Κεφ. 3.5. - Τράπεζα Θεμάτων 2022 - Άλγεβρα Β' Λυκείου

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ & ΛΥΣΕΙΣ

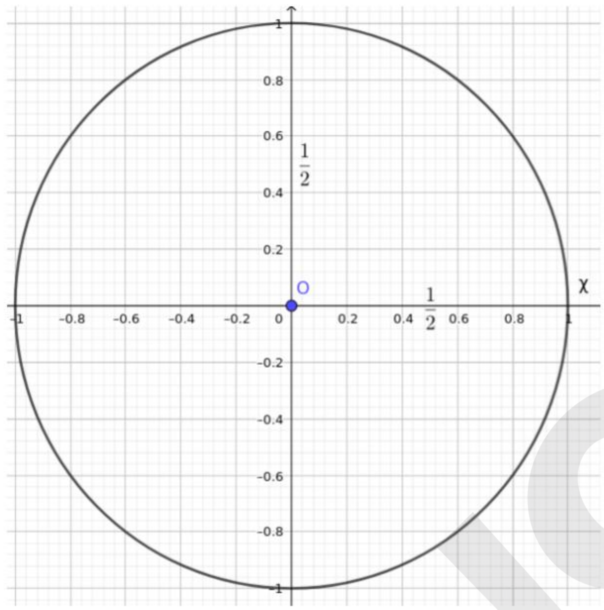
Θέμα 2 – Κωδικοί:

14977, 15036, 15969, 21995

Η Τράπεζα Θεμάτων για την Άλγεβρα Β' Λυκείου είναι μία μεγάλη «θάλασσα». Εμείς όμως έχουμε φροντίσει για εσένα, συγκεντρώνοντας εκείνα τα θέματα που αποτελούν τη «βάση» της γνώσης και για τα υπόλοιπα. Μελετώντας και κατανοώντας το μοτίβο σκέψης για τα συγκεκριμένα, μπορείς να λύσεις με επιτυχία και τα υπόλοιπα θέματα. Στην ιστοσελίδα μας www.arnos.gr για το Course της Άλγεβρας, μελετάς και προετοιμάζεσαι με την αναλυτική διδασκαλία σε ασκήσεις και θέματα, στο ύφος της Τράπεζας.

1. **Θέμα 14977**

α) Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο να σημειώσετε τις τελικές πλευρές δύο γωνιών που ανήκουν στο διάστημα $[0,2\pi)$, με αρχική πλευρά την ημιευθεία Οx, οι οποίες να έχουν ημίτονο ίσο με $\frac{1}{2}$ και άλλες δύο οι οποίες να έχουν συνημίτονο ίσο με $\frac{1}{2}$.



(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση $ημx = \frac{1}{2}$ για $x \in \mathbb{R}$.

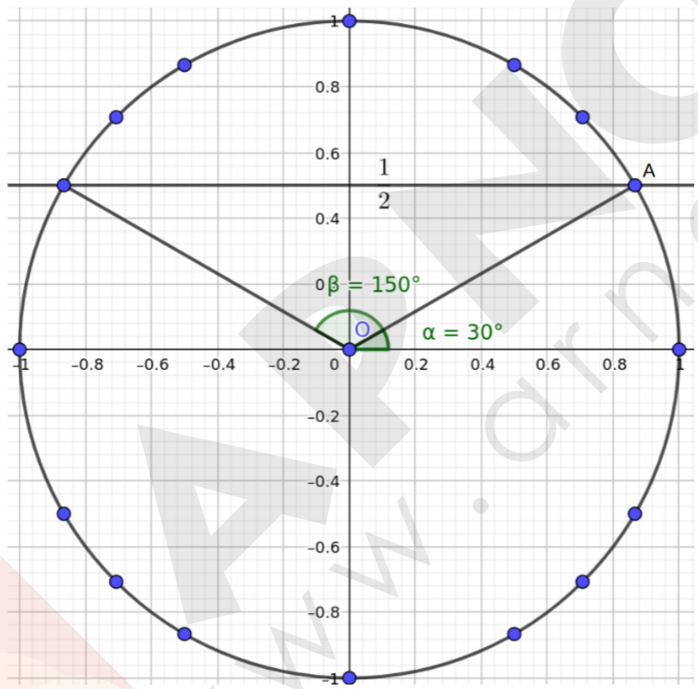
(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Το ημίτονο μίας γωνίας με μία πλευρά την ημιευθεία Οx και δεύτερη πλευρά που τέμνει στο σημείο Α του κύκλου, βρίσκεται από την προβολή του σημείου Α στον άξονα y'y.

Άρα, οι γωνίες που έχουν ημίτονο $\frac{1}{2}$ θα έχουν σημεία τομής με τον κύκλο τέτοια, ώστε η προβολή τους να τέμνει τον άξονα y'y στο $\frac{1}{2}$.

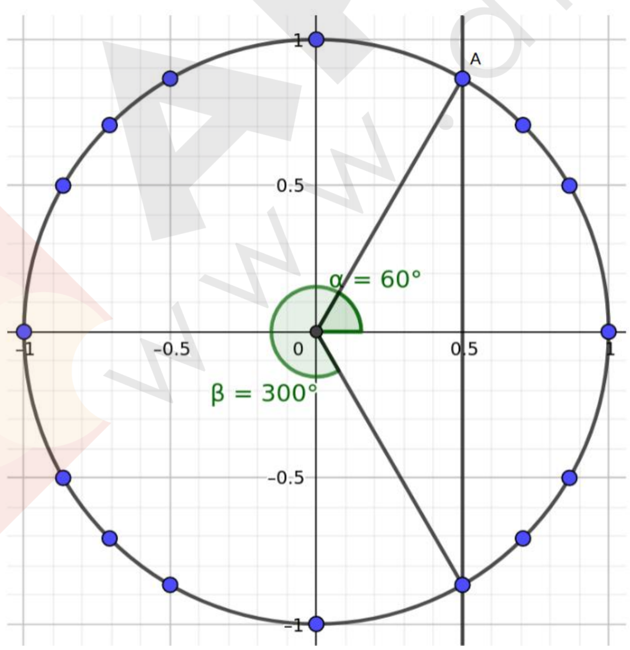
Οπότε φέρουμε την ευθεία $y=\frac{1}{2}$ (βλ. σχήμα παρακάτω) και προκύπτουν δύο γωνίες στο διάστημα [0,2π) που έχουν αυτό το ημίτονο. Είναι οι γωνίες $\alpha=30^o=\frac{\pi}{6}rad$ και $\beta=180^o-30^o=150^o=\frac{5\pi}{6}rad$.



Το συνημίτονο μίας γωνίας με μία πλευρά την ημιευθεία Οχ και δεύτερη πλευρά που τέμνει στο σημείο Α του κύκλου, βρίσκεται από την προβολή του σημείου Α στον άξονα x'x.

Άρα οι γωνίες που έχουν συνημίτονο $\frac{1}{2}$ θα έχουν σημεία τομής με τον κύκλο τέτοια, ώστε η προβολή τους να τέμνει τον άξονα χ΄χ στο $\frac{1}{2}$.

Οπότε φέρουμε την ευθεία $x=\frac{1}{2}$ (βλ. σχήμα παρακάτω) και προκύπτουν δύο γωνίες στο διάστημα [0,2π) που έχουν αυτό το συνημίτονο. Είναι οι γωνίες $\alpha=60^o=\frac{\pi}{3}rad$ και $\beta=360-60=300^o=\frac{5\pi}{3}rad$.



β) Όλες οι γωνίες που έχουν ημίτονο ίσο με $\frac{1}{2}$ στο διάστημα [0,2π) είναι οι α, β του ερωτήματος (α).

Για $x \in \mathbb{R}$ κάθε άλλη γωνία με ημίτονο ίσο με $\frac{1}{2}$ θα προκύπτει από αυτές, προσθέτοντας ή αφαιρώντας ακέραιο πλήθος κύκλων $\kappa \cdot 2\pi$, κ ακέραιος.

Άρα όλες οι λύσεις της εξίσωσης θα είναι:

$\eta\mu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = 2\kappa \cdot \pi + \frac{\pi}{6}$ ή $x = 2\kappa \cdot \pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2\kappa \cdot \pi + \frac{5\pi}{6}$ με $k \in \mathbb{Z}$.

2. Θέμα 15036 Αρχέτυπο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3συν2x$, $x \in \mathbb{R}$.

α)

i. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f.

(Μονάδες 10)

ii. Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f.

(Μονάδες 5)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -3$ στο $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α)

i. Η συνάρτηση είναι της μορφής $f(x) = ρσυνωx, ρ > 0$ με ρ=3 και $ω = 2$, οπότε η μέγιστη τιμή της f είναι ίση με 3 και η ελάχιστη τιμή της f είναι ίση με -3.

ii. Η περίοδος της f είναι $T = \frac{2π}{ω} = π$.

β) $f(x) = -3$ αν και μόνο αν 3συν2x=-3⇔ $συν2x = -1$ τότε $2x = 2κπ \pm π \Leftrightarrow x = κπ \pm \frac{π}{2}$, $κ \in \mathbb{Z}$.

3. Θέμα 15969 **Αρχέτυπο**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2συν(13π + x) - 2ημ(\frac{π}{2} - x)$.

α) Να δείξετε ότι $συν(13π + x) = -συνx$.

(Μονάδες 5)

β) Να δείξετε ότι $f(x) = -4συνx$.

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -2$.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Είναι: $συν(13π + x) = συν(6 \cdot 2π + π + x) = συν(π + x) = -συνx$.

β) Είναι $ημ\left(\frac{π}{2} - x\right) = συνx$.

Άρα $f(x) = -2συνx - 2συνx = -4συνx$.

γ) Λύνουμε την εξίσωση $f(x) = -2 \Leftrightarrow -4συνx = -2 \Leftrightarrow συνx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow συνx = συν\frac{π}{3} \Leftrightarrow$

$x = 2κπ \pm \frac{π}{3}, κ \in \mathbb{Z}$.

