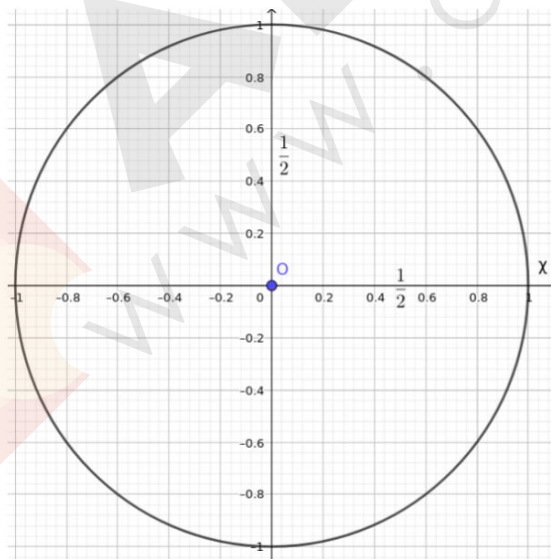


**Κεφ. 3.5. - Τράπεζα Θεμάτων 2022 - Άλγεβρα Β' Λυκείου**
**ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ**
**Θέμα 2 – Κωδικοί:**
**14977, 15036, 15969, 21995**

Η Τράπεζα Θεμάτων για την Άλγεβρα Β' Λυκείου είναι μία μεγάλη «θάλασσα». Εμείς όμως έχουμε φροντίσει για εσένα, συγκεντρώνοντας εκείνα τα θέματα που αποτελούν τη «βάση» της γνώσης και για τα υπόλοιπα. Μελετώντας και κατανοώντας το μοτίβο σκέψης για τα συγκεκριμένα, μπορείς να λύσεις με επιτυχία και τα υπόλοιπα θέματα. Στην ιστοσελίδα μας [www.arnos.gr](http://www.arnos.gr) για το Course της Άλγεβρας, μελετάς και προετοιμάζεσαι με την αναλυτική διδασκαλία σε ασκήσεις και θέματα, στο ύψος της Τράπεζας.

**1. Θέμα 14977**

- α) Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο να σημειώσετε τις τελικές πλευρές δύο γωνιών που ανήκουν στο διάστημα  $[0, 2\pi)$ , με αρχική πλευρά την ημιευθεία  $Ox$ , οι οποίες να έχουν ημίτονο ίσο με  $\frac{1}{2}$  και άλλες δύο οι οποίες να έχουν συνημίτονο ίσο με  $\frac{1}{2}$ .



(Μονάδες 12)

**Έξυπνα & Εύκολα!**

β) Να λύσετε την εξίσωση  $\eta\mu x = \frac{1}{2}$  για  $x \in \mathbb{R}$ .

(Μονάδες 13)

**2. Θέμα 15036 Αρχέτυπο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 3\sigma\upsilon\nu 2x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

α)

i. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης  $f$ .

(Μονάδες 10)

ii. Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης  $f$ .

(Μονάδες 5)

β) Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = -3$  στο  $\mathbb{R}$ .

(Μονάδες 10)

**3. Θέμα 15969 Αρχέτυπο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu(13\pi + x) - 2\eta\mu(\frac{\pi}{2} - x)$ .

α) Να δείξετε ότι  $\sigma\upsilon\nu(13\pi + x) = -\sigma\upsilon\nu x$ .

(Μονάδες 5)

β) Να δείξετε ότι  $f(x) = -4\sigma\upsilon\nu x$ .

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = -2$ .

(Μονάδες 12)

**Έξυπνα & Εύκολα!**

**4. Θέμα 21995 Αρχέτυπο**

Πόσες και ποιες λύσεις έχει η εξίσωση  $\eta \mu x = \alpha$  στο διάστημα  $[-2\pi, 2\pi]$  όταν:

α)  $\alpha = 1$ .

(Μονάδες 13)

β)  $\alpha = -2$ .

(Μονάδες 12)

Να αιτιολογήσετε γραφικά, ή όπως αλλιώς θέλετε, την απάντησή σας σε κάθε ένα από τα παραπάνω ερωτήματα.

