Κεφ. 3.4. - Τράπεζα Θεμάτων 2022 - Άλγεβρα Β' Λυκείου

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ & ΛΥΣΕΙΣ

Θέμα 2 – Κωδικοί:

15009, 15091, 15172, 15644, 15788, 15809, 15810, 16131, 20660, 20807, 20867, 22003, 22007

Η Τράπεζα Θεμάτων για την Άλγεβρα Β' Λυκείου είναι μία μεγάλη «θάλασσα». Εμείς όμως έχουμε φροντίσει για εσένα, συγκεντρώνοντας εκείνα τα θέματα που αποτελούν τη «βάση» της γνώσης και για τα υπόλοιπα. Μελετώντας και κατανοώντας το μοτίβο σκέψης για τα συγκεκριμένα, μπορείς να λύσεις με επιτυχία και τα υπόλοιπα θέματα. Στην ιστοσελίδα μας www.arnos.gr για το Course της Άλγεβρας, μελετάς και προετοιμάζεσαι με την αναλυτική διδασκαλία σε ασκήσεις και θέματα, στο ύφος της Τράπεζας.

1. **Θέμα 15009** **Αρχέτυπο**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -3συνx, x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f.

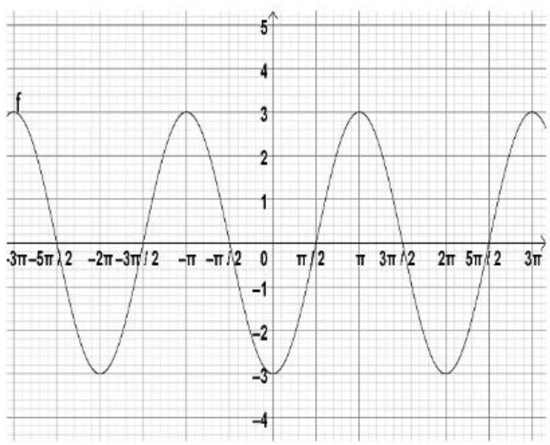
(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f.

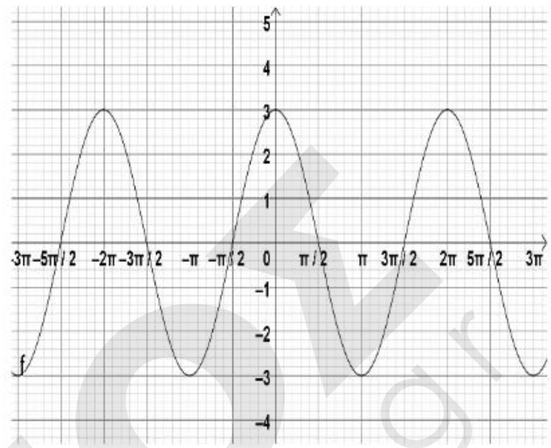
(Μονάδες 7)

γ) Από τις παρακάτω τέσσερις γραφικές παραστάσεις μία μόνο αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση της f, να επιλέξετε αυτή που αντιστοιχεί στη συνάρτηση $f(x) = -3συνx$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

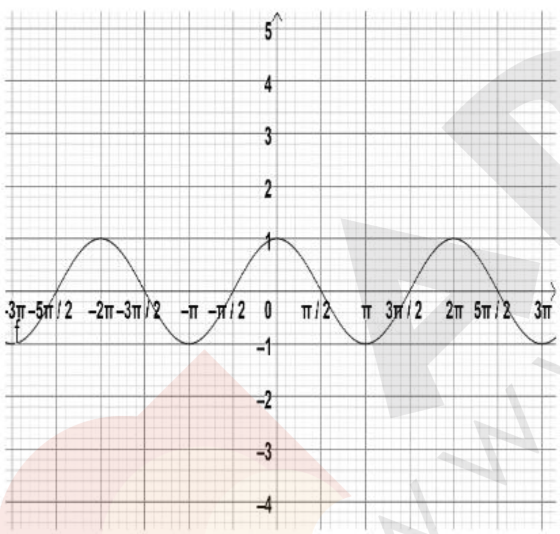
Α)



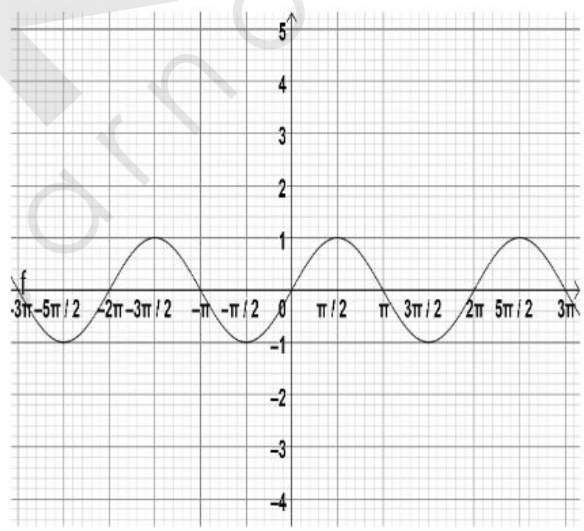
Β)



Γ)



Δ)



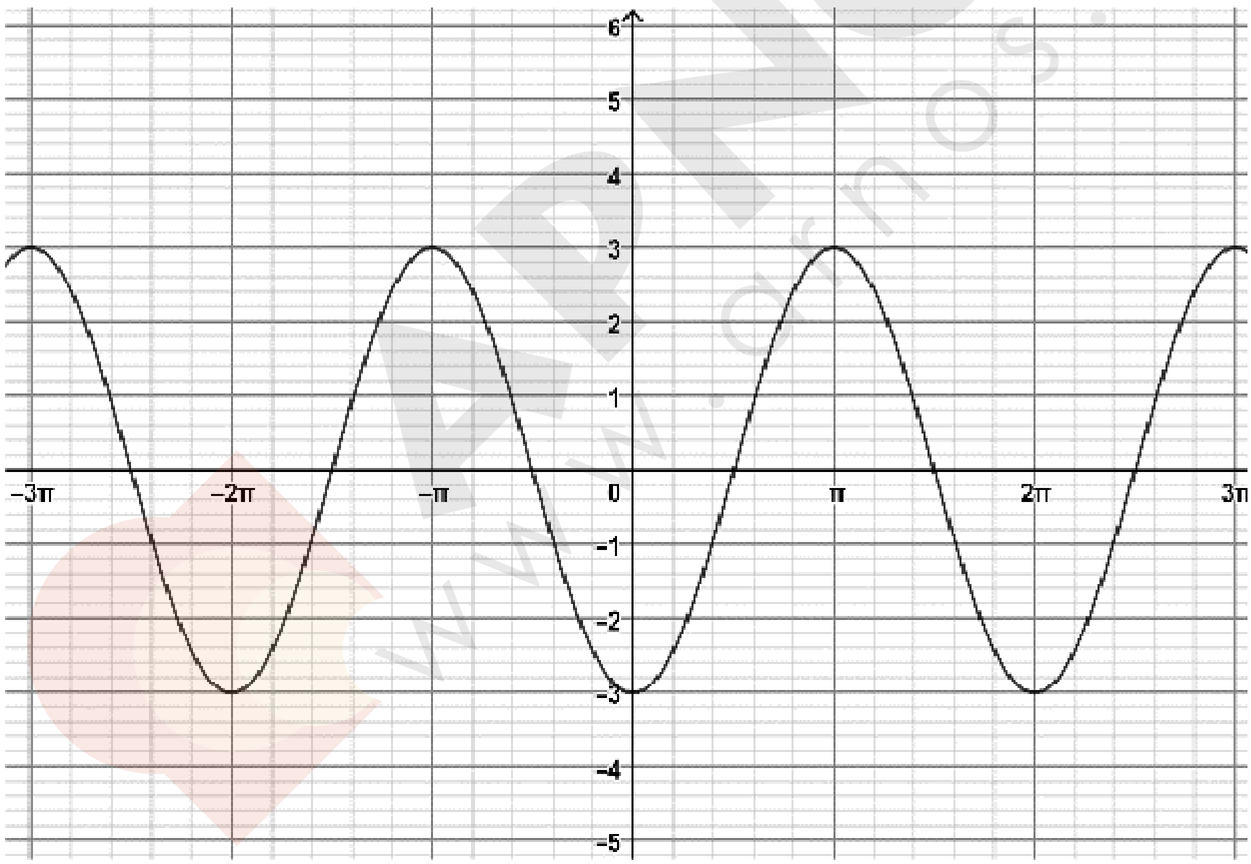
(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση είναι της μορφής $f(x) = \rho\sigma\upsilon\nu x, \rho < 0$ με ρ=-3 , οπότε η ελάχιστη τιμή της είναι ίση με -3 και η μέγιστη τιμή της είναι ίση με 3.

β) Η συνάρτηση είναι της μορφής $f(x) = \rho\sigma\upsilon\nu x$ με περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega}$ με $\omega = 1$ άρα η περίοδος της συνάρτησης f είναι 2π.

γ) Το σχήμα Α) είναι η γραφική παράσταση της $f(x) = -3\sigma\upsilon\nu x, x \in \mathbb{R}$, γιατί είναι η μόνη που έχει μέγιστη τιμή 3 για $x = \pi$ και ελάχιστη -3 για $x = 0$ και $x = 2\pi$.



2. Θέμα 15091

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{2} \cdot \sigma\upsilon\nu x, x \in R$.

α)

i. Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης.

(Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε την μέγιστη και ελάχιστη τιμής της.

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τον αριθμό $f(2025\pi)$.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Καθώς η συνάρτηση είναι της μορφής $g(x) = \rho \cdot \eta\mu(\omega x)$ με $\rho = \sqrt{2}, \omega = 1$, θα έχουμε:

i. Η περίοδος της συνάρτησης είναι $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi$.

ii. Η μέγιστη τιμή της είναι $|\rho| = \sqrt{2}$ και η ελάχιστη τιμή της $-|\rho| = -\sqrt{2}$.

β) $f(2025\pi) = \sqrt{2} \cdot \sigma\upsilon\nu(2 \cdot 1012 \cdot \pi + \pi) = \sqrt{2} \cdot \sigma\upsilon\nu\pi = -\sqrt{2}$.

3. Θέμα 15172 **Αρχέτυπο**

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 4\eta\mu(11\pi - x),\ \ x\epsilon\mathbb{R}$$

α) Να δείξετε ότι:

i. $\eta\mu(11\pi - x) = \eta\mu x,\ x\epsilon\mathbb{R}.$

(Μονάδες 6)

ii. $f(x) = 4\eta\mu x,\ \ x\epsilon\mathbb{R}.$

(Μονάδες 4)

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτηση $f(x) = 4\eta\mu x$, όταν $x\epsilon[0,2\pi]$.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) i. Στην παράσταση $\eta\mu(11\pi - x)$ κάνουμε την αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο,

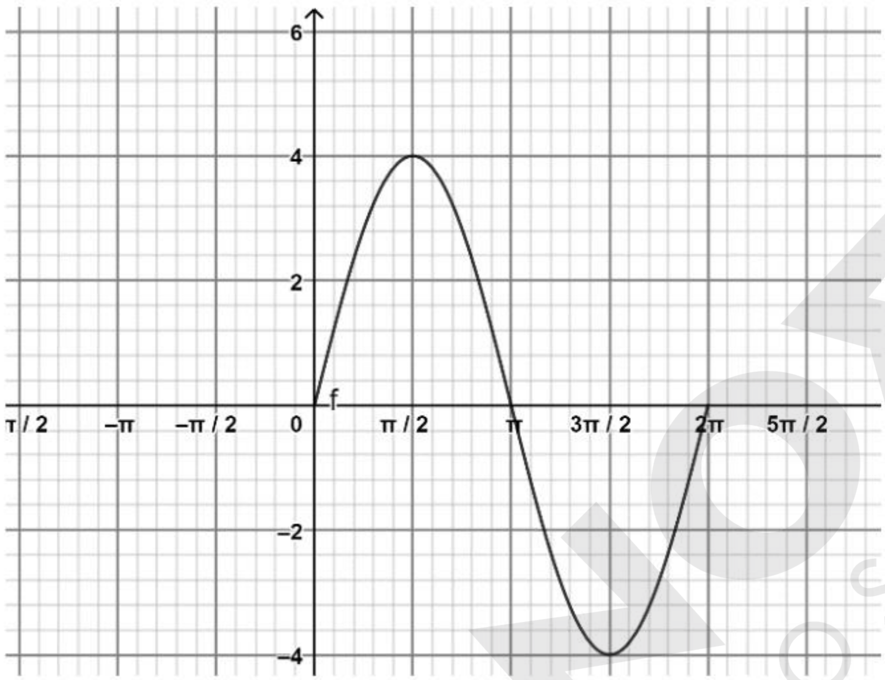
$\eta\mu(11\pi - x) = \eta\mu(10\pi + \pi - x) = \eta\mu(5 \cdot 2\pi + \pi - x) = \eta\mu(\pi - x) = \eta\mu x$, το ζητούμενο.