4. Θέμα 21995 Αρχέτυπο

Πόσες και ποιες λύσεις έχει η εξίσωση $\eta\mu x = \alpha$ στο διάστημα $[-2\pi, 2\pi]$ όταν:

α) $\alpha = 1$.

(Μονάδες 13)

β) $\alpha = -2$.

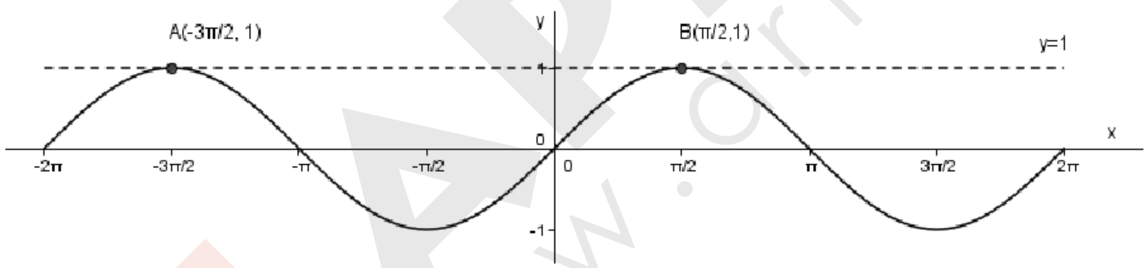
(Μονάδες 12)

Να αιτιολογήσετε γραφικά, ή όπως αλλιώς θέλετε, την απάντησή σας σε κάθε ένα από τα παραπάνω ερωτήματα.

ΛΥΣΗ

α) Ζητάμε πόσες και ποιες λύσεις έχει η εξίσωση $\eta\mu x = 1$ στο διάστημα $[-2\pi, 2\pi]$.

Στο σχήμα παρακάτω, φαίνεται το τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης ημ στο διάστημα $[-2\pi, 2\pi]$ και το αντίστοιχο τμήμα της ευθείας $y = 1$.



Οι λύσεις της εξίσωσης $\eta\mu x = 1$ στο διάστημα $[-2\pi, 2\pi]$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης ημx με την ευθεία $y = 1$, δηλαδή των σημείων $A\left(\frac{-3\pi}{2}, 1\right)$ και $B\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$. Άρα, η εξίσωση $\eta\mu x = 1$ στο διάστημα $[-2\pi, 2\pi]$ εχει δύο λύσεις: $x = \frac{-3\pi}{2}$ ή $x = \frac{\pi}{2}$.

β) Ζητάμε πόσες και ποιες λύσεις έχει η εξίσωση $\eta\mu x = -2$ στο διάστημα $[-2\pi, 2\pi]$.

Όμως, γνωρίζουμε ότι $-1 \leq \eta\mu x \leq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Οπότε, η εξίσωση $\eta\mu x = -2$ είναι αδύνατη, δηλαδή η εξίσωση $\eta\mu x = -2$ στο διάστημα $[-2\pi, 2\pi]$ δεν έχει καμία λύση.

Θέμα 4 – Κωδικοί:

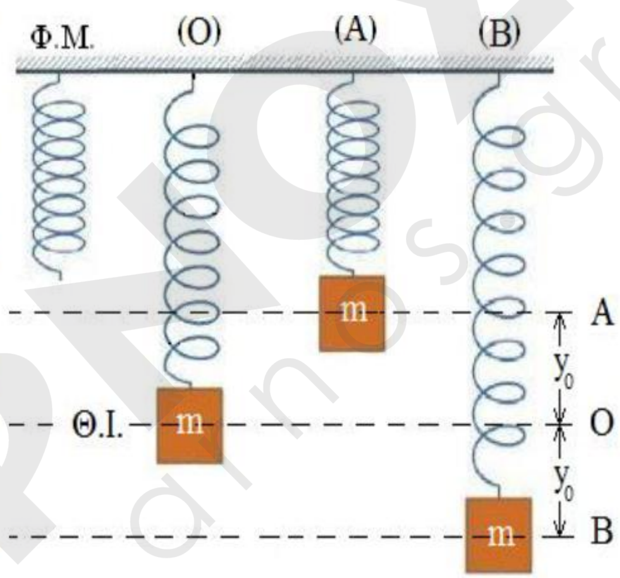
14975, 15003, 15014, 15026, 15049, 15050, 15287,

15288, 15289, 15347, 15821, 20645, 20712, 21244

5. Θέμα 14975 **Αρχέτυπο**

Ένα ελατήριο με φυσικό μήκος (Φ.Μ.) κρέμεται απο το ταβάνι. Τοποθετείται στο ελατήριο ένα σώμα μάζας m και ισορροπεί στη θέση Ο (Θ.Ι. – Θέση Ισορροπίας), απέχοντας από το πάτωμα απόσταση ίση με 1 μέτρο.

Το σώμα ανεβοκατεβαίνει, ξεκινώντας από τη θέση Ο, εκτελώντας ταλάντωση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων Α και Β, οι οποίες απέχουν μεταξύ τους σταθερή απόσταση ίση με $2y_0$.



Η απόσταση του σώματος (σε μέτρα) από το πάτωμα, ως συνάρτηση του χρόνου (σε δευτερόλεπτα), είναι:

$$y(t) = 1 + 0{,}2 \cdot \eta\mu \frac{\pi}{2} t$$

α) Να βρείτε το y_0 και στη συνέχεια την απόσταση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων Α και Β της ταλάντωσης.

(Μονάδες 06)

β) Να βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης.

(Μονάδες 06)

γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για $t \in [0, 4]$.

(Μονάδες 06)

δ) Να βρείτε ποιες χρονικές στιγμές, η απόσταση του σώματος από το πάτωμα θα είναι ίση με 1, 1 μέτρα, για $t \in [0, 2]$.

(Μονάδες 07)

ΛΥΣΗ

Η τριγωνομετρική συνάρτηση $f(x) = \rho \cdot \eta\mu(\omega x)$, όπου $\rho, \omega > 0$ έχει μέγιστη τιμή ρ, ελάχιστη τιμή $-\rho$ και περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Ως εκ τούτου,

α) Το $y_0 = (OA) = (OB) = \rho = 0{,}2$ μέτρα.

Η συνάρτηση $y(t)$ έχει μέγιστη τιμή $1 + \rho = 1{,}2$, ελάχιστη τιμή $1 - \rho = 0{,}8$ και η απόσταση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων Α και Β της ταλάντωσης είναι:

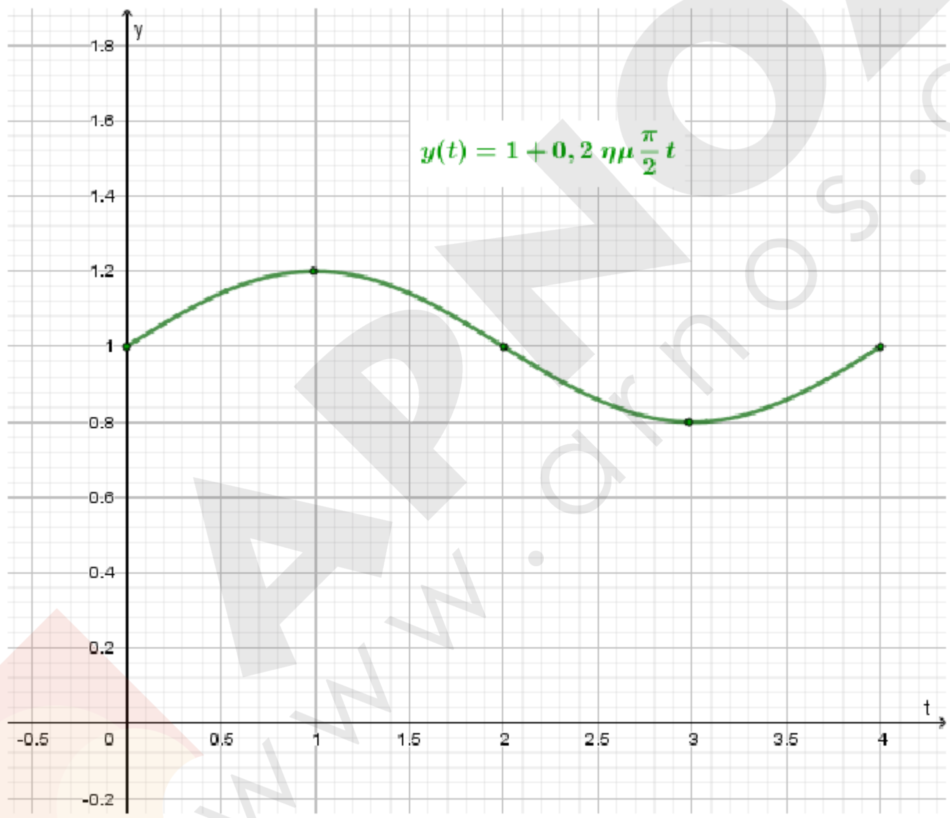
$|1{,}2 - 0{,}8| = 0{,}4$ μέτρα.

β) η περίοδος της συνάρτησης $y(t)$ είναι: $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow T = 4$.

γ) Ο πίνακας τιμών για τη συνάρτηση $y(t) = 1 + 0{,}2 \cdot \eta\mu\frac{\pi}{2}t$ για $t \in [0, 4]$, είναι:

t	0	1	2	3	4
$y(t)$	1	1,2	1	0,8	1

Είναι $y_{max} = 1{,}2$ και $y_{min} = 0{,}8$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης:



δ) Ζητάμε ουσιαστικά να βρούμε ποια χρονική στιγμή $t \in [0,2]$, είναι $y(t) = 1,1$.

