

Κεφ. 3.3. - Τράπεζα Θεμάτων 2022 - Άλγεβρα Β' Λυκείου**ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ & ΛΥΣΕΙΣ****Θέμα 2 – Κωδικοί:****15092, 15193, 15266, 15652, 15999, 17933, 17936, 21237, 22002**

Η Τράπεζα Θεμάτων για την Άλγεβρα Β' Λυκείου είναι μία μεγάλη «θάλασσα». Εμείς όμως έχουμε φροντίσει για εσένα, συγκεντρώνοντας εκείνα τα θέματα που αποτελούν τη «βάση» της γνώσης και για τα υπόλοιπα. Μελετώντας και κατανοώντας το μοτίβο σκέψης για τα συγκεκριμένα, μπορείς να λύσεις με επιτυχία και τα υπόλοιπα θέματα. Στην ιστοσελίδα μας www.arnos.gr για το Course της Άλγεβρας, μελετάς και προετοιμάζεσαι με την αναλυτική διδασκαλία σε ασκήσεις και θέματα, στο ύψος της Τράπεζας.

1. Θέμα 15092 Αρχέτυπο

Στο παρακάτω σχήμα έχει σχεδιασθεί ο τριγωνομετρικός κύκλος και η ευθεία (δ) η οποία είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Α. Η τελική πλευρά ΟΒ της θετικής γωνίας

$\widehat{AOB} = \hat{\theta}$, αν προεκταθεί τέμνει την ευθεία (δ) στο σημείο Γ. Γνωρίζουμε ότι $\eta\mu\theta = \frac{3}{5}$.

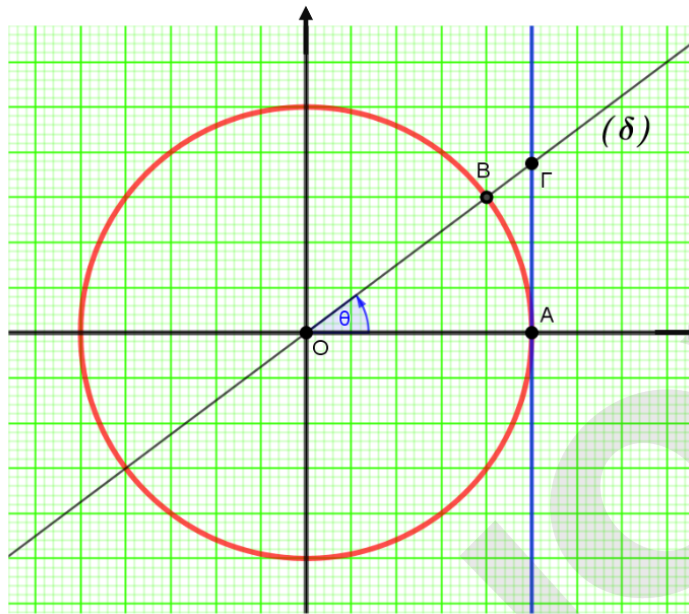
α) Με τη βοήθεια του σχήματος ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τον αριθμό *συνθ* και στη συνέχεια τον αριθμό *εφθ*.

(Μονάδες 13)

β) Να βρεθούν οι συντεταγμένες των σημείων Β και Γ.

(Μονάδες 12)

Έξυπνα & Εύκολα!


ΛΥΣΗ

α) Από το σχήμα παρατηρούμε ότι $\sin \theta = 0,8 = \frac{4}{5}$.

Εναλλακτικά, από τη βασική τριγωνομετρική ταυτότητα $\eta\mu^2 \theta + \sigma\upsilon\nu^2 \theta = 1$ παίρνουμε

$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \sigma\upsilon\nu^2 \theta = 1$, άρα $\sigma\upsilon\nu^2 \theta = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$ και καθώς η γωνία θ βρίσκεται στο 1^ο τεταρτημόριο θα είναι $\sigma\upsilon\nu \theta = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$.