ii. Στον τύπο της συνάρτησης αντικαθιστούμε το $\eta\mu(11\pi - x)$ με ημx, άρα $f(x) = 4\eta\mu x.$

β) Παρατηρούμε πως η $f(x) = 4\eta\mu x$ έχει την μορφή ρημωx με ρ=4 και ω=1. Άρα η συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή 4 και ελάχιστη τιμή -4 με περίοδο 2π. Έχοντας τα παραπάνω χαρακτηριστικά και τον παρακάτω πίνακα τιμών στο διάστημα [0,2π],

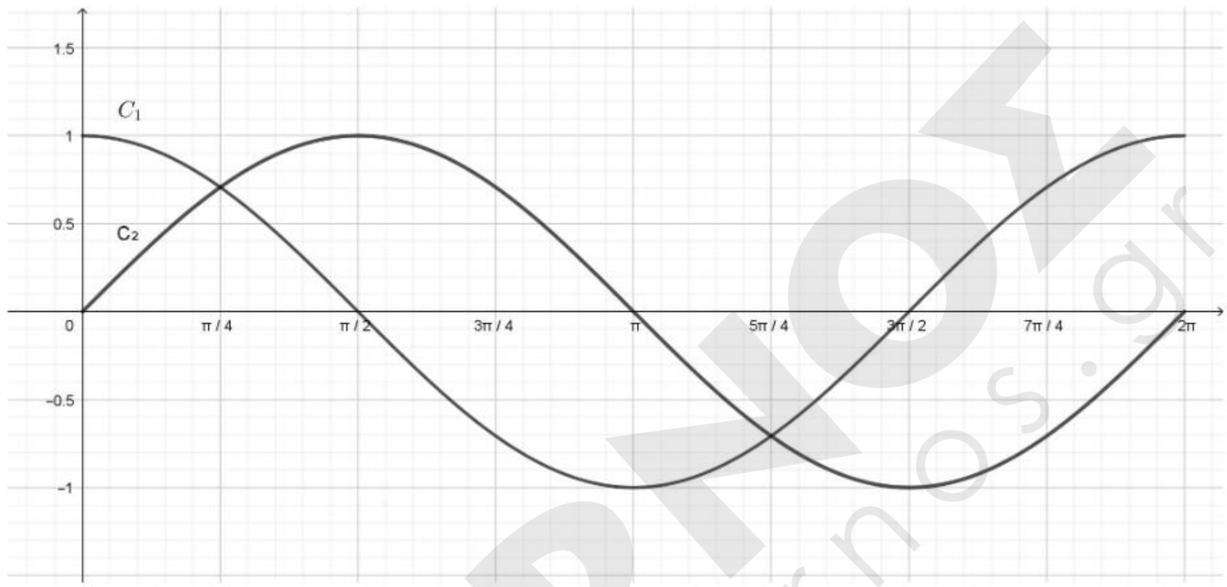
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
4ημx	0	4	0	-4	0

στο ορθογώνιο σύστημα αξόνων προκύπτει η παρακάτω γραφική παράσταση


6
4
2
−2
−4
τ / 2
−π
−π / 2
0
π / 2
π
3π / 2
2π
5π / 2
f

4. Θέμα 15644 Αρχέτυπο

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων έχουμε σχεδιάσει δύο γραφικές παραστάσεις C_1 και C_2 για $x \in [0, 2\pi]$.



α) Αν οι γραφικές παραστάσεις είναι των συναρτήσεων $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ και $g(x) = \eta\mu x$ για $x \in [0, 2\pi]$, ποια από τις C_1, C_2 είναι η γραφική παράσταση της $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ και ποια της $g(x) = \eta\mu x$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

β) Με την βοήθεια του σχήματος να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

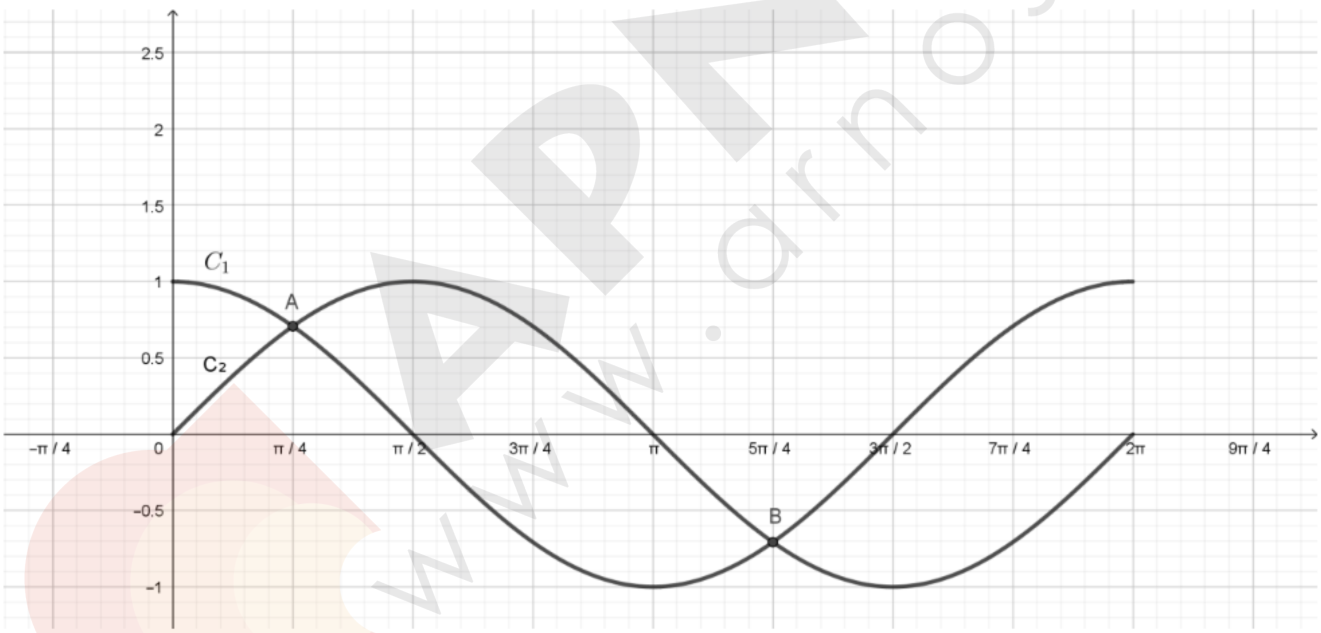
(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

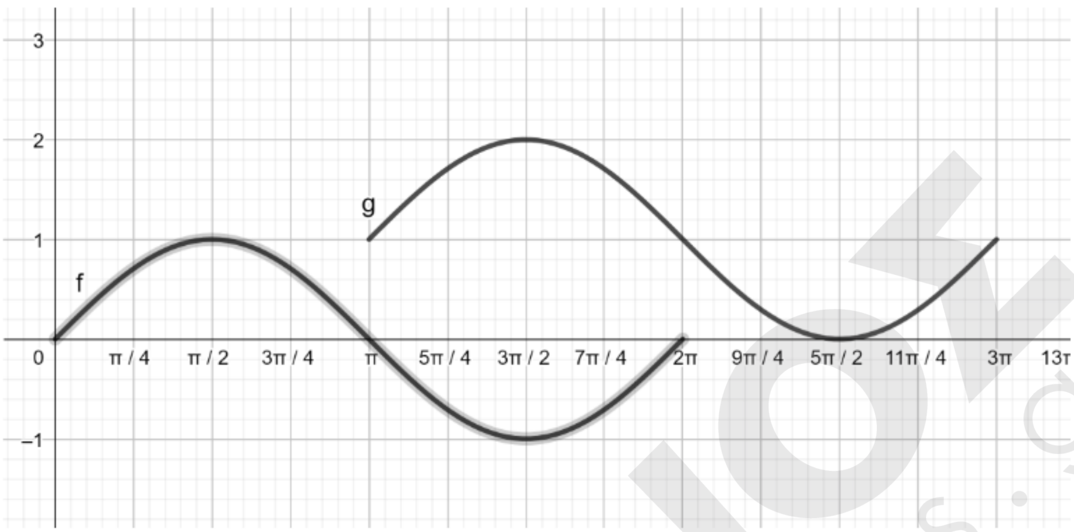
α) Είναι $f(x)=\sigma\upsilon\nu x \overset{x=0}{\Rightarrow} f(0)=\sigma\upsilon\nu 0 \Rightarrow f(0)=1$. Άρα η C_1 είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f. Ακόμα $g(x)=\eta\mu x \overset{x=0}{\Rightarrow} g(0)=\eta\mu 0 \Rightarrow g(0)=0$. Άρα η C_2 είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης g.

β) Οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων.

Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων είναι τα A και B, με τετμημένες $x_1=\dfrac{\pi}{4}$ και $x_2=\dfrac{5\pi}{4}$.



5. Θέμα 15788 Αρχέτυπο



Στο παραπάνω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\eta\mu x$ στο διάστημα $[0,2\pi]$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης g που προέκυψε από την f με δύο διαδοχικές μετατοπίσεις. Με την βοήθεια του σχήματος να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g, την μέγιστη τιμή της και σε ποια θέση την αποκτά.

(Μονάδες 13)

β)

i. τις δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της f από τις οποίες προέκυψε η g.

(Μονάδες 6)

ii. τον τύπο της g.

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Το πεδίο ορισμού συνάρτησης σχεδιασμένης σε σύστημα αξόνων είναι η προβολή της γραφικής παράστασης στον άξονα $x'x$. Οπότε είναι $D_g = [\pi, 3\pi]$.

Η μέγιστη τιμή της συνάρτησης g είναι 2 στην θέση $x = \frac{3\pi}{2}$.

β)

i. Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της f. Η γραφική παράσταση της f μετατοπίστηκε προς τα «δεξιά» κατά π και προς τα «πάνω» κατά 1.

ii. Έχουμε $g(x) = f(x-\pi)+1$, δηλαδή $g(x) = \eta\mu(x-\pi)+1$ με πεδίο ορισμού το διάστημα $[\pi, 3\pi]$.

6. Θέμα 15809 Αρχέτυπο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu 2x$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την περίοδο καθώς και τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της f.