Έχουμε: $\begin{cases} y(t) = 1 + 0,2 \cdot ημ\frac{\pi}{2}t \\ και \\ y(t) = 1,1 \end{cases} \Leftrightarrow 0,2 \cdot ημ\frac{\pi}{2}t = 0,1 \Leftrightarrow ημ\frac{\pi}{2}t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$ημ\frac{\pi}{2}t = ημ\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2}t = 2κπ + \frac{\pi}{6} \\ ή \\ \frac{\pi}{2}t = 2κπ + \frac{5\pi}{6} \end{cases}, \; κ \in Z \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4κ + \frac{1}{3} \\ ή \\ t = 4κ + \frac{5}{3} \end{cases}, \; κ \in Z$$

Επειδή όμως $t \in [0,2]$, έχουμε:

$0 \le t \le 2 \Rightarrow 0 \le 4κ + \frac{1}{3} \le 2 \Rightarrow -\frac{1}{12} \le κ \le \frac{5}{12}, \; κ \in Z \;\; (1)$

$0 \le t \le 2 \Rightarrow 0 \le 4κ + \frac{5}{3} \le 2 \Rightarrow -\frac{5}{12} \le κ \le \frac{1}{12}, \; κ \in Z \;\; (2)$

Και από τις δύο σχέσεις προκύπτει ότι $κ = 0$, επομένως: $t = \frac{1}{3}$ ή $t = \frac{5}{3}$.

6. Θέμα 15003 Αρχέτυπο

Δίνεται η συνάρτηση:

$f(x) = ημαx \cdot \left[συν\left(\frac{\pi}{2} - αx\right) + 2\right] - συναx \cdot συν(\pi - αx) - 1$, με $α \in \mathbb{R}$.

α)

i. Να δείξετε ότι $f(x) = 2 \cdot ημαx$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

ii. Δίνεται επιπλέον ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να δείξετε ότι $α = 2$.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία $ε: y = 1$ για $x \in [0, \pi]$.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α)

i. Ισχύει ότι $συν\left(\frac{\pi}{2}-αx\right)=ημαx$ και $συν(\pi-αx)=-συναx$. Άρα, ο τύπος της συνάρτησης γίνεται:

$$f(x)=ημαx(ημαx+2)-συναx(-συναx)-1=$$
$$ημ^2αx+2ημαx+συν^2αx-1=$$
$$1+2ημαx-1=2ημαx.$$

ii. Η $ημαx$ έχει περίοδο $T=\frac{2\pi}{α}$. Από τη γραφική παράσταση προκύπτει ότι η συνάρτηση f έχει περίοδο $T=\pi$. Άρα,

$$\frac{2\pi}{α}=\pi\Leftrightarrow α=2.$$

β) Οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y=1$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$2ημ2x=1\Leftrightarrow ημ2x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$
$$ημ2x=ημ\frac{\pi}{6}.$$

Οπότε,

$$\begin{cases} 2x=\frac{\pi}{6}+2κ\pi \\ \text{ή} \\ 2x=\pi-\frac{\pi}{6}+2κ\pi \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=\frac{\pi}{12}+κ\pi \\ \text{ή} \\ x=\frac{5\pi}{12}+κ\pi \end{cases},\quad κ\in\mathbb{Z}.$$

Επειδή $x\in[0,\pi]$ έχουμε ότι:

$$0\le x\le\pi\Leftrightarrow 0\le\frac{\pi}{12}+κ\pi\le\pi\Leftrightarrow$$
$$-\frac{1}{12}\le κ\le 1-\frac{1}{12}\Leftrightarrow-\frac{1}{12}\le κ\le\frac{11}{12}\overset{κ\in\mathbb{Z}}{\Longrightarrow}k=0$$

και

$$0\le x\le\pi\Leftrightarrow 0\le\frac{5\pi}{12}+κ\pi\le\pi\Leftrightarrow$$

$$-\frac{5}{12} \le \kappa \le 1 - \frac{5}{12} \Leftrightarrow -\frac{5}{12} \le \kappa \le \frac{7}{12} \overset{\kappa \in \mathbb{Z}}{\Longrightarrow} k = 0.$$

Άρα, $x = \frac{\pi}{12}$ και ή $x = \frac{5\pi}{12}$

7. Θέμα 15014

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot \eta\mu\beta x$, με α, β ακέραιους θετικούς αριθμούς.

α) Να βρείτε την τιμή του α, αν η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι 2.

(Μονάδες 6)

β) Αν $\alpha = 2$, να δείξετε ότι η μικρότερη τιμή του β για την οποία είναι $f\left(\frac{\pi}{16}\right) = 2$ είναι $\beta = 8$.

(Μονάδες 10)

γ) Αν $\alpha = 2$ και $\beta = 8$, να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$ στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Για την συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot \eta\mu\beta x$ με α θετικό ακέραιο μέγιστη τιμή είναι το α, άρα $\alpha = 2$.

Εναλλακτικά έχουμε ότι η μέγιστη τιμή του $\eta\mu\beta x$ είναι 1, άρα αν $\alpha \cdot \eta\mu\beta x = 2$, πρέπει $\alpha = 2$

β) Η συνάρτηση από το α) ερώτημα είναι $f(x)=2\cdot\eta\mu\beta x$, άρα

$$f\left(\frac{\pi}{16}\right)=2\Leftrightarrow 2\eta\mu\frac{\beta\pi}{16}=2\Leftrightarrow \eta\mu\frac{\beta\pi}{16}=1.$$

Λύνουμε την εξίσωση

$\eta\mu\frac{\beta\pi}{16}=1\Leftrightarrow\eta\mu\frac{\beta\pi}{16}=\eta\mu\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\frac{\beta\pi}{16}=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$, με $\kappa\in\mathbb{Z}$ (η λύση $\frac{\beta\pi}{16}=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{2}$ ταυτίζεται με την προηγούμενη).

Απλοποιώντας το π έχουμε $\frac{\beta}{16}=2\kappa+\frac{1}{2}$, η μικρότερη θετική τιμή του β που ζητάμε θα είναι όταν ο κ, ως ακέραιος, γίνει ίσος με 0 (για αρνητικές τιμές του κ το β γίνεται αρνητικό). Οπότε $\frac{\beta}{16}=2\kappa+\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{\beta}{16}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\beta=8$.

γ) Η εξίσωση $f(x)=1$ από τα προηγούμενα ερωτήματα είναι:

$$2\cdot\eta\mu 8x=1\Leftrightarrow\eta\mu 8x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\eta\mu 8x=\eta\mu\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow\begin{cases}8x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}\\ 8x=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{6}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\kappa\pi}{4}+\frac{\pi}{48}\\ x=\frac{\kappa\pi}{4}+\frac{5\pi}{48}\end{cases},\ \text{με } \kappa\in\mathbb{Z}$$

Αφού πρέπει $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ λύνουμε τις παρακάτω δύο ανισώσεις:

i) $0\le\frac{\kappa\pi}{4}+\frac{\pi}{48}\le\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow 0\le\left(\frac{\kappa}{4}+\frac{1}{48}\right)\pi\le\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow 0\le\frac{\kappa}{4}+\frac{1}{48}\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow-\frac{1}{48}\le\frac{\kappa}{4}\le\frac{1}{2}-\frac{1}{48}\Leftrightarrow$
$-\frac{1}{48}\le\frac{\kappa}{4}\le\frac{23}{48}\Leftrightarrow-\frac{4}{48}\le\kappa\le\frac{4\cdot 23}{48}\Leftrightarrow-\frac{1}{12}\le\kappa\le\frac{23}{12}$.

Αφού $\kappa\in\mathbb{Z}$, είναι $\kappa=0$ ή $\kappa=1$ δηλαδή δεκτές είναι οι γωνίες $x=\frac{\pi}{48}rad$ ή $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{48}=\frac{13\pi}{48}rad$.

ii) $0 \le \frac{\kappa\pi}{4} + \frac{5\pi}{48} \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \le \left(\frac{\kappa}{4} + \frac{5}{48}\right)\pi \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \le \frac{\kappa}{4} + \frac{5}{48} \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{5}{48} \le \frac{\kappa}{4} \le \frac{1}{2} - \frac{5}{48} \Leftrightarrow$

$-\frac{5}{48} \le \frac{\kappa}{4} \le \frac{19}{48} \Leftrightarrow -\frac{4 \cdot 5}{48} \le \kappa \le \frac{4 \cdot 19}{48} \Leftrightarrow -\frac{5}{12} \le \kappa \le \frac{19}{12}$.

Αφού $\kappa \in \mathbb{Z}$, είναι $\kappa = 0$ ή $\kappa = 1$ δηλαδή δεκτές είναι οι γωνίες $x = \frac{5\pi}{48} rad$ ή