**Θέμα 4 – Κωδικοί:**

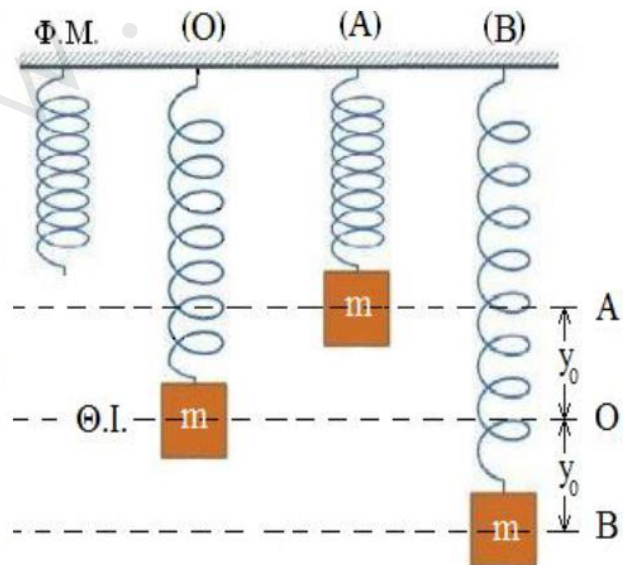
**14975, 15003, 15014, 15026, 15049, 15050, 15287,**

**15288, 15289, 15347, 15821, 20645, 20712, 21244**

**5. Θέμα 14975 Αρχέτυπο**

Ένα ελατήριο με φυσικό μήκος ( $\Phi.M.$ ) κρέμεται από το ταβάνι. Τοποθετείται στο ελατήριο ένα σώμα μάζας  $m$  και ισορροπεί στη θέση  $O$  ( $\Theta.I.$  – Θέση Ισορροπίας), απέχοντας από το πάτωμα απόσταση ίση με 1 μέτρο.

Το σώμα ανεβοκατεβαίνει, ξεκινώντας από τη θέση  $O$ , εκτελώντας ταλάντωση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων  $A$  και  $B$ , οι οποίες απέχουν μεταξύ τους σταθερή απόσταση ίση με  $2y_0$ .



**Έξυπνα & Εύκολα!**

Η απόσταση του σώματος (σε μέτρα) από το πάτωμα, ως συνάρτηση του χρόνου (σε δευτερόλεπτα), είναι:

$$y(t) = 1 + 0,2 \cdot \eta\mu \frac{\pi}{2} t$$

α) Να βρείτε το  $y_0$  και στη συνέχεια την απόσταση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων A και B της ταλάντωσης.

(Μονάδες 06)

β) Να βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης.

(Μονάδες 06)

γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για  $t \in [0, 4]$ .

(Μονάδες 06)

δ) Να βρείτε ποιες χρονικές στιγμές, η απόσταση του σώματος από το πάτωμα θα είναι ίση με 1, 1 μέτρα, για  $t \in [0, 2]$ .

(Μονάδες 07)

### 6. Θέμα 15003 Αρχέτυπο

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \eta\mu ax \cdot \left[ \sigma\upsilon\nu \left( \frac{\pi}{2} - ax \right) + 2 \right] - \sigma\upsilon\nu ax \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi - ax) - 1, \text{ με } a \in \mathbb{R}.$$

α)

i. Να δείξετε ότι  $f(x) = 2 \cdot \eta\mu ax$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

(Μονάδες 10)

ii. Δίνεται επιπλέον ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  είναι αυτή που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να δείξετε ότι  $a = 2$ .

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  με την ευθεία  $\varepsilon: y = 1$  για  $x \in [0, \pi]$ .

(Μονάδες 9)

**Έξυπνα & Εύκολα!**

**7. Θέμα 15014**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \alpha \cdot \eta\mu\beta x$ , με  $\alpha, \beta$  ακέραιους θετικούς αριθμούς.

α) Να βρείτε την τιμή του  $\alpha$ , αν η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι 2.

(Μονάδες 6)

β) Αν  $\alpha = 2$ , να δείξετε ότι η μικρότερη τιμή του  $\beta$  για την οποία είναι  $f\left(\frac{\pi}{16}\right) = 2$  είναι  $\beta = 8$ .