(Μονάδες 6)

β)

i. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$					
$f(x)=\eta\mu 2x$					

(Μονάδες 10)

ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα μίας περιόδου.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

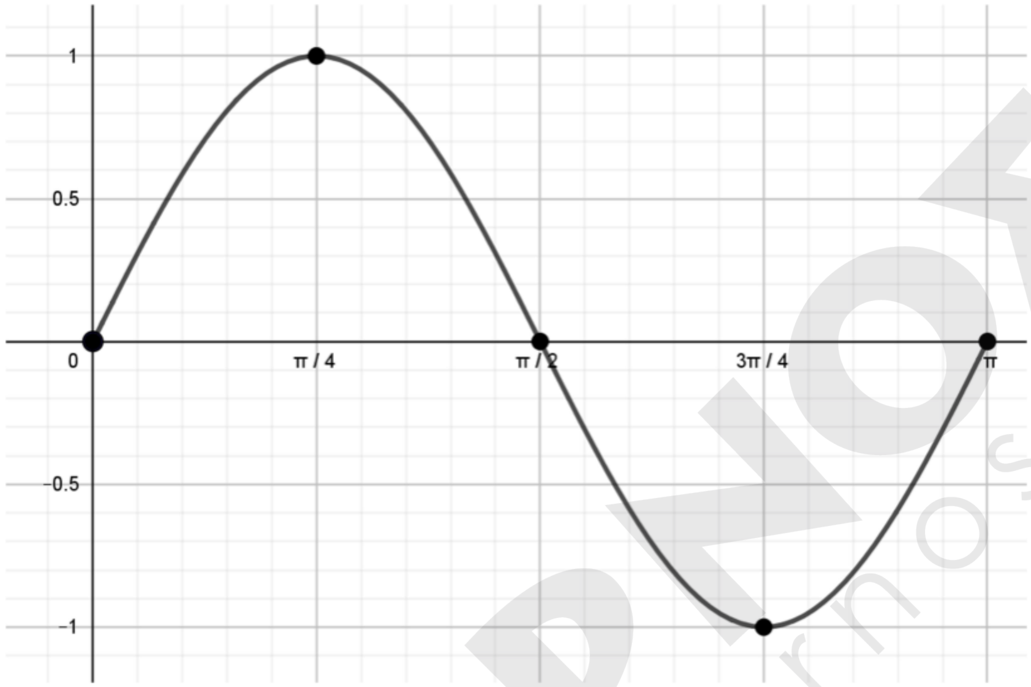
α) Η περίοδος τη συνάρτησης είναι $\mathrm{T}=\frac{2\pi}{2}=\pi$, η μέγιστη τιμή της $\max f(x)=1$ και η ελάχιστη $\min f(x)=-1$.

β)

i. Ο πίνακα τιμών της f συμπληρωμένος είναι:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x)=\eta\mu 2x$	0	1	0	-1	0

ii. Με βάση τον πίνακα τιμών στο βi) ερώτημα, η γραφική παράσταση της f στο διάστημα $\left[0,\pi\right]$, δηλαδή σε διάστημα μιας περιόδου, είναι η παρακάτω:



7. Θέμα 15810

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \sigma\upsilon\nu 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την περίοδο καθώς και τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της g.

(Μονάδες 6)

β)

i. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$					
$g(x) = \sigma\upsilon\nu 2x$					

(Μονάδες 10)

ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της g σε διάστημα μίας περιόδου.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

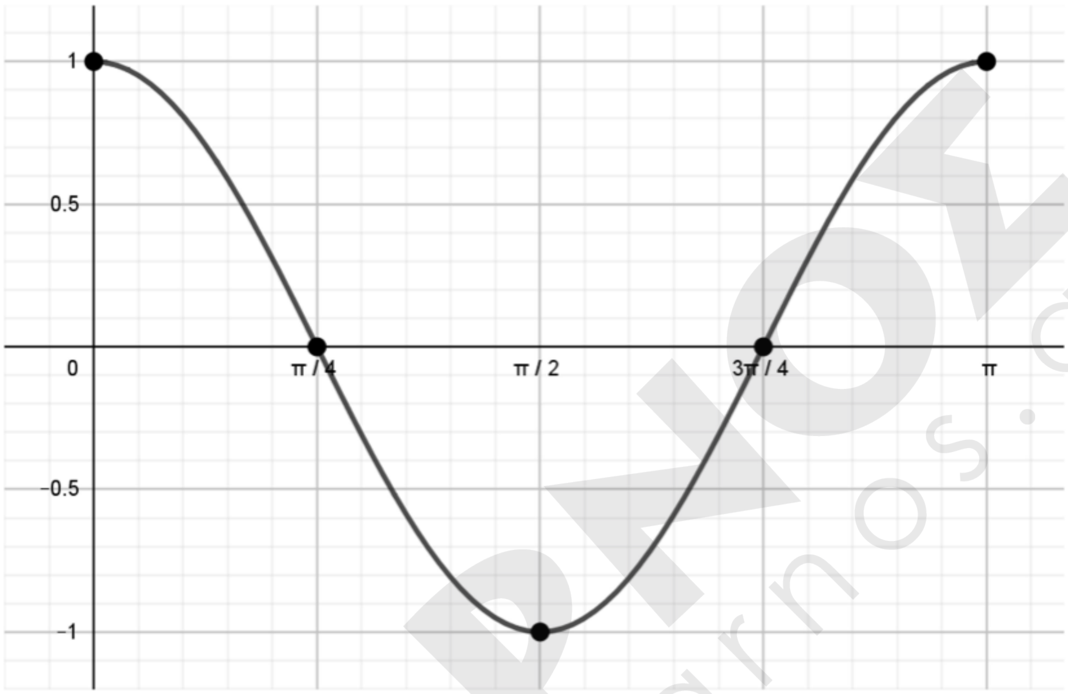
α) Η περίοδος τη συνάρτησης είναι $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$, η μέγιστη τιμή της $\max g(x) = 1$ και η ελάχιστη $\min g(x) = -1$.

β)

i. Ο πίνακα τιμών της g συμπληρωμένος είναι:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$g(x) = \sigma\upsilon\nu 2x$	1	0	-1	0	1

ii. Με βάση τον πίνακα τιμών στο βi) ερώτημα, η γραφική παράσταση της g στο διάστημα $[0,\pi]$, δηλαδή σε διάστημα μιας περιόδου, είναι η παρακάτω:



8. Θέμα 16131 Αρχέτυπο

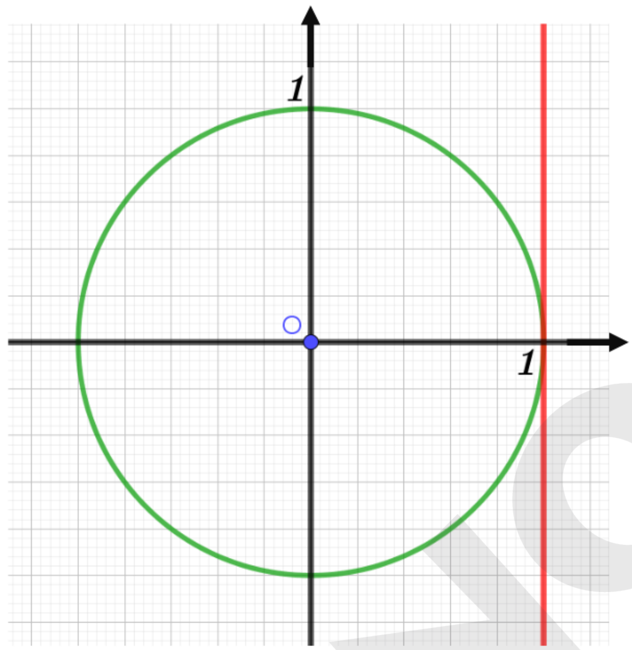
Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = εφx$, $x \in R - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$, όπου $k \in Z$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$ στο διάστημα $(0, 2\pi)$.

(Μονάδες 15)

β) Να μεταφέρετε στο γραπτό σας το παρακάτω σχήμα, στο οποίο να παραστήσετε τις λύσεις της παραπάνω εξίσωσης.

(Μονάδες 10)



ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση γράφεται $εφx = εφ\frac{\pi}{4}$, άρα $x = λ\pi + \frac{\pi}{4}$, όπου $λ \in Z$.

Για $λ = 0$ παίρνουμε $x = \frac{\pi}{4}$, δεκτή.

Για $λ = 1$ παίρνουμε $x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$, δεκτή.

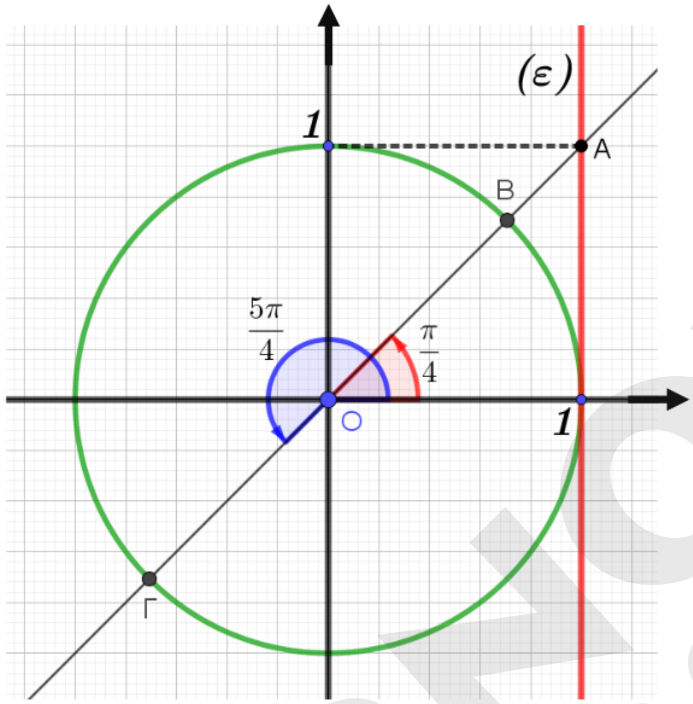
Για $λ = 2$ παίρνουμε $x = 2\pi + \frac{\pi}{4} > 2\pi$, απορρίπτεται.

Για $λ = -1$ παίρνουμε $x = -\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} < 0$, απορρίπτεται.

Επομένως δεν υπάρχουν άλλες λύσεις της εξίσωσης στο διάστημα $(0, 2\pi)$ εκτός από τις $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{5\pi}{4}$.

β) Γνωρίζουμε ότι η εφω για μια γωνία ω, είναι η τεταγμένη του σημείου στο οποίο η τελική πλευρά της γωνίας ω τέμνει τον άξονα των εφαπτομένων (την ευθεία (ε) του σχήματος).

Οι ημιευθείες ΟΒ και ΟΓ είναι οι τελικές πλευρές των γωνιών $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$ αντίστοιχα και οι οποίες τέμνουν τον άξονα των εφαπτομένων στο σημείο Α του οποίου η τεταγμένη είναι 1.



9. Θέμα 20660

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(180° - x) + \sigma\upsilon\nu(90° - x)$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2\eta\mu x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 12)

β)

i. Να βρείτε την περίοδο καθώς και τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της f.

(Μονάδες 6)

ii. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f για $0 \le x \le 2\pi$.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε με αναγωγή στο 1^o τεταρτημόριο:

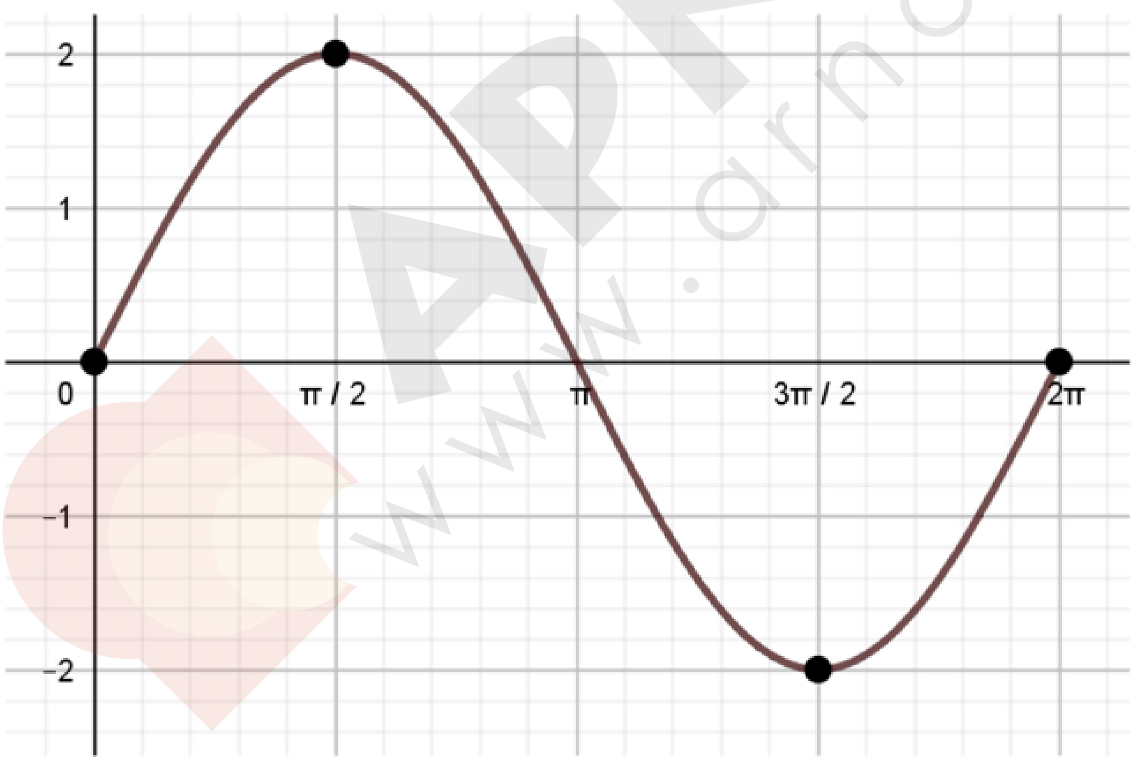
$f(x)=\eta\mu(180^\circ-x)+\sigma\upsilon\nu(90^\circ-x)=\eta\mu x+\eta\mu x=2\eta\mu x$, $x\in\mathbb{R}$.