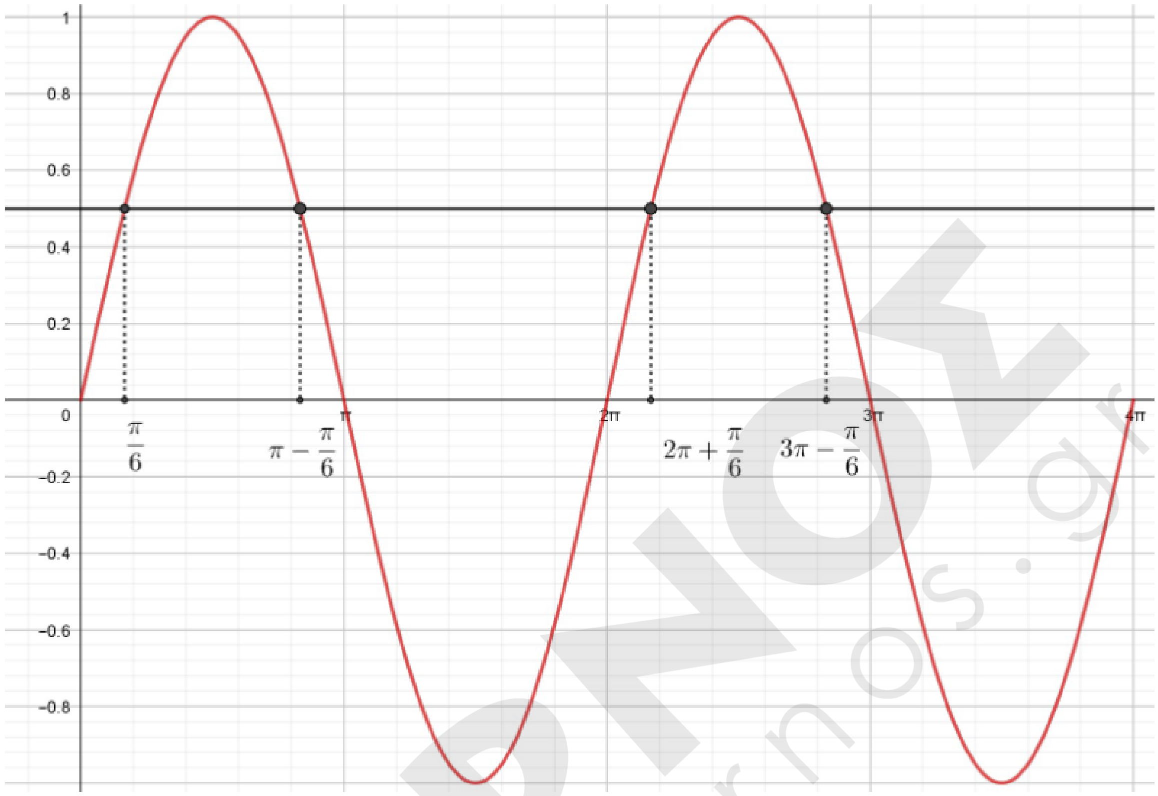
$x = \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{48} = \frac{17\pi}{48} rad$.

Εναλλακτικά, όπως στην προηγούμενη λύση, έχουμε $\eta\mu 8x = \frac{1}{2}$. Επειδή $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, θα είναι

$0 \le 8x \le 4\pi$. Οι αριθμοί των οποίων το ημίτονο είναι ίσο με $\frac{1}{2}$ στο διάστημα αυτό είναι οι:

$\frac{\pi}{6}, \pi - \frac{\pi}{6}, 2\pi + \frac{\pi}{6}, 3\pi - \frac{\pi}{6}$, όπως προκύπτει από την παρακάτω γραφική παράσταση της

συνάρτησης $\eta\mu\omega$.



Άρα:

$$8x=\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{48}$$

$$8x=\pi-\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow x=\frac{5\pi}{48}$$

$$8x=2\pi+\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow x=\frac{13\pi}{48}$$

$$8x=3\pi-\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow x=\frac{17\pi}{48}.$$

8. Θέμα 15026 Αρχέτυπο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=1+2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f.

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα xx'.

(Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι $\left(f(x)-1\right)^2+\left(f(1-x)-1\right)^2=4$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Η περίοδος της συνάρτησης f είναι $\mathrm{T}=\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$.

β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$-1\le\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)\le 1$ οπότε $-2\le 2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)\le 2$ οπότε $-2+1\le 1+2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)\le 2+1$ και τελικά $-1\le f(x)\le 3$.

Επίσης $f(1)=1+2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right)=3$ και $f(3)=1+2\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-1$.

Συνεπώς η μέγιστη τιμή της f είναι το 3 και η ελάχιστη το -1.

γ) Οι τετμημένες των σημείων στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα xx' είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=0$. Είναι

$$f(x)=0 \Leftrightarrow 1+2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)=\eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{c}\frac{\pi x}{2}=2\kappa\pi+\left(-\frac{\pi}{6}\right)\\ \eta'\\ \frac{\pi x}{2}=2\kappa\pi+\pi-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\frac{\pi x}{2}=2\kappa\pi-\frac{\pi}{6}\\ \eta'\\ \frac{\pi x}{2}=2\kappa\pi+\frac{7\pi}{6}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\frac{x}{2}=2\kappa-\frac{1}{6}\\ \eta'\\ \frac{x}{2}=2\kappa+\frac{7}{6}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}x=4\kappa-\frac{1}{3}\\ \eta'\\ x=4\kappa+\frac{7}{3}\end{array}\right\},\quad \kappa\in\mathbb{Z}$$

οπότε οι ζητούμενες τετμημένες είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί της μορφής $x=4\kappa-\frac{1}{3}$ ή $x=4\kappa+\frac{7}{3}$, όπου $\kappa\in\mathbb{Z}$.

δ) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$$f(1-x)=1+2\eta\mu\left(\frac{\pi(1-x)}{2}\right)=1+2\eta\mu\left(\frac{\pi-\pi x}{2}\right)=1+2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2}\right)=1+2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x}{2}\right),$$ οπότε

$$\left(f(x)-1\right)^2+\left(f(1-x)-1\right)^2=\left(1+2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)-1\right)^2+\left(1+2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x}{2}\right)-1\right)^2=$$

$$4\eta\mu^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)+4\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)=4(\eta\mu^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)+\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi x}{2}\right))=4\cdot 1=4$$

δηλαδή $\left(f(x)-1\right)^2+\left(f(1-x)-1\right)^2=4$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

9. Θέμα 15049 Αρχέτυπο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=ημ\left(\frac{π}{2}-x\right)+ημ(π+x)$, $x\in\mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=συνx-ημx$.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $-2\le f(x)\le 2$. Κατόπιν να εξετάσετε αν ο αριθμός 2 είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε:

i. Το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f της f με τον άξονα $y'y$.

(Μονάδες 3)

ii. Δυο σημεία τομής της C_f με τον $x'x$.

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Επειδή $ημ\left(\frac{π}{2}-x\right)=συνx$ και $ημ(π+x)=-ημx$, έχουμε: $f(x)=συνx-ημx$, $x\in\mathbb{R}$.

β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, έχουμε:

$$-1\le συνx\le 1,\ (1)\ \text{ και }\ -1\le ημx\le 1 \Leftrightarrow -1\le -ημx\le 1,\ (2)$$

Με πρόσθεση των (1) και (2) προκύπτει ότι: $-2\le συνx-ημx\le 2$, δηλαδή $-2\le f(x)\le 2$, που είναι το ζητούμενο.

Αν υποθέσουμε ότι ο αριθμός 2 είναι η μέγιστη τιμή της f, τότε για κάποιο $x_o\in\mathbb{R}$ ισχύει $συνx_o=1$ και $ημx_o=-1$, οπότε $ημ^2x_o+συν^2x_o=1+1=2$, που είναι άτοπο. Άρα ο αριθμός 2 δεν είναι η μέγιστη τιμή της f.

γ) i. Με $x=0$ έχουμε: $f(0)=\text{συν}0-\text{ημ}0=1-0=1$, οπότε η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0,1)$.

ii. Με $y=0$ δηλαδή $f(x)=0$ έχουμε: $\text{συν}x-\text{ημ}x=0 \Leftrightarrow \text{συν}x=\text{ημ}x$. Μια προφανής λύση της εξίσωσης είναι ο αριθμός $\frac{\pi}{4}$ και επειδή $\text{συν}\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\text{συν}\frac{\pi}{4}=-\text{ημ}\frac{\pi}{4}=\text{ημ}\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)$, μια άλλη λύση της είναι ο αριθμός $\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$.

Άρα δυο κοινά σημεία της C_f με τον $x'x$ είναι τα $\left(\frac{\pi}{4},0\right)$ και $\left(\frac{5\pi}{4},0\right)$.

10. Θέμα 15050

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2\text{συν}x,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε δυο κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία $y=1$.

(Μονάδες 5)

γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ και $f\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

(Μονάδες 6)

δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση, στο διάστημα $[0,2\pi]$.

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

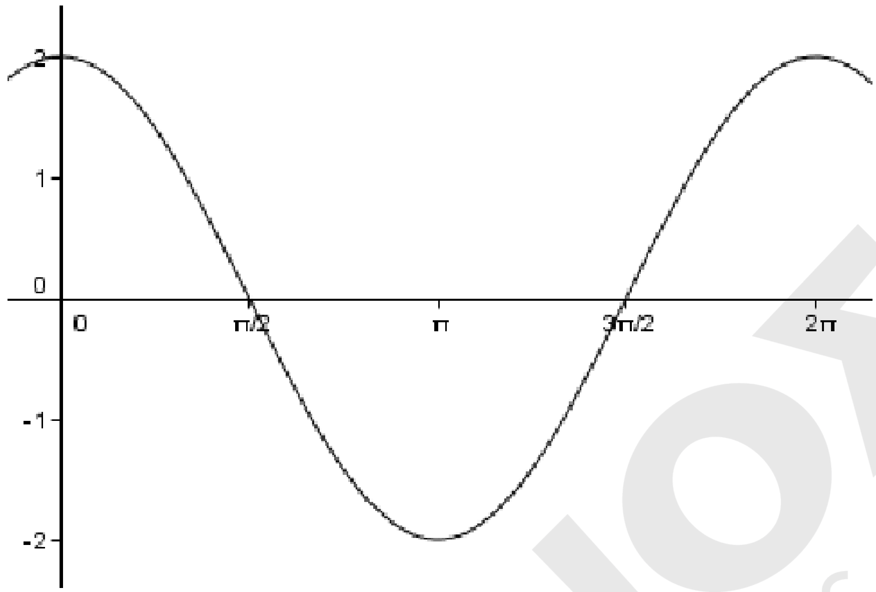
α) Η συνάρτηση είναι της μορφής $f(x)=\rho\text{συν}x,\ \rho>0$ με $\rho=2$, οπότε η ελάχιστη τιμή της είναι ίση με -2 και η μέγιστη τιμή της είναι ίση με 2.