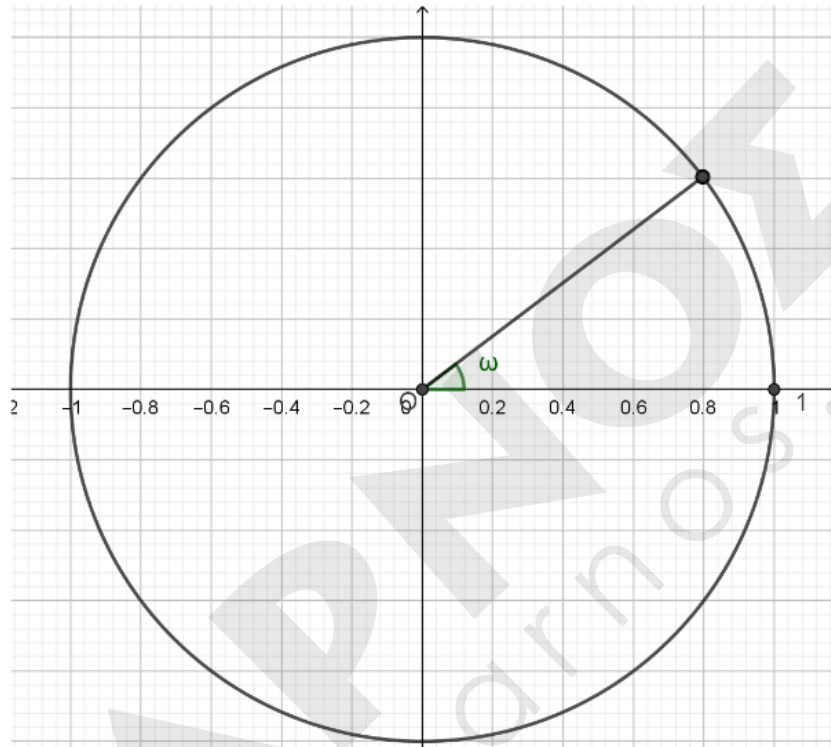
$$\text{Αλλά } \varepsilon\varphi \theta = \frac{\eta\mu \theta}{\sigma\upsilon\nu \theta} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}.$$

β) Γνωρίζουμε ότι είναι $B(\sigma\upsilon\nu \theta, \eta\mu \theta)$ και $\Gamma(1, \varepsilon\varphi \theta)$. Έτσι έχουμε $B\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right), \Gamma\left(1, \frac{3}{4}\right)$.

Έξυπνα & Εύκολα!

2. Θέμα 15193

Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία $\hat{\omega}$, με $\sin \omega = 0,8$.



α) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να σχεδιάσετε τις γωνίες στο διάστημα $[0, 2\pi]$, των οποίων το συνημίτονο είναι $-0,8$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

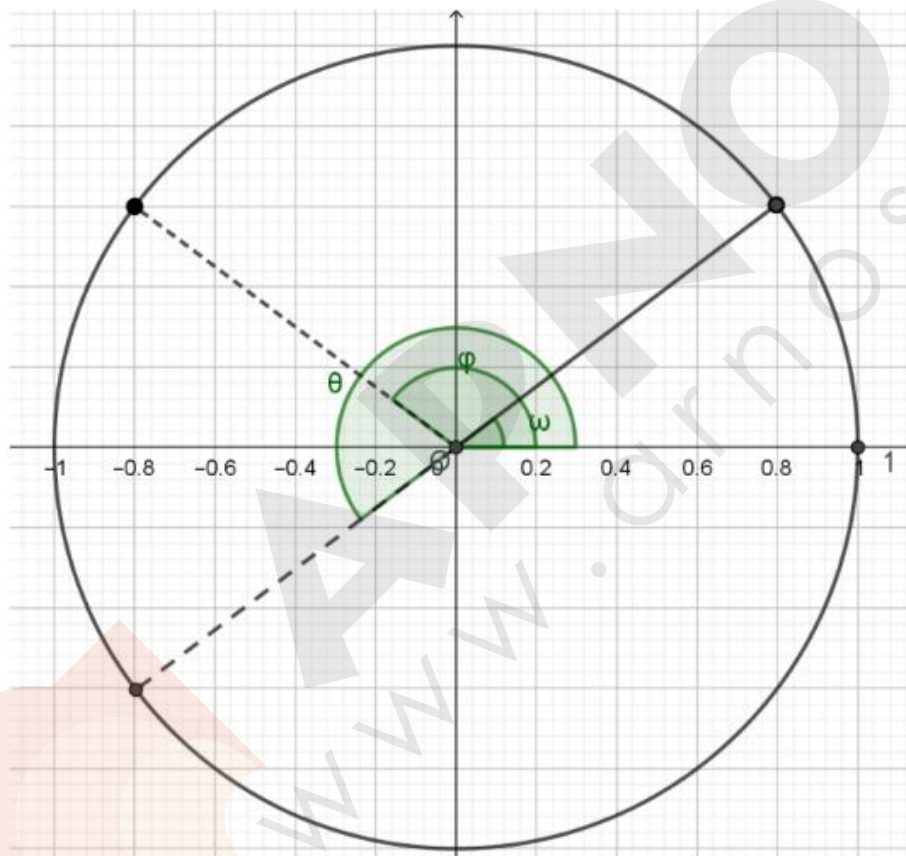
β) Να βρείτε την σχέση των γωνιών που βρήκατε στο α) ερώτημα με την γωνία $\hat{\omega}$.

