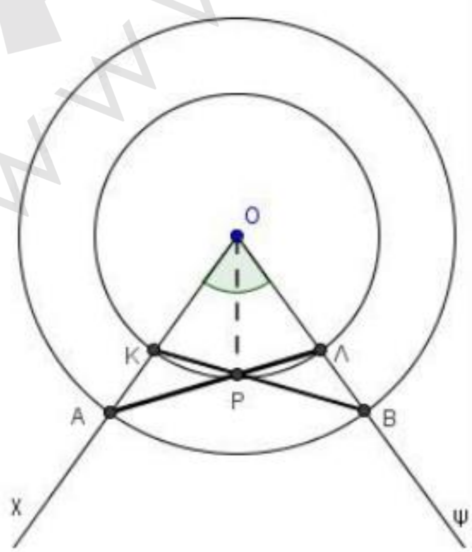
Δίνεται οξεία γωνία $x\hat{O}y$ και δύο ομόκεντροι κύκλοι (Ο, ρ_1) και (Ο, ρ_2) με $\rho_1 < \rho_2$, που τέμνουν την Οχ στα σημεία Κ, Α και την Οψ στα Λ, Β αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΛ = ΒΚ. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΑΡΒ είναι ισοσκελές, όπου Ρ το σημείο τομής των ΑΛ και ΒΚ. (Μονάδες 8)

γ) Η ΟΡ διχοτομεί την $x\hat{O}y$. (Μονάδες 9)



ΛΥΣΗ

α) Τα τρίγωνα ΑΟΛ και ΒΟΚ έχουν:

- ΟΑ = ΟΒ = ρ_2
- ΟΚ = ΟΛ = ρ_1
- $\hat{O}$ κοινή γωνία

Από το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΑΟΛ και ΒΟΚ είναι ίσα. Άρα θα έχουν ίσες και τις τρίτες πλευρές τους, δηλαδή ΑΛ = ΒΚ.

β) Επειδή ΟΑ = ΟΒ , το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές, οπότε $O\hat{A}B = O\hat{B}A$ γωνίες της βάσης ισοσκελούς τριγώνου (1).

Επίσης $O\hat{A}\Lambda = O\hat{B}K$ (από την ισότητα των τριγώνων ΑΟΛ και ΒΟΚ) (2).

$O\hat{A}B - O\hat{A}\Lambda = O\hat{B}A - O\hat{B}K \Rightarrow P\hat{A}B = P\hat{B}A$ (ίσες ως διαφορές ίσων γωνιών). Άρα το τρίγωνο ΡΑΒ έχει δύο γωνίες ίσες οπότε είναι ισοσκελές με βάση την ΑΒ και ίσες πλευρές τις ΡΑ και ΡΒ.

γ) Τα τρίγωνα ΟΡΑ και ΟΡΒ έχουν:

- ΟΑ = ΟΒ= ρ_2
- ΟΡ κοινή πλευρά
- ΡΑ = ΡΒ (ΑΡΒ ισοσκελές τρίγωνο, β) ερώτημα)

Από το κριτήριο ΠΠΠ τα τρίγωνα ΟΡΑ και ΟΡΒ είναι ίσα. Άρα θα έχουν ίσες και τις γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΡΑ και ΡΒ αντίστοιχα. Δηλαδή $A\hat{O}P = B\hat{O}P$, επομένως η ΟΡ είναι διχοτόμος της γωνίας $x\hat{O}y$.

9. Θέμα 1846

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$. Στην προέκταση της ΑΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Ε έτσι ώστε ΑΕ=ΑΓ. Στην πλευρά ΑΓ θεωρούμε σημείο Δ έτσι ώστε $A\Delta = AB$. Αν τα τμήματα ΔΕ και ΒΓ τέμνονται στο Κ και η προέκταση της ΑΚ τέμνει την ΕΓ στο Μ.