β) Οι τετμημένες των κοινών σημείων της C_f με την ευθεία $y=1$ προκύπτουν από τη λύση της εξίσωσης $f(x)=1$ που είναι ισοδύναμη με την $συνx=\frac{1}{2}$. Μια προφανής λύση της είναι η $x=\frac{\pi}{3}$ και επειδή οι αντίθετες γωνίες έχουν ίδιο συνημίτονο, μια άλλη λύση είναι η $x=-\frac{\pi}{3}$. Άρα, δυο κοινά σημεία της C_f με την ευθεία $y=1$ είναι τα $\left(-\frac{\pi}{3},1\right),\left(\frac{\pi}{3},1\right)$.

γ) Οι αριθμοί $\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{5}$ περιέχονται στο πρώτο τεταρτημόριο όπου η συνάρτηση συνημίτονο, είναι γνησίως φθίνουσα. Επιπλέον $\frac{2\pi}{5}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{15}>0$, οπότε $\frac{2\pi}{5}>\frac{\pi}{3}$ και λόγω της μονοτονίας του συνημιτόνου παίρνουμε $συν\left(\frac{\pi}{3}\right)>συν\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, οπότε $2συν\left(\frac{\pi}{3}\right)>2συν\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, δηλαδή $f\left(\frac{\pi}{3}\right)>f\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

δ) Με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα προκύπτει η γραφική παράσταση της f όπως φαίνεται στο σχήμα.

x		0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$2συνx$		2	0	-2	0	2



11. Θέμα 15287 Αρχέτυπο

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η ευθεία $y=\alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\rho\eta\mu(\omega x)$, όπου $\omega>0$, $\rho>0$ και $x \in \mathbb{R}$. Με βάση το σχήμα,

α) Να δείξετε ότι $\rho=3$ και $\omega=2$.

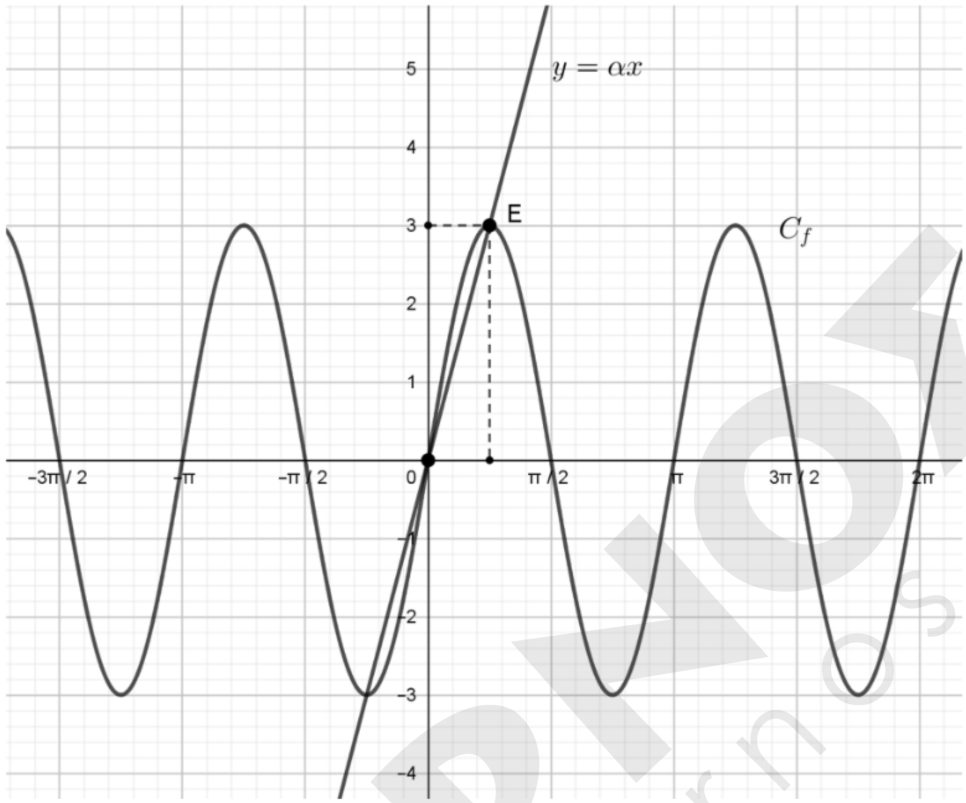
(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $3\eta\mu(2x)-\frac{12}{\pi}x=0$.

(Μονάδες 10)



ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση $f(x)=\rho\eta\mu(\omega x)$ με $\rho>0$, έχει μέγιστη τιμή ρ. Με βάση το σχήμα η συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή 3, άρα $\rho=3$. Επίσης η περίοδος της συνάρτησης είναι π, οπότε $\pi=\frac{2\pi}{\omega}\Leftrightarrow\omega=2$. Άρα $f(x)=3\eta\mu(2x)$.

β) Η ευθεία $y=\alpha x$ διέρχεται από το σημείο E της γραφικής παράστασης της f που έχει τεταγμένη 3, η οποία είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης. Η συνάρτηση $f(x)=3\eta\mu(2x)$ παρουσιάζει μέγιστη τιμή σε διάστημα μιας περιόδου στο $\frac{1}{4}$ της περιόδου, δηλαδή στη θέση $x=\frac{\pi}{4}$. Άρα είναι $\mathrm{E}\left(\frac{\pi}{4},3\right)$ και $3=\alpha\cdot\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\alpha=\frac{12}{\pi}$. Οπότε η εξίσωση της ευθείας είναι :

$y=\frac{12}{\pi}x$.

γ) Η εξίσωση $3\eta\mu(2x)-\frac{12}{\pi}x=0$ γράφεται ισοδύναμα $3\eta\mu(2x)=\frac{12}{\pi}x$. Οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της $f(x)=3\eta\mu(2x)$ με την ευθεία $y=\frac{12}{\pi}x$. Με βάση το σχήμα τα σημεία τομής είναι 3, οι τετμημένες των οποίων είναι

- $x=0$, δεδομένου ότι $f(0)=3\eta\mu 0=0$ και η ευθεία $y=\frac{12}{\pi}x$ διέρχεται από το σημείο $(0,0)$.
- $x=\frac{\pi}{4}$, δεδομένου ότι $f(\frac{\pi}{4})=3\eta\mu\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right)=3\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right)=3\cdot 1=3$ και η ευθεία $y=\frac{12}{\pi}x$ διέρχεται από το σημείο $\left(\frac{\pi}{4},\frac{12}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{\pi}{4},3\right)$ και
- $x=-\frac{\pi}{4}$, δεδομένου ότι $f(-\frac{\pi}{4})=3\eta\mu\left(-2\cdot\frac{\pi}{4}\right)=3\eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right)=3\cdot(-1)=-3$ και η ευθεία $y=\frac{12}{\pi}x$ διέρχεται από το σημείο $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{12}{\pi}\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\left(-\frac{\pi}{4},-3\right)$.

Άρα η εξίσωση $3\eta\mu(2x)-\frac{12}{\pi}x=0$ έχει λύσεις τις $x=0$, $x=\frac{\pi}{4}$ και $x=-\frac{\pi}{4}$.

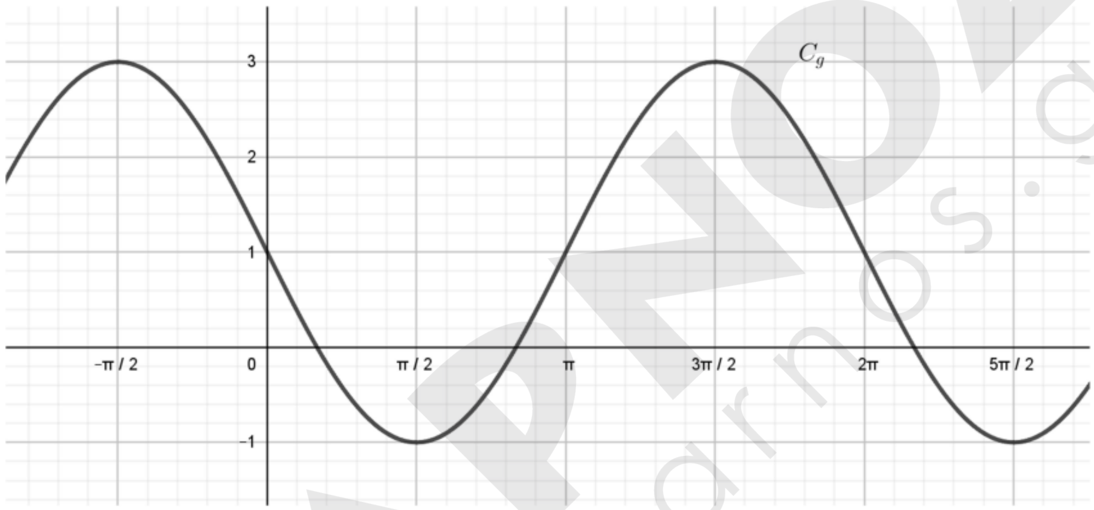
12. Θέμα 15288

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2\eta\mu 3x+1$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την περίοδο T, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f.

(Μονάδες 3)

β) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\alpha\eta\mu\beta x+\gamma$, με $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, $\beta>0$ και πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.



i. Με βάση το σχήμα, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α,β και γ. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

ii. Για $\alpha=-2$, $\beta=1$ και $\gamma=1$, να λύσετε την εξίσωση $f(x)=g(x)$ στο διάστημα $[0,\pi)$

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Η περίοδος της συνάρτησης είναι $\mathrm{T}=\frac{2\pi}{3}$, η μέγιστη τιμή της είναι $\max f(x)=2+1=3$, και η ελάχιστη τιμή της είναι $\min f(x)=-2+1=-1$.