β)

i. Η περίοδος της συνάρτησης είναι $\mathrm{T}=2\pi$, η μέγιστη τιμή είναι 2 και η ελάχιστη -2, αφού:

$$-1\le\eta\mu x\le 1 \quad\Leftrightarrow$$
$$-2\le 2\eta\mu x\le 2.$$

ii. Η γραφική παράσταση της f για $0\le x\le 2\pi$, δηλαδή σε διάστημα μιας περιόδου, είναι η παρακάτω:



10. Θέμα 20807 Αρχέτυπο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu(\pi+x)+\eta\mu(-x)$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=-2\eta\mu x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και να βρείτε την περίοδο αυτής.

(Μονάδες 12)

β)

i. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x)=-2\eta\mu x$					

(Μονάδες 6)

ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $0\le x\le 2\pi$.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε με αναγωγή στο 1° τεταρτημόριο:

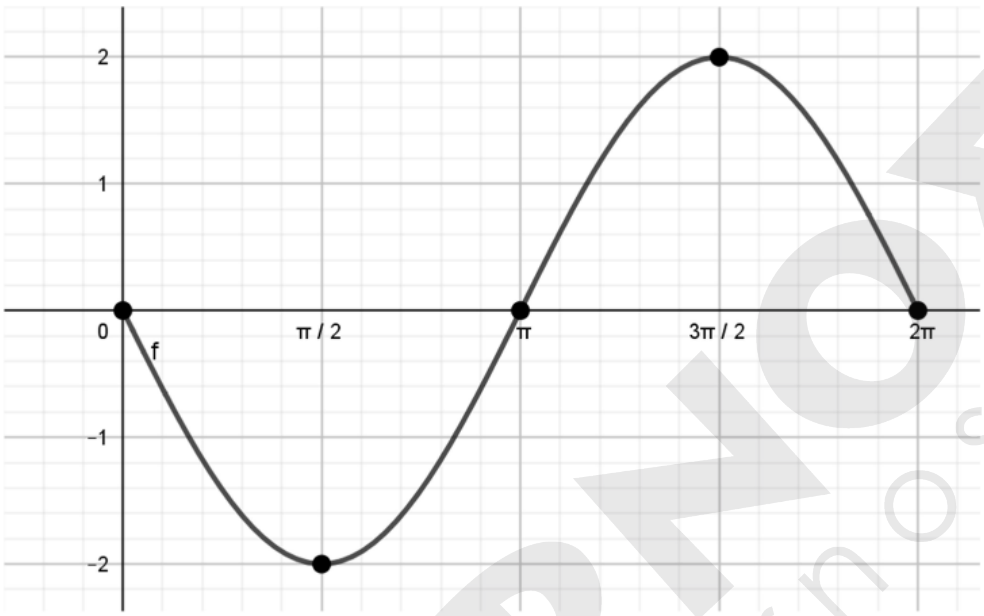
$f(x)=\eta\mu(\pi+x)+\eta\mu(-x)=-\eta\mu x-\eta\mu x=-2\eta\mu x$, $x\in\mathbb{R}$. Η περίοδος της συνάρτησης είναι $\mathrm{T}=2\pi$.

β)

i.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x)=-2\eta\mu x$	0	-2	0	2	0

ii. Η γραφική παράσταση της f για $0 \le x \le 2\pi$, δηλαδή σε διάστημα μιας περιόδου, είναι η παρακάτω:



11. Θέμα 20867

Δίνεται η παράσταση $A = \sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x$.

α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης A για $x = 0$.

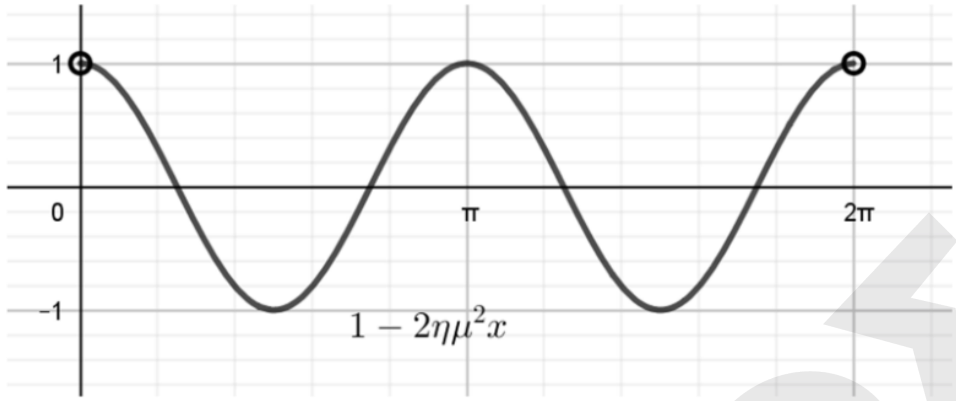
(Μονάδες 7)

β) Να δείξετε ότι $A = 1 - 2\eta\mu^2 x$.

(Μονάδες 9)

γ) Με χρήση της παρακάτω γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τύπο $1 - 2\eta\mu^2 x$ και του ερωτήματος β), να λύσετε την εξίσωση $A = 1$, για $0 < x < 2\pi$.

(Μονάδες 9)



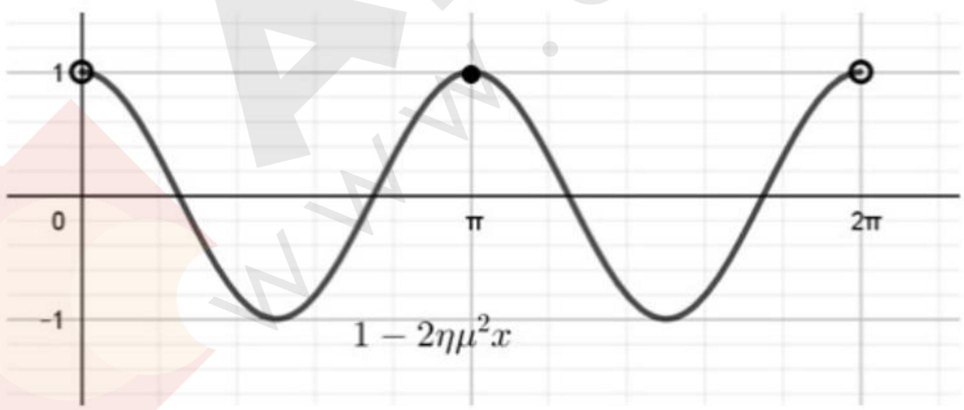
ΛΥΣΗ

α) Η τιμή της παράστασης για $x = 0$ είναι: $\mathrm{A} = \sigma\upsilon\nu^2 0 - \eta\mu^2 0 = 1 - 0 = 1$.

β) Γνωρίζουμε ότι: $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 - \eta\mu^2 x$. Οπότε έχουμε:

$\mathrm{A} = \sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x = \left(1 - \eta\mu^2 x\right) - \eta\mu^2 x = 1 - 2\eta\mu^2 x$.

γ) Έχουμε ισοδύναμα: $\mathrm{A} = 1 \overset{(\beta)}{\Leftrightarrow} 1 - 2\eta\mu^2 x = 1$. Με χρήση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τύπο $1 - 2\eta\mu^2 x$,



παρατηρούμε ότι $1 - 2\eta\mu^2 x = 1$ για $x = \pi$, αφού $0 < x < 2\pi$. Άρα η λύση της εξίσωσης $\mathrm{A} = 1$, για $0 < x < 2\pi$, είναι $x = \pi$.

12. Θέμα 22003 **Αρχέτυπο**

Δίδεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = ημ(2πx)$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιοδική με περίοδο $T = 1$.

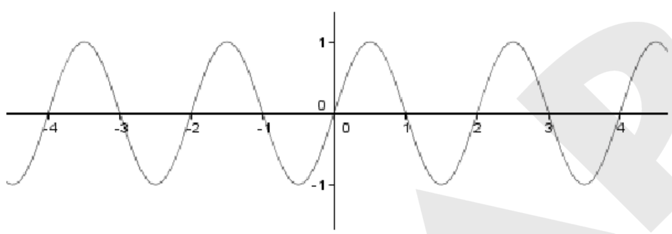
(Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε το $f(0)$ και το $f(\frac{1}{4})$.

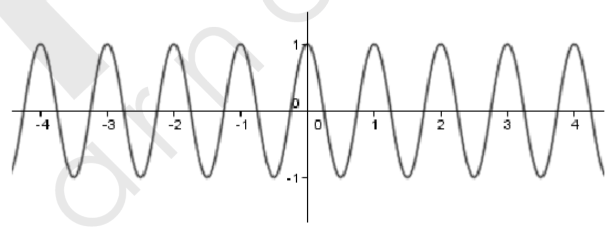
(Μονάδες 8)

γ) Μία από τις παρακάτω τέσσερεις καμπύλες αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f. Ποια είναι αυτή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

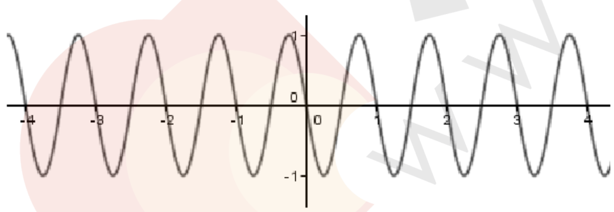
(Μονάδες 9)



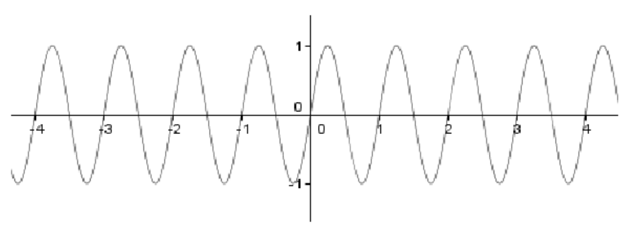
(i)



(ii)



(iii)



(iv)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση ημx είναι περιοδική με περίοδο 2π, οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$f(x+1) = \eta\mu\big(2\pi(x+1)\big) = \eta\mu(2\pi x + 2\pi) = \eta\mu(2\pi x) = f(x)$, άρα η συνάρτηση f είναι περιοδική με περίοδο $T = 1$.

Ή εναλλακτικά: Η συνάρτηση είναι της μορφής $f(x) = \rho\eta\mu\omega x$, με $\rho = 1$ και $\omega = 2\pi$, οπότε είναι περιοδική με περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$.

β) $f(0) = \eta\mu(2\pi \cdot 0) = \eta\mu(0) = 0$.

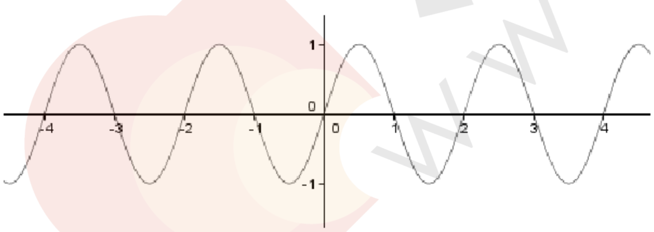
$f\left(\frac{1}{4}\right) = \eta\mu\left(2\pi \cdot \frac{1}{4}\right) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

γ) Η καμπύλη (i) δεν είναι η ζητούμενη, καθώς αντιστοιχεί σε περιοδική συνάρτηση με περίοδο $T = 2$, ενώ η ζητούμενη έχει περίοδο $T = 1$ (από το α) ερώτημα).