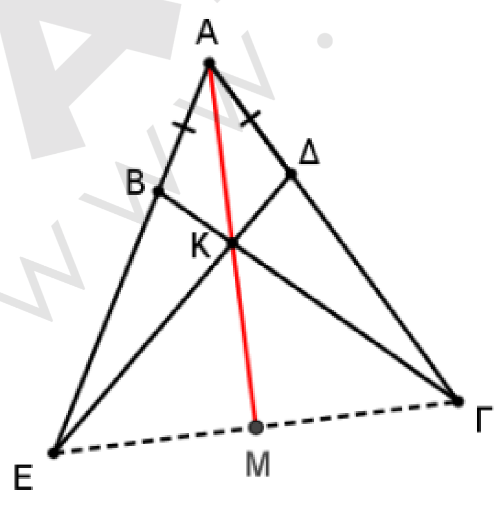
Να αποδείξετε ότι:

α) $B\Gamma = \Delta E$ (Μονάδες 6)

β) $BK = K\Delta$ (Μονάδες 7)

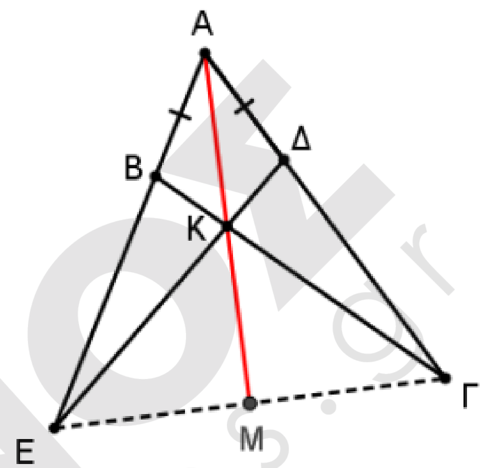
γ) Η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας Α. (Μονάδες 6)

δ) Η ΑΜ είναι μεσοκάθετος της ΕΓ. (Μονάδες 6)



ΛΥΣΗ

α) Τα τρίγωνα ΒΕΓ και ΔΕΓ έχουν:



- ΕΓ κοινή
- ΒΕ = ΔΓ ως διαφορά των ίσων τμημάτων ΑΕ, ΑΒ και ΑΓ, ΑΔ αντίστοιχα
- ΑΕ̂Γ = ΑΓ̂Ε, αφού ΕΑΓ ισοσκελές τρίγωνο

Από το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα ΒΕΓ και ΔΕΓ είναι ίσα οπότε έχουν και ΒΓ=ΔΕ αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες ΑΕ̂Γ και ΑΓ̂Ε.

β) Επειδή τα τρίγωνα ΒΕΓ και ΔΕΓ είναι ίσα προκύπτει ότι ΔΕ̂Γ = ΔΓ̂Ε οπότε το τρίγωνο ΚΕΛ είναι ισοσκελές, άρα ΕΚ= ΚΓ (1)

Τα τρίγωνα ΒΕΚ και ΔΚΓ έχουν:

- ΕΚ=ΚΓ, λόγω της (1)
- ΒΕ=ΔΓ, ως διαφορές των ίσων τμημάτων ΑΕ, ΑΒ και ΑΓ, ΑΔ αντίστοιχα
- ΒΕ̂Κ = ΔΓ̂Κ ως διαφορές των ίσων γωνιών ΒΕ̂Γ, ΚΕ̂Γ και ΔΓ̂Ε, ΚΓ̂Ε αντίστοιχα

Από το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα ΒΕΚ και ΔΚΓ είναι ίσα, οπότε ισχύει και ΒΚ=ΚΔ ως απέναντι από τις ίσες πλευρές ΒΕ και ΓΔ.

γ) Τα τρίγωνα ΑΒΚ και ΑΚΔ είναι ίσα γιατί ΒΚ=ΚΔ από το (β) ερώτημα, ΑΚ κοινή και ΑΒ=ΑΔ.

Επομένως ΒΑ̂Κ = ΚΑ̂Δ, οπότε η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας Â.