β)

i. Από την γραφική παράσταση της ημιτονοειδούς συνάρτησης g, παρατηρούμε ότι παρουσιάζει μέγιστο για $x=-\frac{\pi}{2}$ και το επόμενο μέγιστο για $x=\frac{3\pi}{2}$. Άρα η περίοδος της συνάρτησης είναι $\mathrm{T}=\frac{3\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2\pi$, οπότε $\beta=1$. Η καμπύλη προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $\alpha\eta\mu x$ κατά 1 μονάδα προς τα πάνω, άρα $\gamma=1$. Επίσης

$$\begin{aligned}
&g\left(\frac{3\pi}{2}\right)=3 \Leftrightarrow\\
&\alpha\cdot\eta\mu\frac{3\pi}{2}+1=3 \Leftrightarrow.\\
&\alpha\cdot(-1)=2 \Leftrightarrow\\
&\alpha=-2
\end{aligned}$$

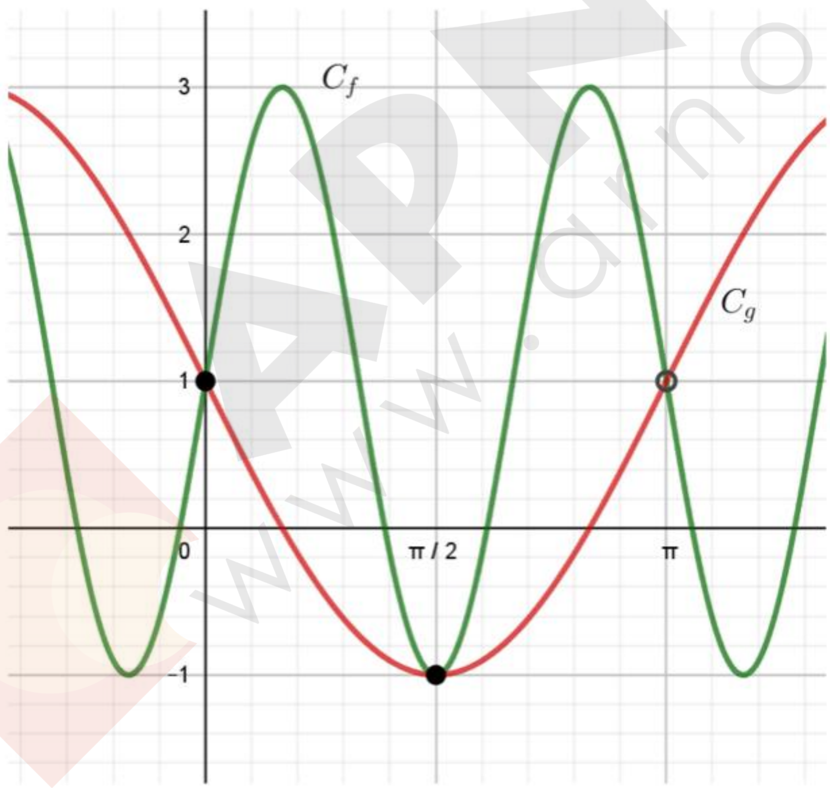
Τελικά $g(x)=-2\eta\mu x+1$.

ii. Η εξίσωση γίνεται:

$$\begin{aligned}
&f(x)=g(x) \Leftrightarrow\\
&2\eta\mu 3x+1=-2\eta\mu x+1 \Leftrightarrow\\
&\eta\mu 3x=-\eta\mu x \Leftrightarrow\\
&\eta\mu 3x=\eta\mu(-x) \Leftrightarrow\\
&\begin{cases} 3x=2\kappa\pi-x \\ \text{ή} \\ 3x=2\kappa\pi+(\pi+x) \end{cases},\ \kappa\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Δηλαδή: $\begin{cases} x = \dfrac{\kappa\pi}{2} \\ \text{ή} \\ x = \kappa\pi + \dfrac{\pi}{2} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$. Επειδή $x \in [0,\pi)$, για $\kappa = 0$ στον πρώτο τύπο λύσεων προκύπτει $x = 0$ και στον δεύτερο τύπο λύσεων προκύπτει $x = \dfrac{\pi}{2}$ (που προκύπτει και από τον πρώτο τύπο λύσεων για $\kappa = 1$). Από τις άλλες τιμές του $\kappa \in \mathbb{Z}$ προκύπτουν λύσεις οι οποίες δεν ανήκουν στο διάστημα $[0,\pi)$.

Η γραφική λύση της εξίσωσης φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Τελικά ή εξίσωση έχει δυο λύσεις στο $[0,\pi)$, τις $x = 0$ και $x = \dfrac{\pi}{2}$.

13. Θέμα 15289 Αρχέτυπο

Δίνεται το σύστημα: $(\Sigma):\begin{cases}-x+2y=1\\ x+\lambda y=\lambda\end{cases}$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α)

i. Αν $\lambda=-1$,να λύσετε το σύστημα.

(Μονάδες 2)

ii. Αν (x_0,y_0) είναι η λύση του συστήματος για $\lambda=-1$, να βρείτε γωνία $\theta\in[0,2\pi)$ τέτοια ώστε $x_0=\sigma\upsilon\nu\theta$ και $y_0=\eta\mu\theta$.

(Μονάδες 4)

β) Αν $\lambda=1$ και (x_1,y_1) είναι η αντίστοιχη λύση του συστήματος, να δείξετε ότι δεν υπάρχει γωνία ω, τέτοια ώστε $x_1=\sigma\upsilon\nu\omega$ και $y_1=\eta\mu\omega$.

(Μονάδες 7)

γ) Αν γνωρίζουμε ότι το σύστημα (Σ) έχει μοναδική λύση την (x_2,y_2) με $x_2=\sigma\upsilon\nu\varphi$ και $y_2=\eta\mu\varphi$, $\varphi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,

i. Να δείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu\varphi=\frac{3}{5}$ και $\eta\mu\varphi=\frac{4}{5}$.

(Μονάδες 6)

ii. Να υπολογίσετε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α)

i. Για $\lambda=-1$ το σύστημα γίνεται: $(\Sigma):\begin{cases}-x+2y=1\\x-1y=-1\end{cases}\overset{(+)}{\Leftrightarrow}\begin{cases}y=0\\x=-1\end{cases}$, οπότε η λύση του συστήματος είναι $(x_0,y_0)=(-1,0)$.

ii. Από το αi) ερώτημα έχουμε $x_0=\sigma\upsilon\nu\theta=-1$, $y_0=\eta\mu\theta=0$ και $\theta\in[0,2\pi)$, οπότε $\theta=\pi$.

β) Για $\lambda=1$ το σύστημα γίνεται: $(\Sigma):\begin{cases}-x+2y=1\\x+1y=1\end{cases}\overset{(+)}{\Leftrightarrow}\begin{cases}y=\frac{2}{3}\\x=\frac{1}{3}\end{cases}$, οπότε η λύση του συστήματος είναι $(x_1,y_1)=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$.

Δεν υπάρχει γωνία ω, τέτοια ώστε $\sigma\upsilon\nu\omega=\frac{1}{3}$ και $\eta\mu\omega=\frac{2}{3}$, διότι

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega+\eta\mu^2\omega=\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{9}+\frac{4}{9}=\frac{5}{9}\neq1.$$

γ)

i. Αν γνωρίζουμε ότι το σύστημα (Σ) έχει μοναδική λύση την (x_2,y_2) με $x_2=\sigma\upsilon\nu\varphi$ και $y_2=\eta\mu\varphi$, τότε θα ικανοποιεί και την πρώτη εξίσωση, $-x+2y=1$. Δηλαδή:

$$-\sigma\upsilon\nu\varphi+2\eta\mu\varphi=1 \qquad (1).$$

Λύνοντας την εξίσωση (1) έχουμε ισοδύναμα:

$$
\begin{aligned}
&-\sigma\upsilon\nu\varphi+2\eta\mu\varphi=1 \Leftrightarrow \\
&2\eta\mu\varphi=1+\sigma\upsilon\nu\varphi \overset{\substack{\eta\mu\varphi>0\\ \sigma\upsilon\nu\varphi>0}}{\Leftrightarrow} \\
&4\eta\mu^2\varphi=1+2\sigma\upsilon\nu\varphi+\sigma\upsilon\nu^2\varphi \Leftrightarrow \\
&4\left(1-\sigma\upsilon\nu^2\varphi\right)=1+2\sigma\upsilon\nu\varphi+\sigma\upsilon\nu^2\varphi \Leftrightarrow \\
&5\sigma\upsilon\nu^2\varphi+2\sigma\upsilon\nu\varphi-3=0.
\end{aligned}
$$

Η τελευταία είναι εξίσωση πολυωνυμική 2^{ου} βαθμού με $\Delta=64>0$ και ρίζες

$\sigma\upsilon\nu\varphi=-1$, που απορρίπτεται γιατί $\varphi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

και $\sigma\upsilon\nu\varphi=\frac{3}{5}$.

Άρα από την (1) έχουμε:

$$
\begin{aligned}
&-\frac{3}{5}+2\eta\mu\varphi=1 \Leftrightarrow \\
&2\eta\mu\varphi=\frac{8}{5} \Leftrightarrow \\
&\eta\mu\varphi=\frac{4}{5}.
\end{aligned}
$$

ii. Η λύση $(x_2,y_2)=(\sigma\upsilon\nu\varphi,\eta\mu\varphi)=\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$ του συστήματος (Σ) θα ικανοποιεί και την δεύτερη εξίσωσή του, δηλαδή

$$
\begin{aligned}
&\frac{3}{5}+\lambda\cdot\frac{4}{5}=\lambda \Leftrightarrow \\
&\frac{3}{5}=\frac{1}{5}\cdot\lambda \Leftrightarrow \\
&\lambda=3.
\end{aligned}
$$

14. Θέμα 15347 Αρχέτυπο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2συν^2(π - x) - 3ημ\left(\frac{π}{2} + x\right) + α$, με $α \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = 2συν^2 x - 3συνx + α$.

(Μονάδες 8)

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε το $α$ αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(\frac{π}{3}, 1)$.

(Μονάδες 5)

δ) Για α=2 και $g(x) = 2ημ^2 x + 9συνx - 9$, να εξετάσετε (αν υπάρχουν) κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Είναι: $συν(π - x) = -συνx$ και $ημ\left(\frac{π}{2} + x\right) = ημ\left(\frac{π}{2} - (-x)\right) = συν(-x) = συνx$.