(Μονάδες 10)

γ) Αν  $\alpha = 2$  και  $\beta = 8$ , να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 1$  στο διάστημα  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

(Μονάδες 9)

**8. Θέμα 15026 Αρχέτυπο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 1 + 2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

α) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης  $f$ .

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης  $f$ .

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων στα οποία η γραφική παράσταση της  $f$  τέμνει τον άξονα  $xx'$ .

(Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι  $(f(x) - 1)^2 + (f(1 - x) - 1)^2 = 4$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

(Μονάδες 7)

**Έξυπνα & Εύκολα!**

**9. Θέμα 15049 Αρχέτυπο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \eta\mu(\pi + x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι  $f(x) = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$ .

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι  $-2 \leq f(x) \leq 2$ . Κατόπιν να εξετάσετε αν ο αριθμός 2 είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε:

i. Το σημείο τομής της γραφικής παράστασης  $C_f$  της  $f$  με τον άξονα  $y'y$ .

(Μονάδες 3)

ii. Δυο σημεία τομής της  $C_f$  με τον  $x'x$ .

(Μονάδες 6)

**10. Θέμα 15050**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε δυο κοινά σημεία της γραφικής παράστασης  $C_f$  της  $f$  με την ευθεία  $y = 1$ .

(Μονάδες 5)

γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς  $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$  και  $f\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ .

(Μονάδες 6)

δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση, στο διάστημα  $[0, 2\pi]$ .

(Μονάδες 6)

**Έξυπνα & Εύκολα!**

**11. Θέμα 15287 Αρχέτυπο**

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η ευθεία  $y = ax$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \rho \eta\mu(\omega x)$ , όπου  $\omega > 0$ ,  $\rho > 0$  και  $x \in \mathbb{R}$ . Με βάση το σχήμα,

α) Να δείξετε ότι  $\rho = 3$  και  $\omega = 2$ .

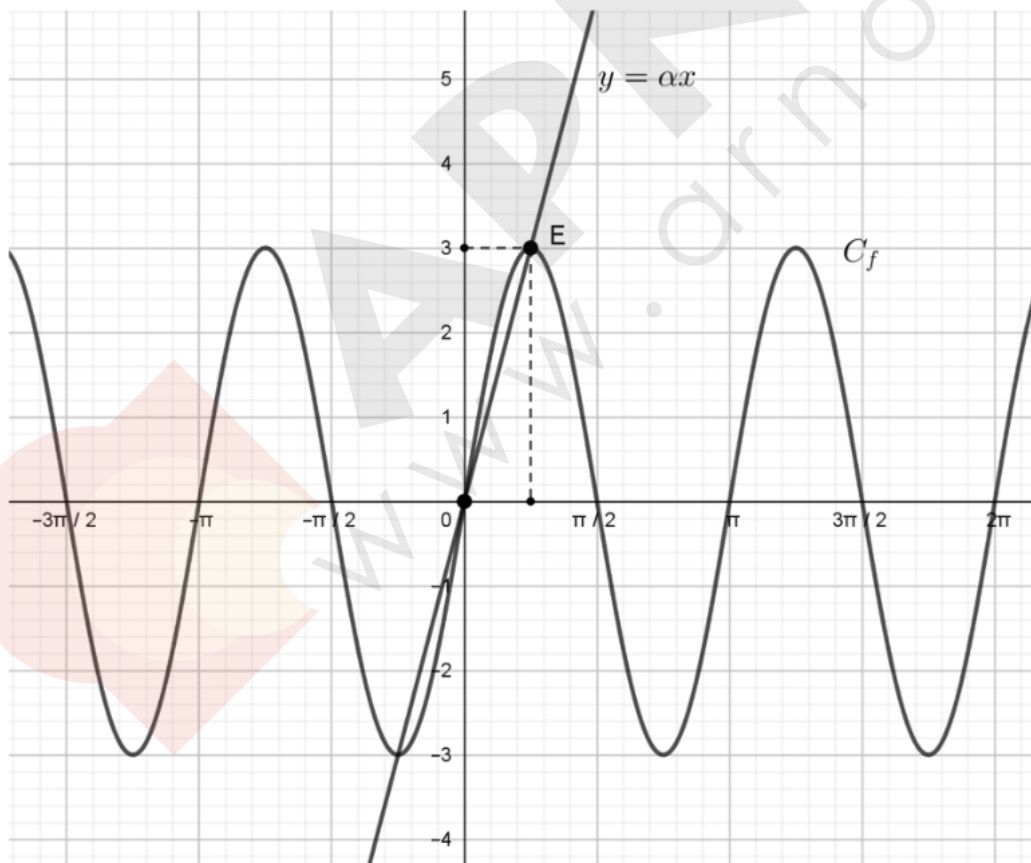
(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό  $a$ .