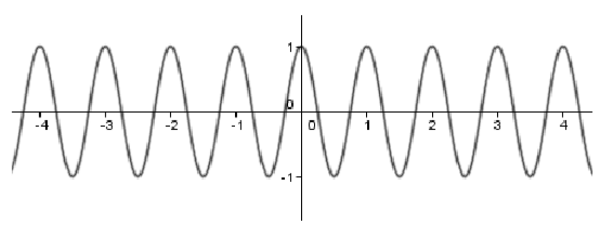
Η καμπύλη (ii) δεν είναι η ζητούμενη, καθώς αντιστοιχεί σε συνάρτηση με $f(0) = 1$, ενώ για την ζητούμενη είναι $f(0) = 0$ (από το β) ερώτημα).

Η καμπύλη (iii) δεν είναι η ζητούμενη, καθώς αντιστοιχεί σε συνάρτηση με $f\left(\frac{1}{4}\right) = -1$, ενώ για την ζητούμενη είναι $f\left(\frac{1}{4}\right) = 1$ (από το β) ερώτημα).

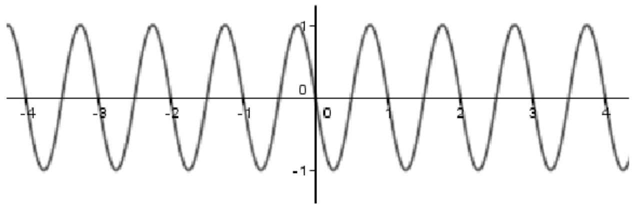
Άρα, η καμπύλη που αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι η καμπύλη (iv).



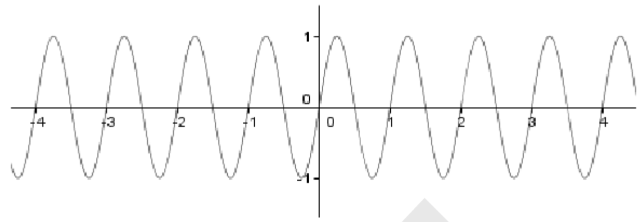
(i)



(ii)



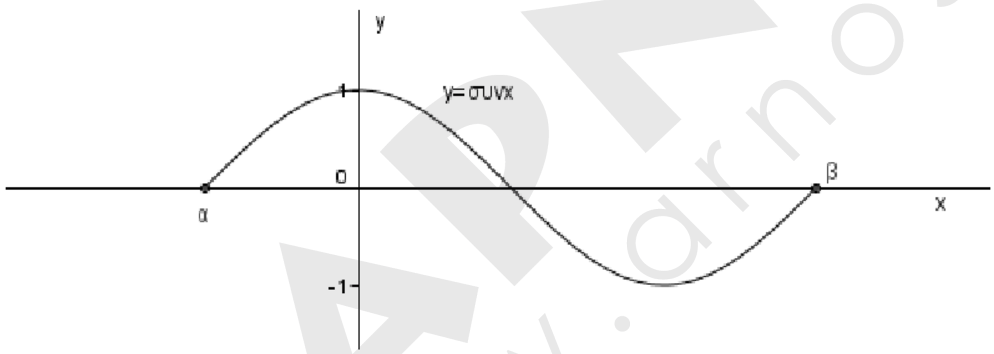
(iii)



(iv)

13. Θέμα 22007

Στο σχήμα φαίνεται απόσπασμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης συνx.



α) Να βρείτε τα α και β.

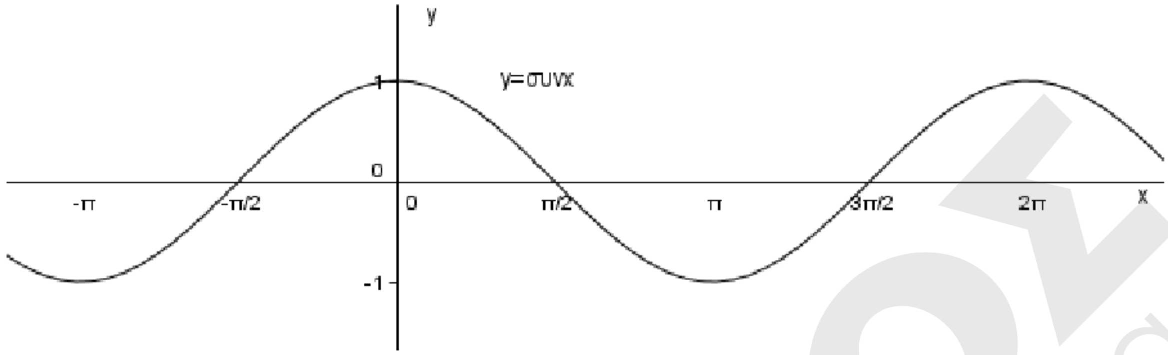
(Μονάδες 12)

β) Προς ποια κατεύθυνση και κατά πόσο πρέπει να μετατοπιστεί η παραπάνω καμπύλη ώστε να συμπέσει με τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης ημx ;

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

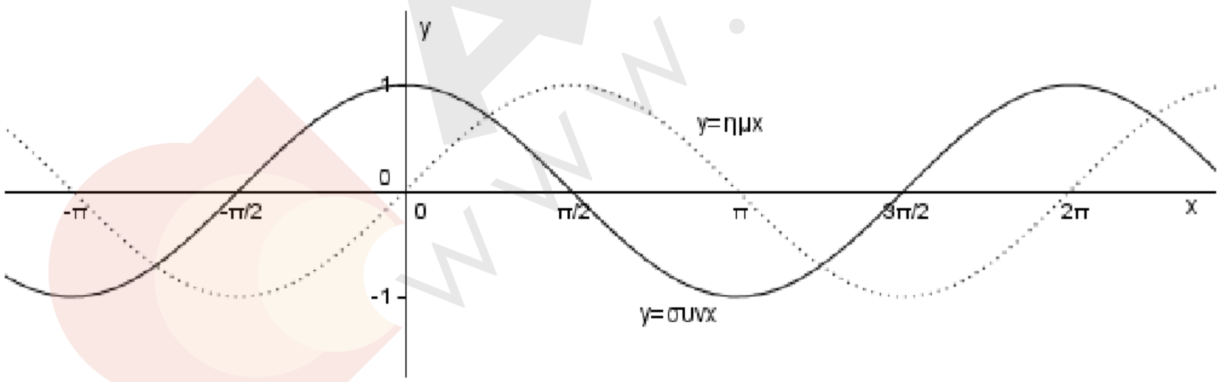
Γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης συνx έχει ως εξής:



Άρα:

α) $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ και $\beta = \frac{3\pi}{2}$.

β) Αρκεί να μετατοπιστεί προς τα δεξιά κατά $\frac{\pi}{2}$. Το ίδιο αποτέλεσμα θα είχαμε αν πραγματοποιήσουμε μετατόπιση προς τα δεξιά κατά $2\pi + \frac{\pi}{2}$ (ή $4\pi + \frac{\pi}{2}$ ή $6\pi + \frac{\pi}{2}$ κ.λπ.) ή προς τα αριστερά κατά $\frac{3\pi}{2}$. Το β ερώτημα επιδέχεται πολλές σωστές απαντήσεις, λόγω περιοδικότητας.



Θέμα 3 - Κωδικοί: 15391, 15789

14. Θέμα 15391 Αρχέτυπο

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = ημx$ και $g(x) = συνx$, $x \in [0, 2\pi]$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την μονοτονία της συνάρτησης $g(x)$ στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ και την μονοτονία της συνάρτησης $f(x)$ στο $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.

(Μονάδες 4)

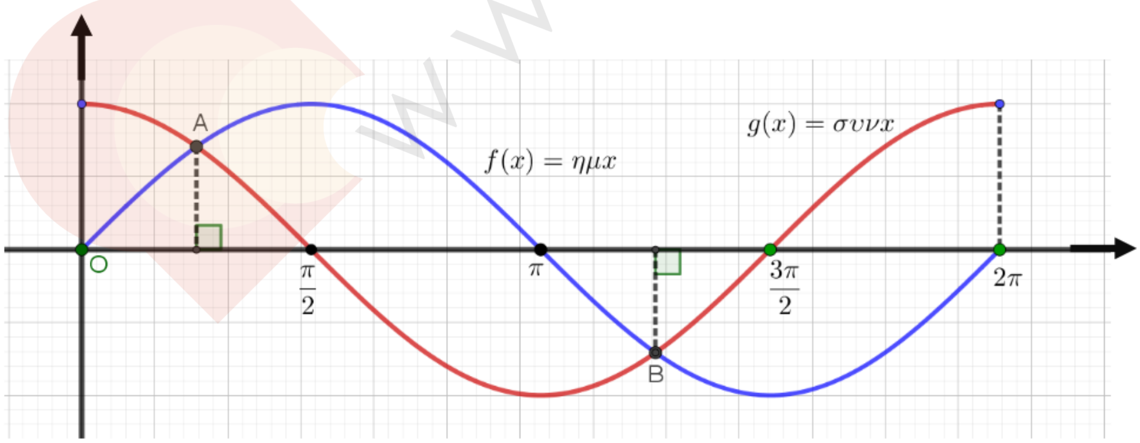
γ) Με την βοήθεια του ερωτήματος β) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να συγκρίνετε, με δικαιολόγηση, τους αριθμούς:

i. $συν\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ και $συν\left(\frac{5\pi}{6}\right)$.

(Μονάδες 5)

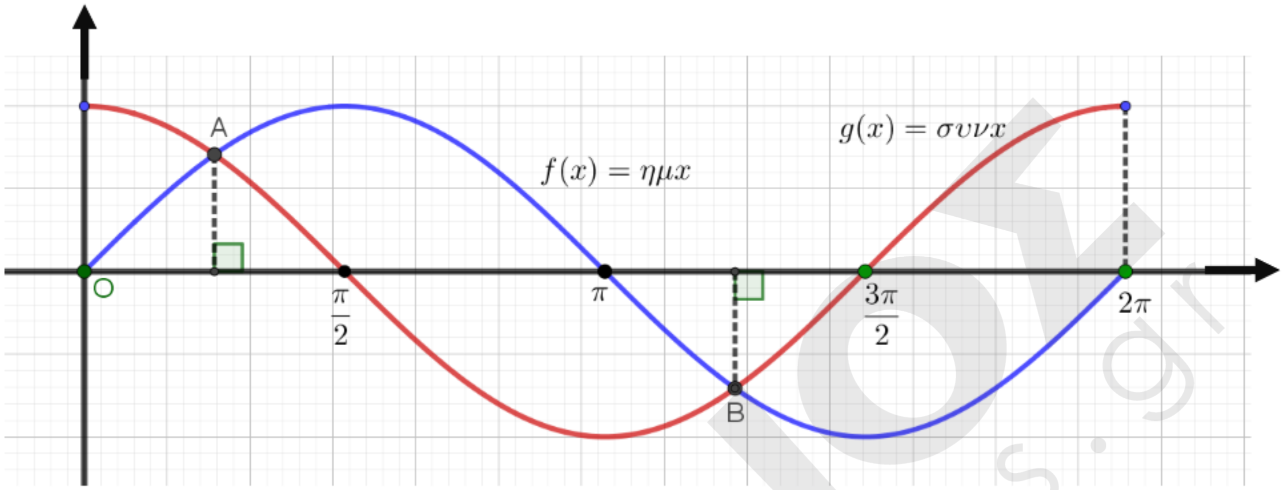
ii. $ημ\left(\frac{5\pi}{3}\right)$ και $ημ\left(\frac{11\pi}{6}\right)$.

(Μονάδες 6)



ΛΥΣΕΙΣ

α) Τα σημεία Α και Β αντιστοιχούν στις λύσεις της εξίσωσης $ημx = συνx$ για $x \in [0,2\pi]$.