Άρα: $f(x) = 2συν^2(π - x) - 3ημ\left(\frac{π}{2} + x\right) + α = 2συν^2 x - 3συνx + α$.

β) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $-x \in \mathbb{R}$.

Έχουμε: $f(-x) = 2συν^2(-x) - 3συν(-x) + α = 2συν^2 x - 3συνx + α = f(x)$.

Άρα η συνάρτηση f είναι άρτια.

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $M(\frac{π}{3}, 1)$ αν και μόνον αν $f\left(\frac{π}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow 2συν^2\frac{π}{3} - 3συν\frac{π}{3} + α = 1 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{1}{4} - 3 \cdot \frac{1}{2} + α = 1 \Leftrightarrow α = 2$.

δ) Με $a = 2$ έχουμε $f(x) = 2συν^2x - 3συνx + 2$.

Για να βρούμε τις τετμημένες των κοινών σημείων των δύο γραφικών παραστάσεων λύνουμε την εξίσωση :

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2συν^2x - 3συνx + 2 = 2ημ^2x + 9συνx - 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2συν^2x - 3συνx + 2 = 2(1 - συν^2x) + 9συνx - 9 \Leftrightarrow 4συν^2x - 12συνx + 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$(2συνx - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow συνx = \frac{3}{2}$, αδύνατη.

Αφού η παραπάνω εξίσωση είναι αδύνατη, δεν υπάρχουν σημεία τομής των δύο γραφικών παραστάσεων.

15. Θέμα 15821 Αρχέτυπο

α) Να εξετάσετε αν υπάρχει γωνία x τέτοια ώστε $ημx = συνx = 0$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι εξίσωση $\sqrt{3} \cdot ημx = 3 \cdot συνx$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $εφx = \sqrt{3}$ και κατόπιν να τη λύσετε στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

(Μονάδες 7)

γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \sqrt{3} \cdot ημx$ και $g(x) = 3 \cdot συνx$ στο ίδιο σύστημα αξόνων στο διάστημα $[0, 2\pi]$ και να ερμηνεύσετε γραφικά το συμπέρασμα του ερωτήματος β).

(Μονάδες 7)

δ) Αξιοποιώντας το ερώτημα γ) να λύσετε γραφικά την ανίσωση $\sqrt{3} \cdot ημx < 3 \cdot συνx$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Αν υπήρχε γωνία x τέτοια ώστε $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x = 0$, τότε από τη βασική τριγωνομετρική ταυτότητα $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$ θα είχαμε $0+0=1$, το οποίο είναι άτοπο. Συνεπώς δεν υπάρχει γωνία x τέτοια ώστε $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x = 0$.

β) Αν $\sigma\upsilon\nu x = 0$ τότε από την εξίσωση $\sqrt{3}\cdot\eta\mu x = 3\cdot\sigma\upsilon\nu x$ θα είχαμε και $\eta\mu x = 0$, το οποίο όμως όπως δείξαμε στο α) είναι άτοπο. Συνεπώς $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$.

Με $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$ έχουμε ισοδύναμα

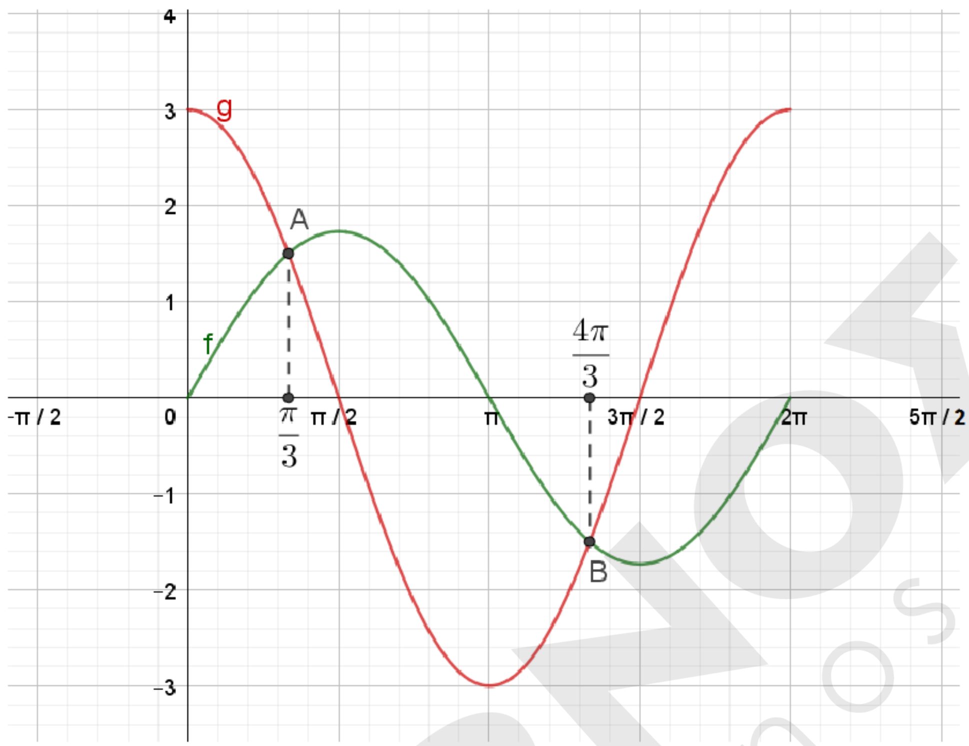
$$\sqrt{3}\cdot\eta\mu x = 3\cdot\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{3}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{3}$$

η οποία στο διάστημα $[0, 2\pi]$ έχει λύσεις τις $x = \frac{\pi}{3}$ και $x = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$.

γ) Με βάση τον παρακάτω πίνακα τιμών

x	0	π/2	π	3π/2	2π
$f(x)=\sqrt{3}\cdot\eta\mu x$	0	$\sqrt{3}$	0	$-\sqrt{3}$	0
$g(x)=3\cdot\sigma\upsilon\nu x$	3	0	-3	0	3

οι ζητούμενες γραφικές παραστάσεις φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Όπως βλέπουμε στο παραπάνω σχήμα οι γραφικές παραστάσεις των f, g τέμνονται στα σημεία Α και Β οι τετμημένες των οποίων είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=g(x) \Leftrightarrow \sqrt{3}\cdot \eta\mu x = 3\cdot \sigma\upsilon\nu x$, που όπως βρήκαμε στο ερώτημα β) είναι $\frac{\pi}{3}$ και $\frac{4\pi}{3}$ αντίστοιχα. Αυτή είναι η ζητούμενη γραφική ερμηνεία.

δ) Η ανίσωση $\sqrt{3}\cdot \eta\mu x < 3\cdot \sigma\upsilon\nu x$ στο διάστημα $[0,2\pi]$, γραφικά σημαίνει να βρούμε για ποιες τιμές του x στο διάστημα $[0,2\pi]$, η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g. Από το παραπάνω σχήμα βλέπουμε ότι αυτό συμβαίνει για $x \in \left[0,\frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right]$.

16. Θέμα 20645 Αρχέτυπο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, $g(x)=\sigma\upsilon\nu x$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να περιγράψετε με ποιο τρόπο από τη γραφική παράσταση της g προκύπτει η γραφική παράσταση της f.

(Μονάδες 6)

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τις τιμές $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $f(\pi)$.

(Μονάδες 6)

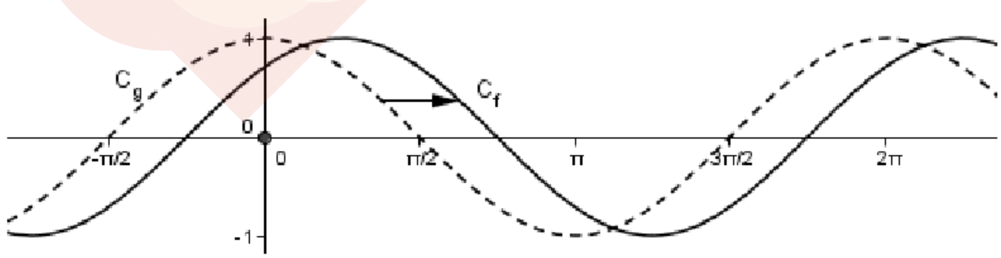
δ) Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{2}f(x)+1=0$.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Από την ισότητα $f(x)=g\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ συμπεραίνουμε ότι η γραφική παράσταση της f προκύπτει από τη γραφική παράσταση της g, αν την μετατοπίσουμε κατά $\frac{\pi}{4}$ μονάδες προς τα δεξιά.

β) Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γνωστή γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\sigma\upsilon\nu x$ (με διακεκομμένη γραμμή) και η γραφική παράσταση της f που προκύπτει από αυτή, αν την μεταφέρουμε δεξιά κατά $\frac{\pi}{4}$ μονάδες.



γ) Είναι:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

και

$$f(\pi)=f\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

δ) Με τη βοήθεια του προηγούμενου ερωτήματος, έχουμε:

$$\sqrt{2}f(x)+1=0\Leftrightarrow f(x)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow f(x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi+\frac{3\pi}{4}\\ \text{ή}\\ x-\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi-\frac{3\pi}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\kappa\pi+\pi\\ \text{ή}\\ x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{2}\end{cases}\quad \mu\varepsilon\ \kappa\in\mathbb{Z}$$

17. Θέμα 20712 Αρχέτυπο

Σε μια θαλάσσια περιοχή, λόγω της παλίρροιας, η στάθμη των υδάτων αυξομειώνεται. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της ημιτονοειδούς συνάρτησης f, που δίνει σε μέτρα το ύψος της στάθμης των υδάτων συναρτήσει του χρόνου t σε ώρες. Να βρείτε :

α) την υψομετρική διαφορά ανάμεσα στην υψηλότερη στάθμη (πλημμυρίδα) και τη χαμηλότερη στάθμη (άμπωτη).