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης  $3\eta\mu(2x) - \frac{12}{\pi}x = 0$ .

(Μονάδες 10)



**Έξυπνα & Εύκολα!**

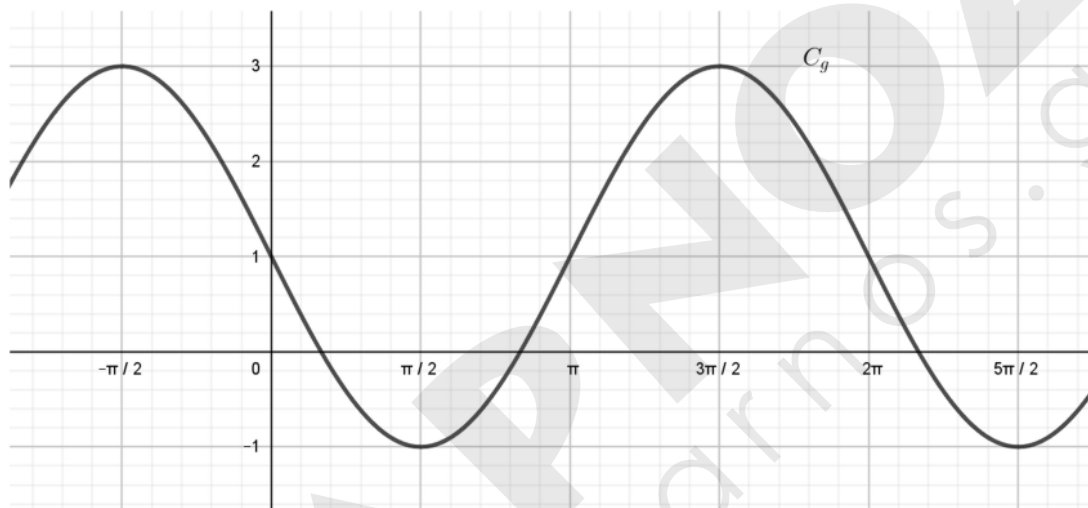
**12. Θέμα 15288**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2\eta\mu 3x + 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

α) Να βρείτε την περίοδο  $T$ , τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της  $f$ .

(Μονάδες 3)

β) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g(x) = \alpha\eta\mu\beta x + \gamma$ , με  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ,  $\beta > 0$  και πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$ .



i. Με βάση το σχήμα, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς  $\alpha, \beta$  και  $\gamma$ . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

ii. Για  $\alpha = -2$ ,  $\beta = 1$  και  $\gamma = 1$ , να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = g(x)$  στο διάστημα  $[0, \pi)$

(Μονάδες 10)

**Έξυπνα & Εύκολα!**



**13. Θέμα 15289 Αρχέτυπο**

Δίνεται το σύστημα:  $(\Sigma): \begin{cases} -x + 2y = 1 \\ x + \lambda y = \lambda \end{cases}$ , με παράμετρο  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

α)

i. Αν  $\lambda = -1$ , να λύσετε το σύστημα.

(Μονάδες 2)

ii. Αν  $(x_0, y_0)$  είναι η λύση του συστήματος για  $\lambda = -1$ , να βρείτε γωνία  $\theta \in [0, 2\pi)$  τέτοια ώστε  $x_0 = \sigma\upsilon\nu\theta$  και  $y_0 = \eta\mu\theta$ .

(Μονάδες 4)

β) Αν  $\lambda = 1$  και  $(x_1, y_1)$  είναι η αντίστοιχη λύση του συστήματος, να δείξετε ότι δεν υπάρχει γωνία  $\omega$ , τέτοια ώστε  $x_1 = \sigma\upsilon\nu\omega$  και  $y_1 = \eta\mu\omega$ .