Γνωρίζουμε ότι $ημ\frac{\pi}{4} = συν\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, ενώ $ημ\frac{5\pi}{4} = ημ\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -ημ\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ και $συν\frac{5\pi}{4} = συν\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -συν\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, έχουμε ότι $A\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ και $B\left(\frac{5\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

β) Η συνάρτηση $g(x) = συνx$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ και η $f(x) = ημx$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.

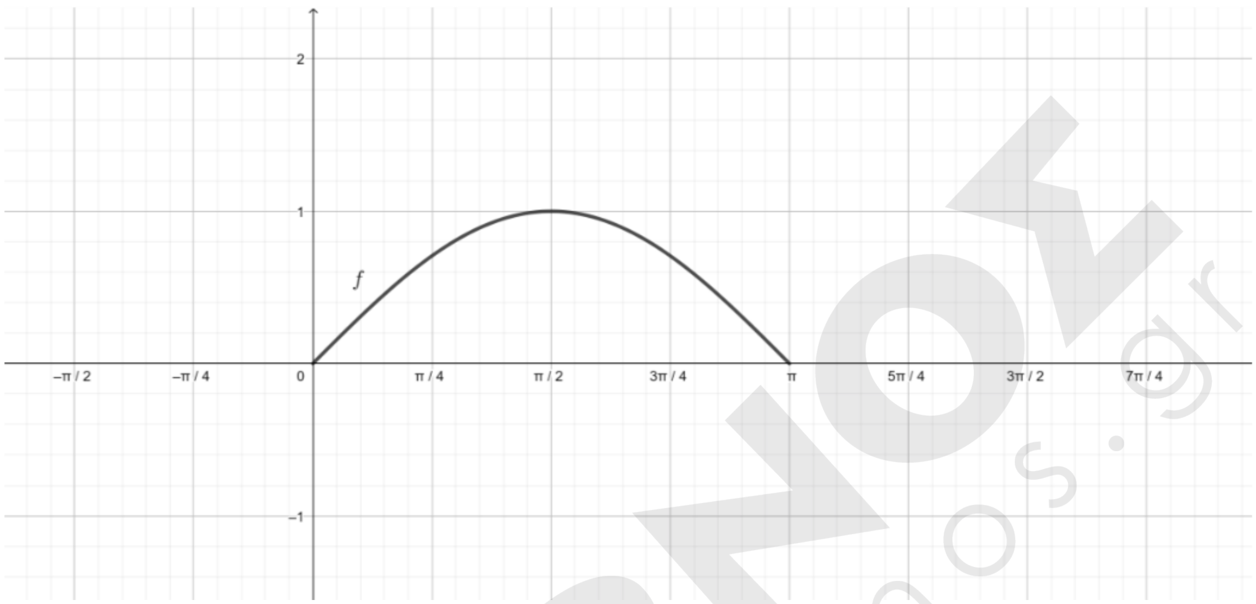
γ)

i. Παρατηρούμε ότι $\frac{\pi}{2} < \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{6} < \frac{5\pi}{6} < \pi$ και αφού η $g(x) = συνx$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, άρα $συν\frac{2\pi}{3} > συν\frac{5\pi}{6}$.

ii. Ανάλογα, είναι $\frac{3\pi}{2} < \frac{5\pi}{3} = \frac{10\pi}{6} < \frac{11\pi}{6} < 2\pi$ και αφού η $f(x) = ημx$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, άρα $ημ\frac{5\pi}{3} < ημ\frac{11\pi}{6}$.

15. Θέμα 15789 Αρχέτυπο

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\eta\mu x$ με $x\in[0,\pi]$.



α)

i. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και μετατοπίζοντας κατάλληλα την f να σχεδιάσετε την συνάρτηση $g(x)=f\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$.

(Μονάδες 8)

ii. Ποιος είναι ο τύπος της g και σε ποιο διάστημα ορίζεται;

(Μονάδες 8)

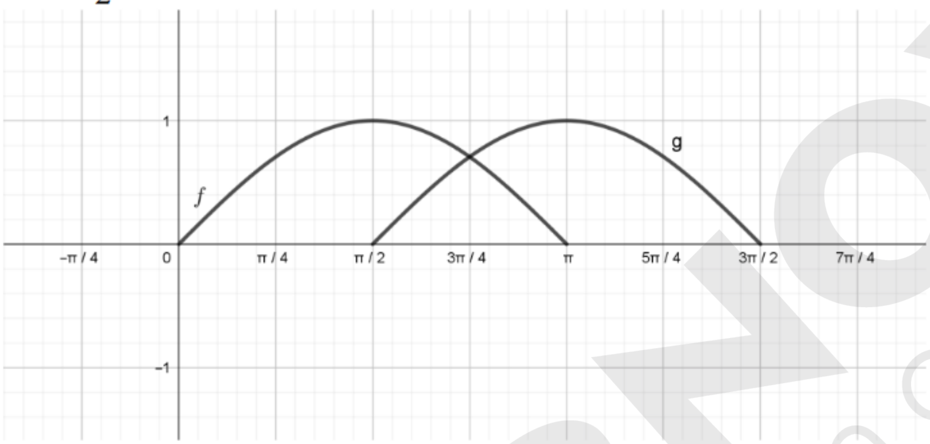
β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=g(x)$.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α)

i. Η συνάρτηση $g(x)=f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ προκύπτει από την f αν μετατοπιστεί προς τα δεξιά κατά $\frac{\pi}{2}$. Οπότε προκύπτει το παρακάτω σχήμα:



ii. Ο τύπος της g είναι $g(x)=f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$. Η συνάρτηση ορίζεται για $x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$, όπως βλέπουμε από το σχήμα.

β) Από το α)ii ερώτημα προκύπτει η εξίσωση

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow \eta\mu x=\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\kappa\pi+x-\dfrac{\pi}{2}\\ x=2\kappa\pi+\pi-x+\dfrac{\pi}{2}\end{cases},\kappa\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\text{Αδύνατη}\\ 2x=2\kappa\pi+\dfrac{3\pi}{2},\kappa\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow x=\kappa\pi+\frac{3\pi}{4},\kappa\in\mathbb{Z}$$

Δεκτή λύση είναι για $\kappa=0$, δηλαδή η γωνία $x=\frac{3\pi}{4}$.

Εναλλακτική λύση:

Η λύση της εξίσωσης $f(x)=g(x)$ είναι η τετμημένη του σημείου τομής των γραφικών παραστάσεων. Οπότε, η μοναδική λύση της εξίσωσης είναι $x=\frac{3\pi}{4}$.

Θέμα 4 – Κωδικοί:

15025, 15062, 15422, 15992, 18234, 20870

16. Θέμα 15025 Αρχέτυπο

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται μια γωνία $\theta = \mathrm{A\hat{O}M}$ με $\eta\mu\theta = \frac{4}{5}$, της οποίας η τελική πλευρά τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο M και την ευθεία $x = 1$ στο σημείο K.

α) Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\sigma\upsilon\nu\theta, \varepsilon\phi\theta, \sigma\phi\theta$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων M και K.

(Μονάδες 6)

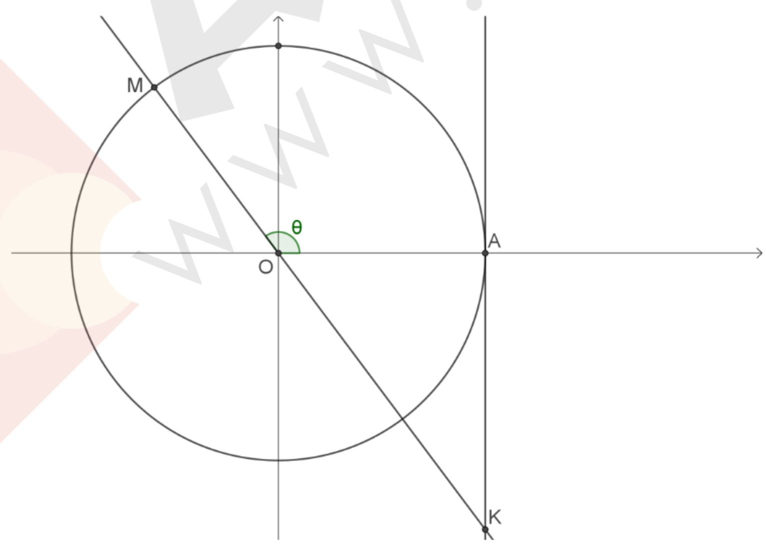
γ) Έστω μια γωνία $\phi \in [0, 2\pi]$ για την οποία ισχύει $\eta\mu\phi = \frac{3}{5}$ και $\sigma\upsilon\nu\phi < 0$.

i. Να αιτιολογήσετε γιατί η γωνία ϕ έχει την τελική πλευρά της στο 2ο τεταρτημόριο.

(Μονάδες 5)

ii. Να αιτιολογήσετε γιατί $\theta < \phi$.

(Μονάδες 6)



ΛΥΣΗ

α) Για τη γωνία $\theta = A\hat{O}M$ γνωρίζουμε ότι $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ και $\eta\mu\theta = \frac{4}{5}$. Από τη τριγωνομετρική ταυτότητα $\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1$ έχουμε ότι:

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 \Leftrightarrow \frac{16}{25} + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 - \frac{16}{25} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\theta = \frac{9}{25}.$$

Όμως $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ οπότε $\sigma\upsilon\nu\theta < 0$ και επομένως $\sigma\upsilon\nu\theta = -\frac{3}{5}$.

Επίσης $\varepsilon\phi\theta = \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$ και τέλος $\sigma\phi\theta = \frac{1}{\varepsilon\phi\theta} = \frac{1}{-\frac{4}{3}} = -\frac{3}{4}$.

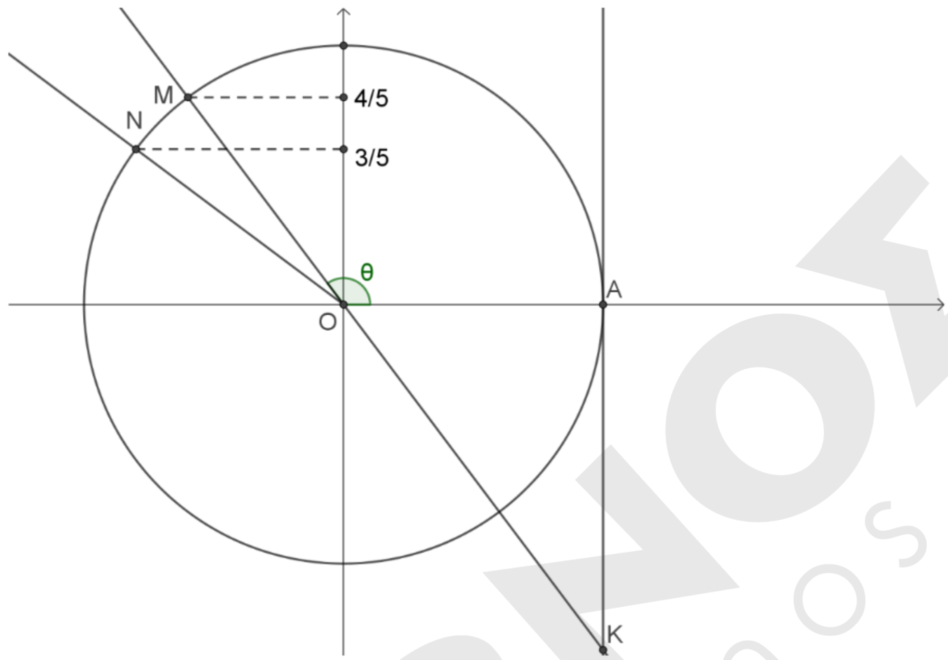
β) Γενικά, για τα σημεία M και K που η τελική πλευρά μιας γωνίας θ τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο και την ευθεία $x = 1$ αντίστοιχα, ισχύει ότι $M(\sigma\upsilon\nu\theta, \eta\mu\theta)$ και $K(1, \varepsilon\phi\theta)$. Συνεπώς $M(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ και $K(1, -\frac{4}{3})$.