δ) Επειδή το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισοσκελές και η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας Â , θα είναι διάμεσος και ύψος, άρα η ΑΜ είναι μεσοκάθετος της ΕΓ.

10. Θέμα 1875

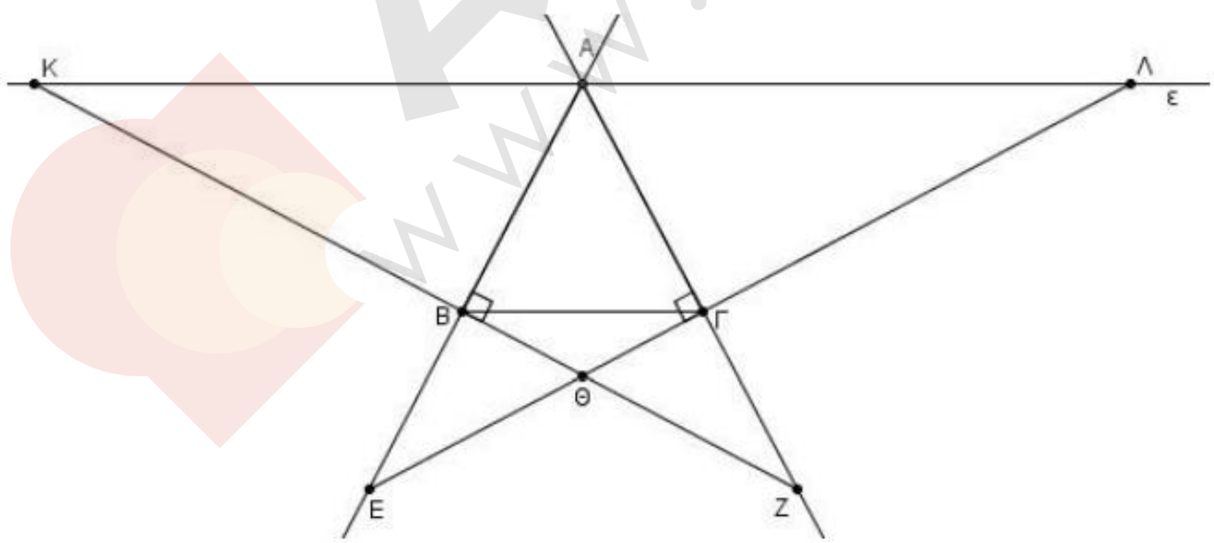
Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ), και την ευθεία ε της εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας Α. Η κάθετη στην πλευρά ΑΒ στο Β τέμνει την ε στο Κ και την ευθεία ΑΓ στο Ζ. Η κάθετη στην πλευρά ΑΓ στο Γ τέμνει την ε στο Λ και την ευθεία ΑΒ στο Ε.

α) Να αποδείξετε ότι:

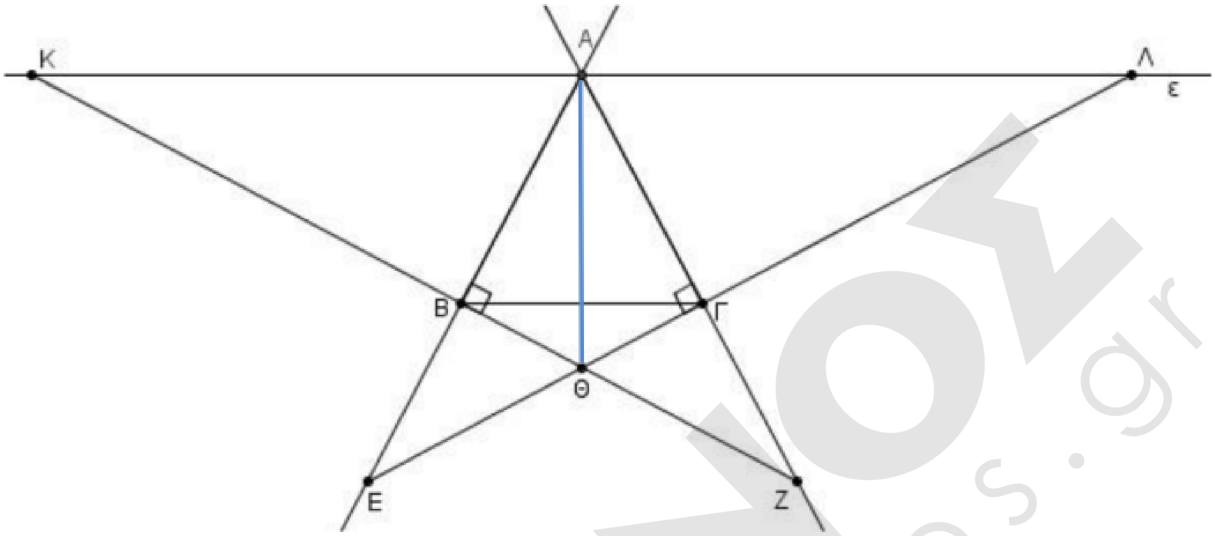
i. ΑΖ=ΑΕ (Μονάδες 8)