(Μονάδες 7)

γ) Αν γνωρίζουμε ότι το σύστημα  $(\Sigma)$  έχει μοναδική λύση την  $(x_2, y_2)$  με  $x_2 = \sigma\upsilon\nu\varphi$  και

$$y_2 = \eta\mu\varphi, \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

i. Να δείξετε ότι  $\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{3}{5}$  και  $\eta\mu\varphi = \frac{4}{5}$ .

(Μονάδες 6)

ii. Να υπολογίσετε την τιμή του  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

(Μονάδες 6)

**Έξυπνα & Εύκολα!**

**14. Θέμα 15347 Αρχέτυπο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu^2(\pi - x) - 3\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \alpha$ , με  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

α) Να δείξετε ότι  $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu^2x - 3\sigma\upsilon\nu x + \alpha$ .

(Μονάδες 8)

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση  $f$  είναι άρτια ή περιττή.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε το  $\alpha$  αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της  $f$  διέρχεται από το σημείο  $M\left(\frac{\pi}{3}, 1\right)$ .

(Μονάδες 5)

δ) Για  $\alpha=2$  και  $g(x) = 2\eta\mu^2x + 9\sigma\upsilon\nu x - 9$ , να εξετάσετε (αν υπάρχουν) κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων  $f$  και  $g$ .

(Μονάδες 7)

**15. Θέμα 15821 Αρχέτυπο**

α) Να εξετάσετε αν υπάρχει γωνία  $x$  τέτοια ώστε  $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x = 0$ .

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι εξίσωση  $\sqrt{3} \cdot \eta\mu x = 3 \cdot \sigma\upsilon\nu x$  είναι ισοδύναμη με την εξίσωση  $\epsilon\phi x = \sqrt{3}$  και κατόπιν να τη λύσετε στο διάστημα  $[0, 2\pi]$ .

(Μονάδες 7)

γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f(x) = \sqrt{3} \cdot \eta\mu x$  και  $g(x) = 3 \cdot \sigma\upsilon\nu x$  στο ίδιο σύστημα αξόνων στο διάστημα  $[0, 2\pi]$  και να ερμηνεύσετε γραφικά το συμπέρασμα του ερωτήματος β).

(Μονάδες 7)

δ) Αξιοποιώντας το ερώτημα γ) να λύσετε γραφικά την ανίσωση  $\sqrt{3} \cdot \eta\mu x < 3 \cdot \sigma\upsilon\nu x$  στο διάστημα  $[0, 2\pi]$ .

(Μονάδες 6)

**Έξυπνα & Εύκολα!**

**16. Θέμα 20645 Αρχέτυπο**

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ ,  $g(x) = \sin x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

α) Να περιγράψετε με ποιο τρόπο από τη γραφική παράσταση της  $g$  προκύπτει η γραφική παράσταση της  $f$ .

(Μονάδες 6)

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τις τιμές  $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ,  $f(\pi)$ .

(Μονάδες 6)

δ) Να λύσετε την εξίσωση  $\sqrt{2}f(x) + 1 = 0$ .

(Μονάδες 7)

**17. Θέμα 20712 Αρχέτυπο**

Σε μια θαλάσσια περιοχή, λόγω της παλίρροιας, η στάθμη των υδάτων αυξομειώνεται. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της ημιτονοειδούς συνάρτησης  $f$ , που δίνει σε μέτρα το ύψος της στάθμης των υδάτων συναρτήσει του χρόνου  $t$  σε ώρες. Να βρείτε :

α) την υψομετρική διαφορά ανάμεσα στην υψηλότερη στάθμη (πλημμυρίδα) και τη χαμηλότερη στάθμη (άμπωτη).

(Μονάδες 6)

β) την περίοδο του φαινομένου της παλίρροιας.