γ)

i. Είναι $\eta\mu\phi = \frac{3}{5} > 0$ και $\sigma\upsilon\nu\phi < 0$, οπότε η τελική πλευρά της γωνίας φ είναι στο 2ο τεταρτημόριο.

ii. Είναι $\frac{3}{5} < \frac{4}{5}$, δηλαδή $\eta\mu\theta > \eta\mu\phi$. Όμως η συνάρτηση $\eta\mu x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, οπότε για να είναι $\eta\mu\theta > \eta\mu\phi$ θα πρέπει $\theta < \phi$.

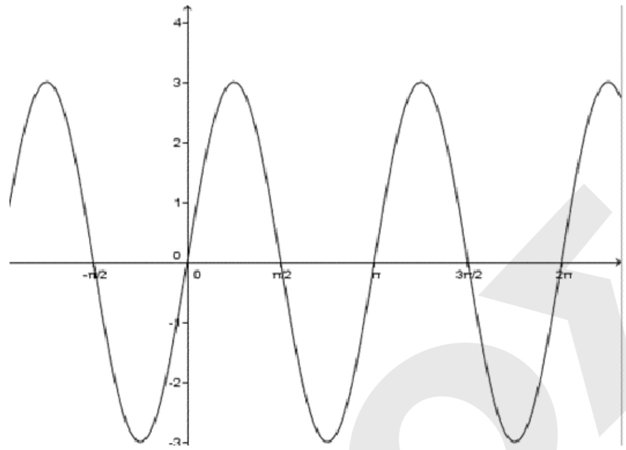
Εναλλακτικά, βρίσκουμε το σημείο Ν του κύκλου με τεταγμένη $\eta\mu\phi = \frac{3}{5}$ και τετμημένη $\sigma\upsilon\nu\phi < 0$ και διαπιστώνουμε το σημείο Ν είναι πιο αριστερά και κάτω από το σημείο Μ δηλαδή $A\hat{O}M < A\hat{O}N$ οπότε $\theta < \phi$.


M
N
4/5
3/5
θ
A
O
K

17. Θέμα 15062 Αρχέτυπο

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που είναι της μορφής

$f(x) = \rho\eta\mu(\alpha x),\ x \in \mathbb{R}$ και $\alpha, \rho > 0$



α) Να βρείτε, με βάση το σχήμα, την περίοδό της, την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.

(Μονάδες 6)

β) Με βάση τις απαντήσεις στο προηγούμενο ερώτημα, να βρείτε τους αριθμούς α και ρ.

(Μονάδες 6)

Έστω $\rho = 3$ και $\alpha = 2$. Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x) = x^4 - 2x^2 + 5,\ x \in \mathbb{R}$.

γ) Να αποδείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της είναι ίση με 4.

(Μονάδες 7)

δ) Να αιτιολογήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις των f, g δεν έχουν κοινό σημείο.

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Από το σχήμα είναι φανερό ότι η γραφική της παράσταση προκύπτει από επανάληψη του τμήματος της που αντιστοιχεί στο διάστημα $[0, \pi]$, οπότε η περίοδος της f είναι $T = \pi$. Επιπλέον οι τεταγμένες των σημείων της γραφικής της παράστασης περιέχονται στο διάστημα $[-3, 3]$, οπότε η ελάχιστη τιμή της είναι ίση με -3 και η μέγιστη είναι ίση με 3.

β) Η συνάρτηση είναι της μορφής $f(x) = \rho\eta\mu(\alpha x)$ με $\alpha, \rho > 0$, οπότε έχει περίοδο $T = \dfrac{2\pi}{\alpha}$ ελάχιστη τιμή $-\rho$ και μέγιστη ίση με ρ. Έτσι, έχουμε $\dfrac{2\pi}{\alpha} = \pi$, οπότε $\alpha = 2$ και $\rho = 3$.

γ) Είναι: $g(x) = x^4 - 2x^2 + 5 = (x^2 - 1)^2 + 4 \geq 4$ και η ισότητα $g(x) = 4$ ισχύει όταν $x^2 = 1$ δηλαδή όταν $x = -1$ ή $x = 1$. Άρα ο αριθμός 4 είναι η ελάχιστη τιμή της f.

δ) Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \leq 3$ και $g(x) \geq 4$, η εξίσωση $f(x) = g(x)$ είναι αδύνατη. Άρα οι γραφικές παραστάσεις των f, g δεν έχουν κοινό σημείο.

18. Θέμα 15422

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ασυν(\frac{\pi}{2} - 2x) - 2ημ(\pi + 2x)$ με $a > 0$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = (a + 2)ημ2x$.

(Μονάδες 5)

β)

i. Αν η μέγιστη τιμή της f είναι 4, να δείξετε ότι $a = 2$.

(Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε την περίοδο της f.

(Μονάδες 5)

γ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f σε διάστημα μιας περιόδου.

(Μονάδες 5)

δ) Αν $g(x) = 5 - συν^2 2x$, να βρείτε, αν υπάρχουν, τα κοινά σημεία της C_f με την C_g, όπου C_f, C_g οι γραφικές παραστάσεις των f, g αντίστοιχα.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Είναι: $f(x) = ασυν\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) - 2ημ(\pi + 2x) = αημ2x + 2ημ2x = (a + 2)ημ2x$.

β)

i. Η μέγιστη τιμή της συνάρτησης f καθορίζεται από το συντελεστή $a + 2$.

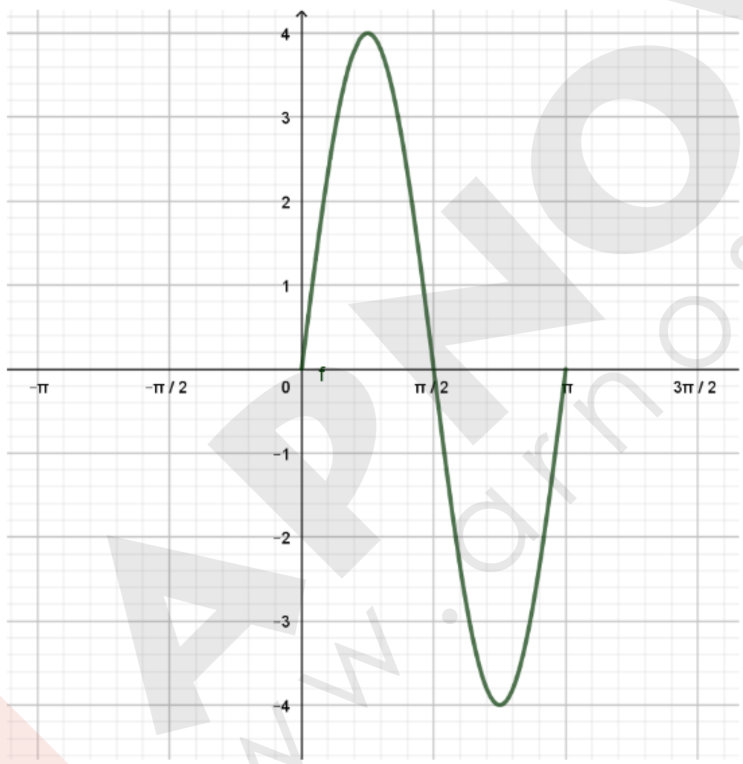
Πρέπει δηλαδή $a + 2 = 4 \Leftrightarrow α = 2$.

ii. Η περίοδος $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

γ) Η γραφική παράσταση της $f(x) = 4\eta\mu 2x$ στο διάστημα $[0, \pi]$, βάσει του παρακάτω πίνακα:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$4\eta\mu 2x$	0	4	0	-4	0

δίνεται στο παρακάτω σχήμα:



δ) Για να βρούμε τις τετμημένες των κοινών σημείων των δύο γραφικών παραστάσεων λύνουμε την εξίσωση:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 4\eta\mu 2x = 5 - \sigma\upsilon\nu^2 2x \Leftrightarrow 4\eta\mu 2x = 5 - (1 - \eta\mu^2 2x) \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu^2 2x - 4\eta\mu 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow (\eta\mu 2x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \eta\mu 2x = 2 \text{ αδύνατη.}$$

Αφού η παραπάνω εξίσωση είναι αδύνατη, δεν υπάρχουν σημεία τομής των δύο γραφικών παραστάσεων.

19. Θέμα 15992 Αρχέτυπο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \rho\, \eta\mu x$, $g(x) = \eta\mu(\omega x)$, όπου $\rho, \omega > 0$.

α) Να βρεθούν οι τιμές των ρ, ω, αν είναι γνωστό ότι η ελάχιστη τιμή της f είναι -2 και η περίοδος της g είναι π. Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

(Μονάδες 6)

β)

i. Να κάνετε, στο ίδιο σύστημα αξόνων, τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2\eta\mu x, x \in [0, \pi]$ και $g(x) = \eta\mu(2x), x \in [0, \pi]$.

(Μονάδες 10)

ii. Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να αποδείξετε ότι $2\eta\mu\frac{5\pi}{9} > \eta\mu\frac{10\pi}{9}$.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Το ρ καθορίζει τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης f, που είναι ίση με ρ και την ελάχιστη τιμή της, που είναι ίση με $-\rho$. Άρα $\rho = 2$.

Το ω καθορίζει την περίοδο της συνάρτησης g, που είναι ίση με $\frac{2\pi}{\omega}$.

Άρα $\frac{2\pi}{\omega} = \pi \Leftrightarrow \omega = 2$.

β)

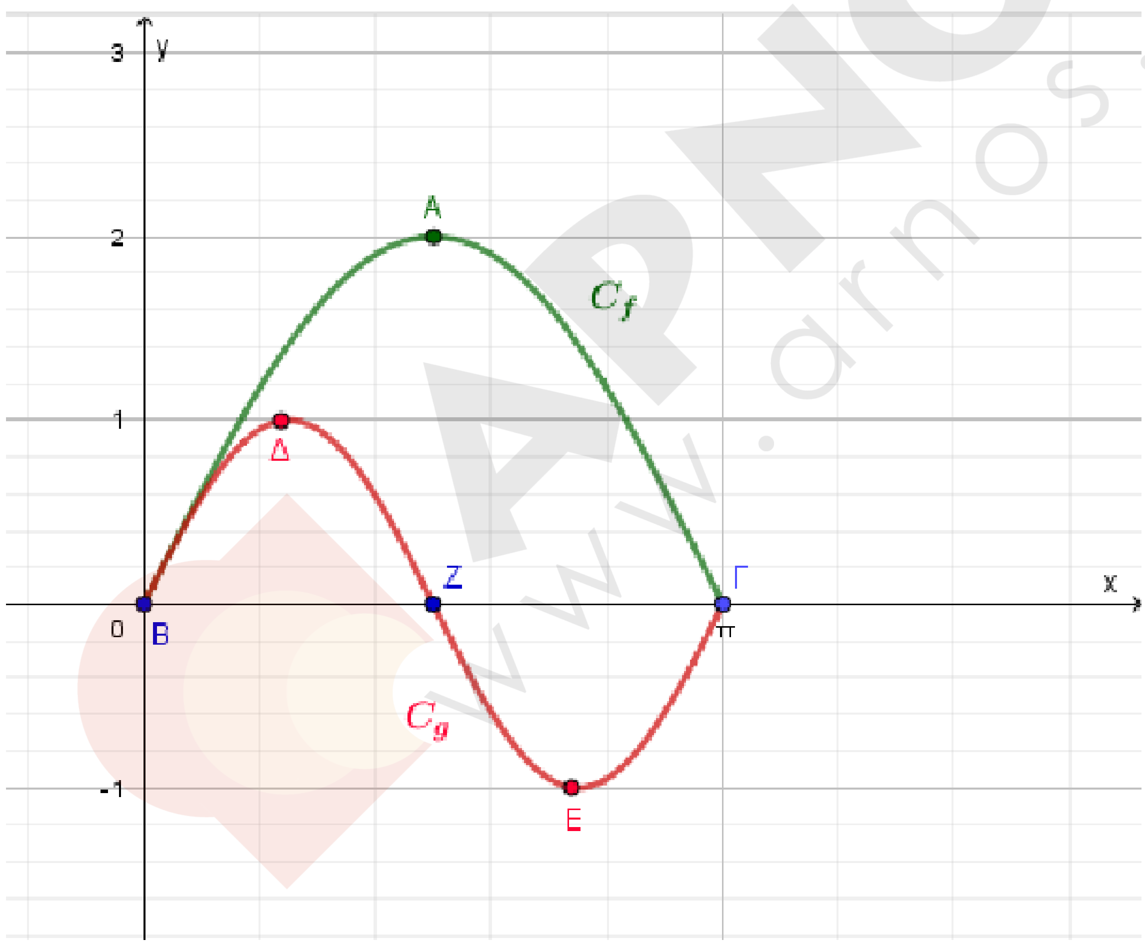
i. Για τη συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu x$, με $x \in [0, \pi]$, είναι:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$f(x) = 2\eta\mu x$	0	2	0

Για τη συνάρτηση $g(x) = \eta\mu(2x)$, με $x \in [0, \pi]$, είναι:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$g(x) = \eta\mu(2x)$	0	1	0	-1	0

Οι γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων, είναι:



ii. Η ζητούμενη ανισότητα γράφεται ισοδύναμα

$$2\eta\mu\frac{5\pi}{9} > \eta\mu\frac{10\pi}{9} \Leftrightarrow 2\eta\mu\frac{5\pi}{9} > \eta\mu\left(2\cdot\frac{5\pi}{9}\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{5\pi}{9}\right) > g\left(\frac{5\pi}{9}\right)$$

Είναι: $\frac{\pi}{2} < \frac{5\pi}{9} < \pi$.