ii. ΑΚ=ΑΛ (Μονάδες 9)

β) Ένας μαθητής κοιτώντας το σχήμα, διατύπωσε την άποψη ότι η ΑΘ είναι διχοτόμος της γωνίας Α του τριγώνου ΑΒΓ, όπου Θ το σημείο τομής των ΚΖ και ΕΛ. Συμφωνείτε με την παραπάνω σκέψη του μαθητή ή όχι; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ



α) i. Τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΑΓΕ:

- Είναι ορθογώνια, γιατί ΑΒ ⊥ ΚΖ και ΑΓ ⊥ ΕΛ.
- Έχουν την $\widehat{A}$ κοινή γωνία.
- Έχουν ΑΒ = ΑΓ, γιατί το ΑΒΓ είναι ισοσκελές τρίγωνο.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, ως ορθογώνια που έχουν μία κάθετη πλευρά και μία οξεία γωνία, μία προς μία ίσες. Άρα ισχύει ΑΕ = ΑΖ (ίσες υποτείνουσες).

ii. Τα τρίγωνα ΑΒΚ και ΑΓΛ:

- Είναι ορθογώνια, γιατί ΑΒ ⊥ ΚΖ και ΑΓ ⊥ ΕΛ.
- ΑΒ = ΑΓ, γιατί το ΑΒΓ είναι ισοσκελές τρίγωνο.
- $B\widehat{A}K = \Gamma\widehat{A}\Lambda$, γιατί η (ε) είναι εξωτερική διχοτόμος της $\widehat{A}$, άρα $B\widehat{A}K = \Gamma\widehat{A}\Lambda = \frac{\widehat{A_{\varepsilon\xi}}}{2}$.

Άρα τα τρίγωνα ΕΑΛ και ΚΑΖ είναι ίσα, ως ορθογώνια που έχουν μία κάθετη πλευρά και μία οξεία γωνία, μία προς μία ίσες. Οπότε και ΑΚ = ΑΛ (οι υποτείνουσές τους).

β) Από την προηγούμενη ισότητα τριγώνων, προκύπτει ότι $\widehat{K} = \widehat{\Lambda}$ (ως απέναντι γωνίες από τις ίσες κάθετες πλευρές ΑΒ και ΑΓ) οπότε το τρίγωνο ΘΚΛ είναι ισοσκελές με ΘΚ = ΘΛ. Επίσης, ΒΚ = ΓΛ.

Άρα ΘΚ – ΒΚ = ΘΛ – ΓΛ ή ΒΘ = ΘΓ.

Επειδή τα ίσα ευθύγραμμα τμήματα ΒΘ, ΘΓ είναι οι αποστάσεις του Θ από τις πλευρές της γωνίας $\widehat{A}$, το Θ ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $\widehat{A}$. Επομένως η ΑΘ είναι διχοτόμος της $\widehat{A}$.