(Μονάδες 6)

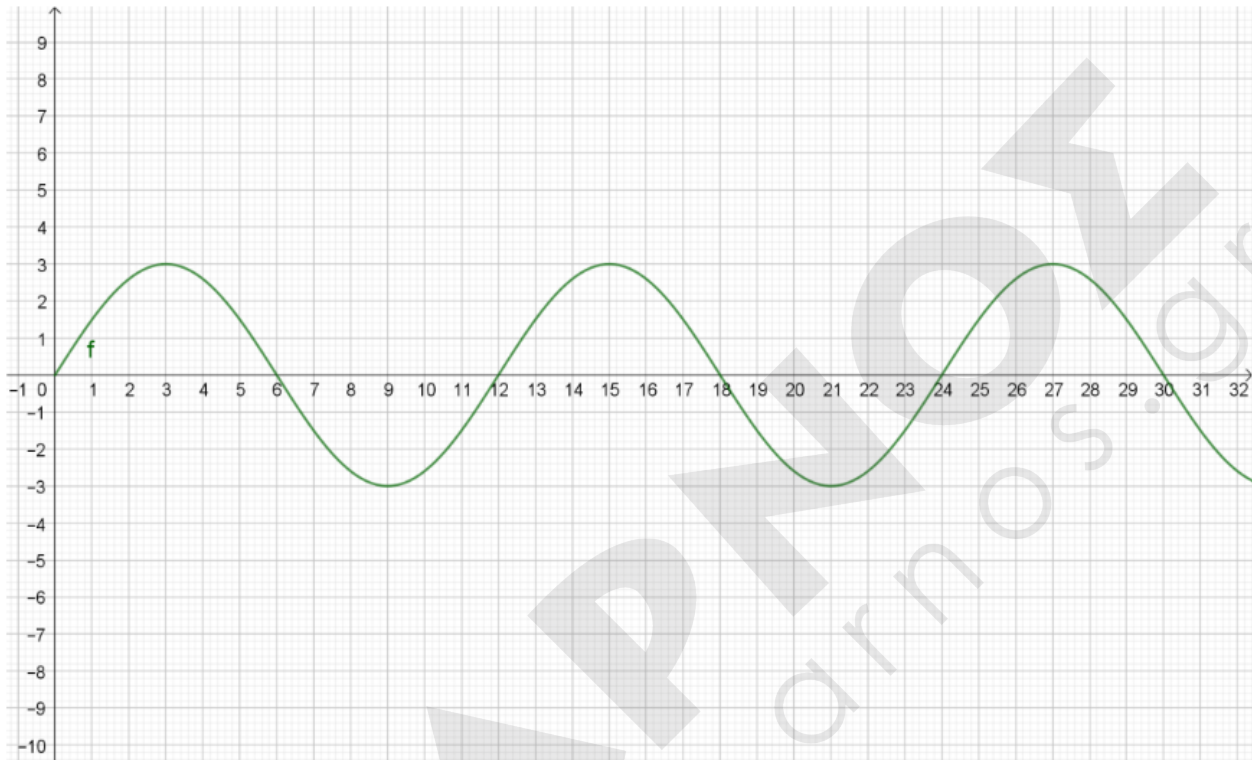
γ) τον τύπο της συνάρτησης  $f$ .

(Μονάδες 6)

**Έξυπνα & Εύκολα!**

δ) ποιες ώρες, στη διάρκεια μιας ημέρας, η στάθμη των υδάτων είναι  $\frac{3}{2}$  μέτρα.

(Μονάδες 7)



Έξυπνα & Εύκολα!

**18. Θέμα 21244 Αρχέτυπο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\alpha+1}{2} \sigma\upsilon\nu(\beta x)$ , με  $\alpha, \beta > 0$ , η οποία έχει ελάχιστο  $-2$  και περίοδο  $\frac{\pi}{2}$ .

α) Να δείξετε ότι  $\alpha = 3$  και  $\beta = 4$ .

(Μονάδες 5)

β) Δίνεται η παράσταση  $A = \frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \epsilon\varphi(\pi - x) \cdot \eta\mu(2\pi + x)}{\sigma\upsilon\nu(3\pi - x) \cdot \sigma\varphi\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}$ . Να δείξετε ότι  $A = -1$ .

(Μονάδες 10)

γ) Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 2A$ , στο διάστημα  $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ .

(Μονάδες 10)

**Έξυπνα & Εύκολα!**