(Μονάδες 6)

β) την περίοδο του φαινομένου της παλίρροιας.

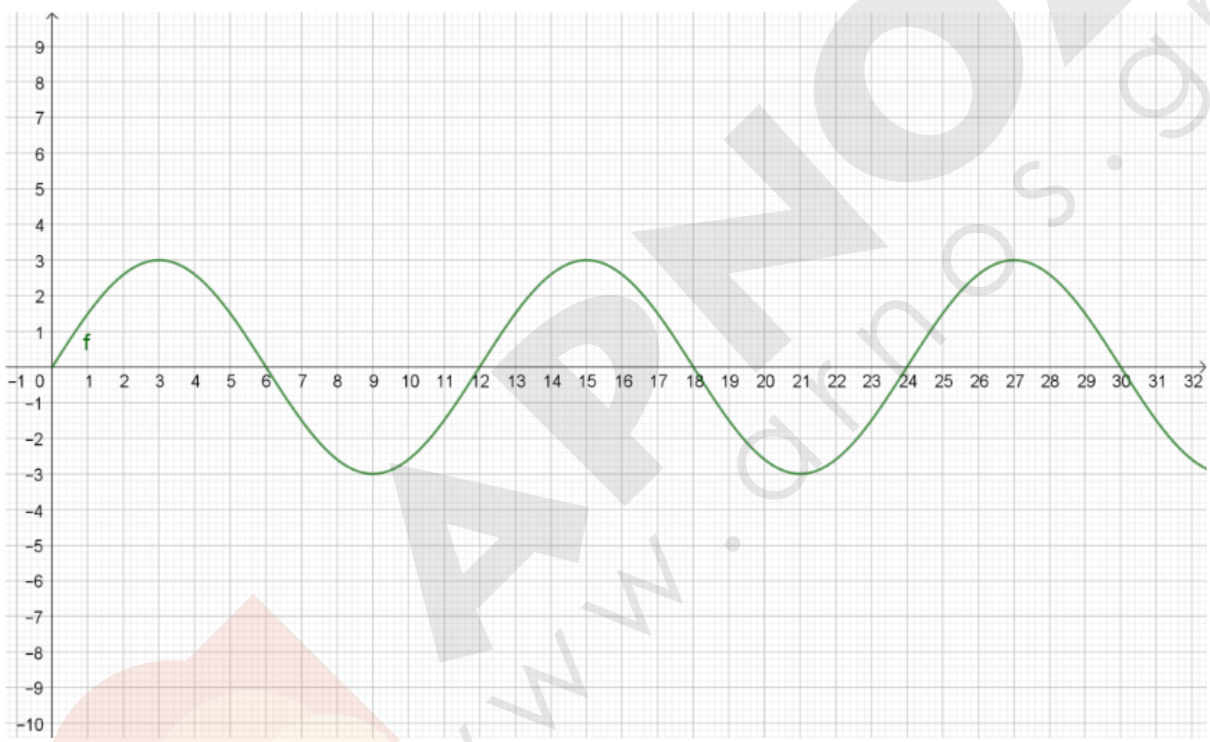
(Μονάδες 6)

γ) τον τύπο της συνάρτησης f .

(Μονάδες 6)

δ) ποιες ώρες, στη διάρκεια μιας ημέρας, η στάθμη των υδάτων είναι $\frac{3}{2}$ μέτρα.

(Μονάδες 7)



ΛΥΣΗ

α) Γραφικά η υψομετρική διαφορά ανάμεσα στην υψηλότερη πλημμυρίδα και τη χαμηλότερη άμπωτη, εκφράζεται με τη διαφορά του ελαχίστου -3 της συνάρτησης f, από το μέγιστό της 3. Συνεπώς η ζητούμενη υψομετρική διαφορά είναι 6 μέτρα.

β) Από το σχήμα παρατηρούμε ότι το μικρότερο διάστημα που απαιτείται για να αρχίσει να επαναλαμβάνεται η γραφική παράσταση είναι 12 ώρες. Συνεπώς η ζητούμενη περίοδος είναι 12.

γ) Ο τύπος της ημιτονοειδούς συνάρτησης f είναι της μορφής $f(t)=\rho\cdot\eta\mu(\omega t)$ όπου $\rho>0, \omega>0$. Δεδομένου ότι η μέγιστη τιμή της f είναι 3 συμπεραίνουμε ότι $\rho=3$. Επίσης η περίοδος είναι 12 οπότε $\dfrac{2\pi}{\omega}=12\Leftrightarrow\omega=\dfrac{\pi}{6}$. Συνεπώς η συνάρτηση f έχει τύπο $f(t)=3\cdot\eta\mu(\dfrac{\pi}{6}\cdot t)$.

δ) Αναζητούμε τις λύσεις της εξίσωσης $f(t)=\dfrac{3}{2}$, όπου $0\le t\le 24$. Είναι

$$f(t)=\frac{3}{2}\Leftrightarrow 3\cdot\eta\mu(\frac{\pi}{6}\cdot t)=\frac{3}{2}\Leftrightarrow \eta\mu(\frac{\pi}{6}\cdot t)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\eta\mu(\frac{\pi}{6}\cdot t)=\eta\mu(\frac{\pi}{6})\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\pi}{6}\cdot t=2\kappa\pi+\dfrac{\pi}{6}\\ \quad\acute{\eta}\\ \dfrac{\pi}{6}\cdot t=2\kappa\pi+\pi-\dfrac{\pi}{6}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=12\kappa+1\\ \quad\acute{\eta}\\ t=12\kappa+5\end{cases},\ \kappa\in\mathbb{Z}$$

Επειδή $0\le t\le 24$, έχουμε τελικά ότι οι ζητούμενες ώρες είναι 1, 5, 13, 17.

Σχόλιο: Αυτό επιβεβαιώνεται και γραφικά από τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f, με την ευθεία $y=\dfrac{3}{2}$.

18. Θέμα 21244 Αρχέτυπο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\alpha+1}{2}\sigma\upsilon\nu(\beta x)$, με $\alpha,\beta>0$, η οποία έχει ελάχιστο -2 και περίοδο $\frac{\pi}{2}$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha=3$ και $\beta=4$.

(Μονάδες 5)

β) Δίνεται η παράσταση $\mathrm{A}=\frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\varepsilon\varphi(\pi-x)\cdot\eta\mu(2\pi+x)}{\sigma\upsilon\nu(3\pi-x)\cdot\sigma\varphi\left(\frac{7\pi}{2}-x\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}$. Να δείξετε ότι $\mathrm{A}=-1$.

(Μονάδες 10)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=2\mathrm{A}$, στο διάστημα $\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση $f(x)=\rho\cdot\sigma\upsilon\nu\omega x$, με $\rho,\omega>0$:

Έχει ελάχιστο $-\rho$, οπότε έχουμε $-\frac{\alpha+1}{2}=-2\Leftrightarrow\alpha+1=4\Leftrightarrow\alpha=3$.

Ακόμα έχει περίοδο $\mathrm{T}=\frac{2\pi}{\omega}$, οπότε έχουμε $\frac{2\pi}{\beta}=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\beta=4$.

Τελικά, η συνάρτηση είναι $f(x)=2\sigma\upsilon\nu 4x$. (1)

β) Έχουμε για τον αριθμητή:

$$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sigma\upsilon\nu x,\ \varepsilon\varphi(\pi-x)=-\varepsilon\varphi x,\ \eta\mu(2\pi+x)=\eta\mu x.$$

Έχουμε για τον παρονομαστή :

$$\sigma\upsilon\nu(3\pi-x)=\sigma\upsilon\nu(\pi-x)=-\sigma\upsilon\nu x,$$

$$\sigma\varphi\left(\frac{7\pi}{2}-x\right)=\sigma\varphi\left(3\pi+\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)=\sigma\varphi\left(\pi+\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)=\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\varepsilon\varphi x,$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-(-x)\right)=\eta\mu(-x)=-\eta\mu x.$$

Αντικαθιστώντας έχουμε $\mathrm{A}=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x\cdot(-\varepsilon\varphi x)\cdot\eta\mu x}{-\sigma\upsilon\nu x\cdot\varepsilon\varphi x\cdot(-\eta\mu x)}=-1.$

γ) Έχουμε, λόγω της (1) και του β) ερωτήματος:

$$f(x)=2\mathrm{A}\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu 4x=-2\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 4x=-1\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 4x=\sigma\upsilon\nu\pi\Leftrightarrow$$

$$4x=2\kappa\pi\pm\pi\Leftrightarrow x=\frac{\kappa\pi}{2}\pm\frac{\pi}{4},\ \kappa\in\mathbb{Z}.$$

Επειδή πρέπει $x\in\left[\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right]$, δηλαδή $\pi\le x\le\dfrac{3\pi}{2}$, διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

$$\pi\le\frac{\kappa\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\le\frac{3\pi}{2}\Leftrightarrow 1\le\frac{\kappa}{2}+\frac{1}{4}\le\frac{3}{2}\Leftrightarrow$$
$$\frac{3}{4}\le\frac{\kappa}{2}\le\frac{5}{4}\Leftrightarrow\frac{3}{2}\le\kappa\le\frac{5}{2}\overset{\kappa\in\mathbb{Z}}{\Rightarrow}\kappa=2.$$

Άρα $x=\pi+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{5\pi}{4}$

$$\pi\le\frac{\kappa\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\le\frac{3\pi}{2}\Leftrightarrow 1\le\frac{\kappa}{2}-\frac{1}{4}\le\frac{3}{2}\Leftrightarrow$$
$$\frac{5}{4}\le\frac{\kappa}{2}\le\frac{7}{4}\Leftrightarrow\frac{5}{2}\le\kappa\le\frac{7}{2}\overset{\kappa\in\mathbb{Z}}{\Rightarrow}\kappa=3.$$

Άρα, πάλι $x=\pi+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{5\pi}{4}$.