Επομένως, από τις γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων προκύπτει ότι

$$f\left(\frac{5\pi}{9}\right) > 0 \text{ και } g\left(\frac{5\pi}{9}\right) < 0.$$

Ως εκ τούτου είναι $f\left(\frac{5\pi}{9}\right) > g\left(\frac{5\pi}{9}\right)$.

20. Θέμα 18234

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2\eta\mu x-1,\ x\in[0,\,2\pi]$.

α) Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της. Για ποιες τιμές του x προκύπτουν αυτές;

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f της f με τους άξονες x′x και y′y.

(Μονάδες 6)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

(Μονάδες 7)

δ) Αν για κάποιο αριθμό α με $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει $f(\alpha)=f\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, να αποδείξετε ότι $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Από την γνωστή ανισότητα $-1\le\eta\mu x\le 1$ προκύπτει ότι $-2\le 2\eta\mu x\le 2$, οπότε $-3\le 2\eta\mu x-1\le 1$, δηλαδή $-3\le f(x)\le 1$. Επιπλέον στο διάστημα $[0,\,2\pi]$ η ισότητα $f(x)=-3$ ισχύει όταν $\eta\mu x=-1$ δηλαδή $x=\frac{3\pi}{2}$, ενώ η $f(x)=1$ ισχύει όταν $\eta\mu x=1$ δηλαδή $x=\frac{\pi}{2}$.

Επομένως η f παρουσιάζει:

- Ολικό ελάχιστο για $x=\frac{3\pi}{2}$, το $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-3$.
- Ολικό μέγιστο για $x=\frac{\pi}{2}$, το $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

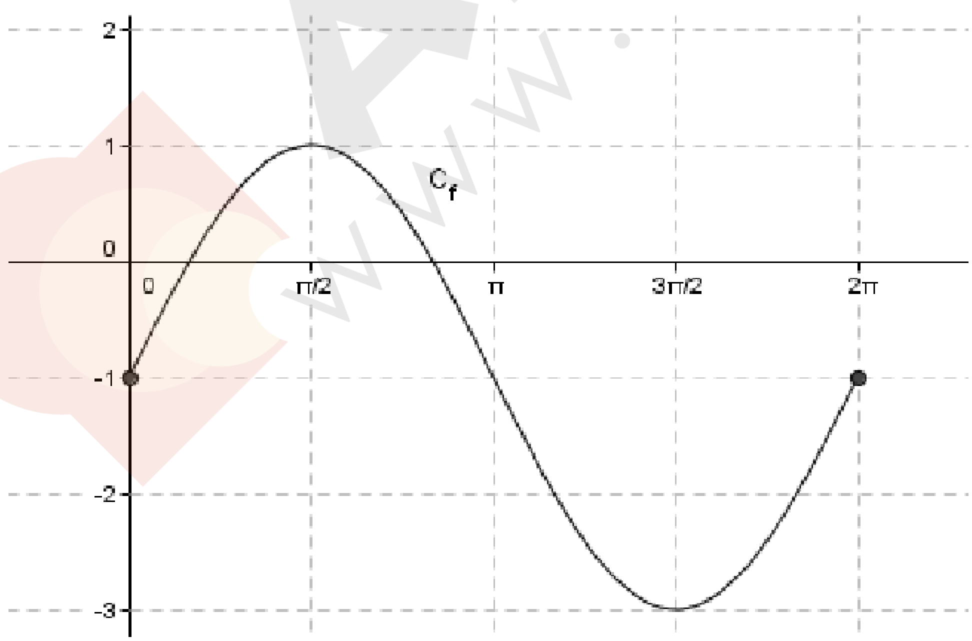
β) Με $x=0$ έχουμε $f(0)=-1$, οπότε η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0,-1)$.

Με $y=f(x)=0$ έχουμε $2ημx-1=0 \Leftrightarrow ημx=\frac{1}{2}$, οπότε για $x\in[0,2\pi]$ βρίσκουμε $x=\frac{\pi}{6}$ ή $x=\frac{5\pi}{6}$. Επομένως τα κοινά σημεία της C_f με τον άξονα $x'x$ είναι τα $B\left(\frac{\pi}{6},0\right)$, $Γ\left(\frac{5\pi}{6},0\right)$.

γ) Συμπληρώνουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
ημx	0	1	0	-1	0
f(x)	-1	1	-1	-3	-1

Με τη βοήθεια του παραπάνω πίνακα προκύπτει η επόμενη γραφική παράσταση C_f της f.



δ) Από την ισότητα $f(\alpha)=f\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, έχουμε:

$$2\eta\mu\alpha-1=2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-1$$

απ' όπου προκύπτει ότι $\eta\mu\alpha=\sigma\upsilon\nu\alpha$ και λόγω του περιορισμού $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ συμπεραίνουμε ότι $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

21. Θέμα 20870 **Αρχέτυπο**

Το βάθος y, σε μέτρα, του νερού σε ένα λιμάνι επηρεάζεται από το φαινόμενο της παλίρροιας κατά τη διάρκεια μιας ημέρας (εντός 24 ωρών). Το πρώτο (μετά τα μεσάνυχτα) μέγιστο βάθος είναι $5{,}8$ μέτρα και συμβαίνει στις $3:00$ π.μ. Το πρώτο ελάχιστο βάθος είναι $2{,}6$ μέτρα και συμβαίνει στις $9:00$ π.μ. Το βάθος y δίνεται ως συνάρτηση του χρόνου t (σε ώρες) από τη σχέση: $y=\alpha\eta\mu(\omega t)+\beta$, με $\alpha,\omega,\beta>0$ και $0\le t\le 24$.

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α,ω και β.

(Μονάδες 6)

β) Αν $\alpha = 1,6$, $\omega = \frac{\pi}{6}$ και $\beta = 4,2$,

i. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της $y = 1,6 \cdot \eta\mu(\frac{\pi}{6}t) + 4,2$, με $0 \le t \le 24$.

(Μονάδες 8)

ii. Ποιο θα είναι το βάθος του νερού στις 12 το μεσημέρι;

(Μονάδες 4)

iii. Ένα μεγάλο πλοίο χρειάζεται τουλάχιστον $4,2$ μέτρα βάθος νερού για να δέσει στο λιμάνι. Στη διάρκεια ποιού χρονικού διαστήματος από τις 12 το μεσημέρι και μετά θα μπορεί να δέσει με ασφάλεια;

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Το διάστημα ανάμεσα στο πρώτο μέγιστο βάθος και στο πρώτο ελάχιστο βάθος είναι 6 ώρες, που είναι η μισή περίοδος. Κατά συνέπεια η περίοδος είναι $\mathrm{T} = 2 \cdot 6 = 12$ ώρες και $\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\omega} = 12 \Leftrightarrow \omega = \frac{2\pi}{12} \Leftrightarrow \omega = \frac{\pi}{6}$. Ισχύει:

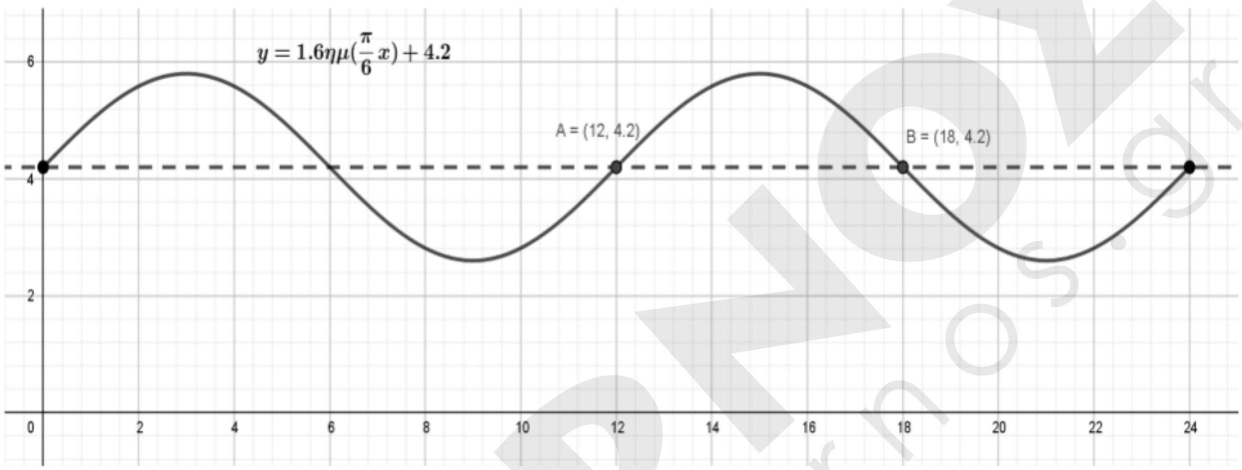
$$\begin{aligned}
&-1 \le \eta\mu(\omega t) \le 1 \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} \\
&-\alpha \le \alpha\eta\mu(\omega t) \le a \Leftrightarrow \\
&-\alpha + \beta \le \alpha\eta\mu(\omega t) + \beta \le a + \beta \Leftrightarrow \\
&-\alpha + \beta \le y \le \alpha + \beta
\end{aligned}$$

Το μέγιστο βάθος είναι $5,8$ μέτρα και το ελάχιστο $2,6$ μέτρα άρα,

$$\begin{cases} -\alpha + \beta = 2,6 \\ \alpha + \beta = 5,8 \end{cases} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2\beta = 8,4 \\ \alpha + \beta = 5,8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 4,2 \\ \alpha = 1,6 \end{cases}.$$

β) Αν $\alpha = 1,6$, $\omega = \frac{\pi}{6}$ και $\beta = 4,2$, τότε $y = 1,6 \cdot \eta\mu(\frac{\pi}{6}t) + 4,2$, $0 \le t \le 24$.

i. Η συνάρτηση έχει μέγιστο $5,8$, ελάχιστο $2,6$ και περίοδο 12, οπότε η γραφική της παράσταση σε διάστημα δυο περιόδων ($0 \le t \le 24$) είναι:



ii. Το βάθος του νερού, σε μέτρα, στις 12 το μεσημέρι είναι:

$$y = 1,6 \cdot \eta\mu(\frac{\pi}{6} \cdot 12) + 4,2 = 1,6 \cdot \eta\mu(2\pi) + 4,2 = 1,6 \cdot 0 + 4,2 = 4,2.$$

iii. Όπως βλέπουμε από τη γραφική παράσταση της $y = 1,6 \cdot \eta\mu(\frac{\pi}{6}t) + 4,2$ στο βi) ερώτημα, το πλοίο θα δέσει με ασφάλεια το χρονικό διάστημα $[12,18]$, δηλαδή από τις 12 το μεσημέρι μέχρι τις 6 το απόγευμα, γιατί στο διάστημα αυτό το βάθος του νερού είναι $y \ge 4,2$.