(Μονάδες 13)

Έξυπνα & Εύκολα!

ΛΥΣΗ

α) Οι γωνίες που έχουν συνημίτονο $-0,8$ έχουν τελική πλευρά στο δεύτερο ή στο τρίτο τεταρτημόριο, η οποία τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο σε σημεία με τετμημένη $-0,8$. Άρα οι ζητούμενες γωνίες $\hat{\varphi}$ και $\hat{\theta}$ είναι όπως φαίνονται στο παρακάτω σχήμα, με την τελική τους πλευρά να είναι με διακεκομμένη γραμμή.



β) Δύο γωνίες σχεδιασμένες στον τριγωνομετρικό κύκλο έχουν αντίθετα συνημίτονα, αν τα σημεία τομής της τελικής τους πλευράς με τον τριγωνομετρικό κύκλο είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$ ή ως προς την αρχή O των αξόνων. Οπότε οι δύο γωνίες είναι παραπληρωματικές, δηλαδή $\varphi = \pi - \omega$ ή διαφέρουν κατά π , οπότε $\theta = \pi + \omega$.

Έξυπνα & Εύκολα!

3. Θέμα 15266 Αρχέτυπο

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ο τριγωνομετρικός κύκλος και οι γωνίες θ και $-\theta$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί $\cos\theta = \frac{3}{5}$.

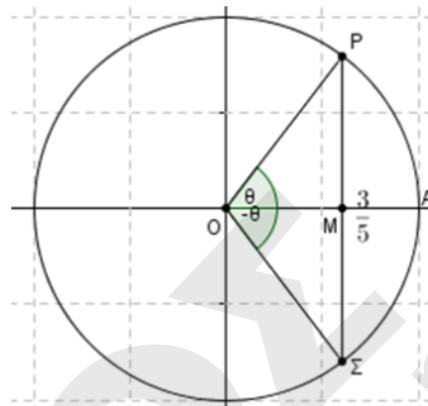
(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το $\eta\mu\theta$.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε το ημίτονο και το συνημίτονο της γωνίας $-\theta$.

(Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ

α) Η τελική πλευρά της γωνίας θ είναι η OP και το σημείο P έχει τετμημένη $x = \frac{3}{5}$. Άρα

$$\cos\theta = \frac{3}{5}.$$

β) Από την γνωστή ταυτότητα $\cos^2\theta + \eta\mu^2\theta = 1$, έχουμε $\frac{9}{25} + \eta\mu^2\theta = 1$ απ' όπου προκύπτει

$$\text{ότι } \eta\mu^2\theta = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}.$$

Αλλά $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, οπότε $\eta\mu\theta > 0$, άρα $\eta\mu\theta = \frac{4}{5}$.

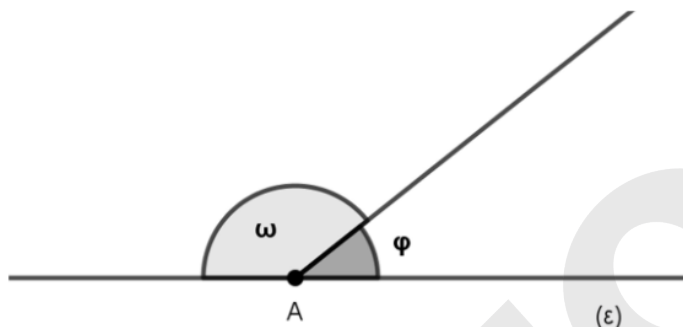
γ) Επειδή η OS είναι συμμετρική της OP ως προς τον άξονα $x'x$, το σημείο S έχει ίδια τετμημένη με το P και αντίθετη τεταγμένη.

$$\text{Άρα, } \cos(-\theta) = \cos\theta = \frac{3}{5} \text{ και } \eta\mu(-\theta) = -\eta\mu\theta = -\frac{4}{5}$$

Έξυπνα & Εύκολα!

4. Θέμα 15652

Δίνεται $\eta\mu\varphi = \frac{3}{5}$, όπου φ η οξεία γωνία που σχηματίζεται με κορυφή το σημείο Α της ευθείας (ε) του παρακάτω σχήματος.



α) Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας φ .

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε το ημίτονο και το συνημίτονο της αμβλείας γωνίας ω .

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε ισοδύναμα

$$\eta\mu^2\varphi + \sigma\upsilon\nu^2\varphi = 1 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \sigma\upsilon\nu^2\varphi = 1 \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\varphi = 1 - \frac{9}{25} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\varphi = \frac{16}{25} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \pm \frac{4}{5}.$$

Επειδή η γωνία φ είναι οξεία, έχουμε τελικά $\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{4}{5}$.

Έξυπνα & Εύκολα!

β) Όπως φαίνεται από το σχήμα, η γωνία ω είναι παραπληρωματική της γωνίας φ , οπότε

$$\eta\mu\omega = \eta\mu\varphi = \frac{3}{5} \text{ και } \sigma\upsilon\nu\omega = -\sigma\upsilon\nu\varphi = -\frac{4}{5}.$$

5. Θέμα 15999 Αρχέτυπο

Δίνεται η παράσταση $A = 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \eta\mu(-\theta)$.

α) Να αποδείξετε ότι $A = \eta\mu\theta$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης A , όταν $\theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ και $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{12}{13}$.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Είναι γνωστό ότι $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \eta\mu\theta$ και $\eta\mu(-\theta) = -\eta\mu\theta$, οπότε έχουμε:

$$A = 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \eta\mu(-\theta) = 2\eta\mu\theta - \eta\mu\theta = \eta\mu\theta$$

που είναι το ζητούμενο.

β) Από την ταυτότητα $\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1$, με $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{12}{13}$ έχουμε:

$$\eta\mu^2\theta = 1 - \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169}$$

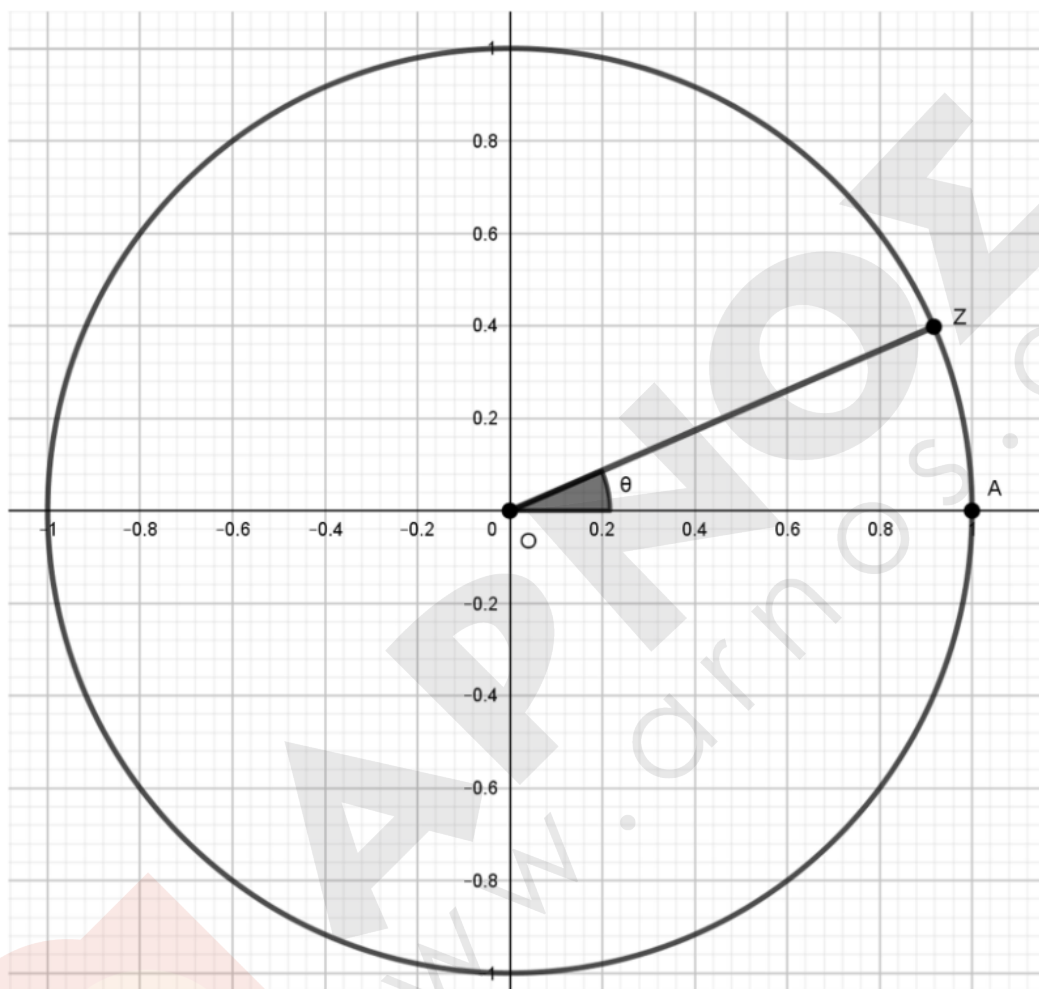
Αλλά $\theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, οπότε $\eta\mu\theta < 0$, άρα:

$$\eta\mu\theta = -\sqrt{\frac{25}{169}} = -\frac{5}{13}$$

Έξυπνα & Εύκολα!

6. Θέμα 17933 Αρχέτυπο

Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο δίνεται η γωνία $\widehat{AOZ} = \theta$.



Έξυπνα & Εύκολα!

α) Να μεταφέρετε τον κύκλο στην κόλλα σας και να φέρετε σε αυτόν τις τελικές πλευρές των γωνιών $3\pi + \theta$ και $4\pi - \theta$.

(Μονάδες 9)

β)

i. Να αιτιολογήσετε γιατί $\eta\mu\theta = 0,4$.

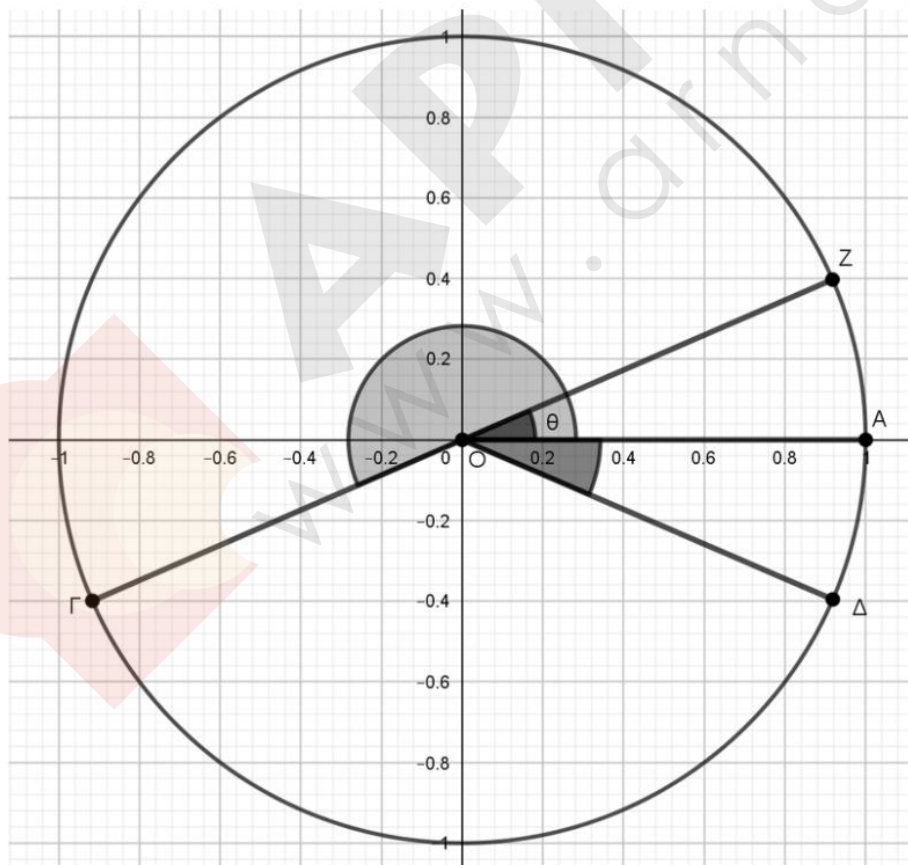
(Μονάδες 7)

ii. Με χρήση του βi) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς: $\eta\mu(3\pi + \theta)$ και $\eta\mu(4\pi - \theta)$.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο έχουμε $\widehat{AOZ} = \theta$, η τελική πλευρά της $3\pi + \theta$, είναι η ΟΓ και η τελική πλευρά της $4\pi - \theta$ είναι η ΟΔ.



Έξυπνα & Εύκολα!

β)

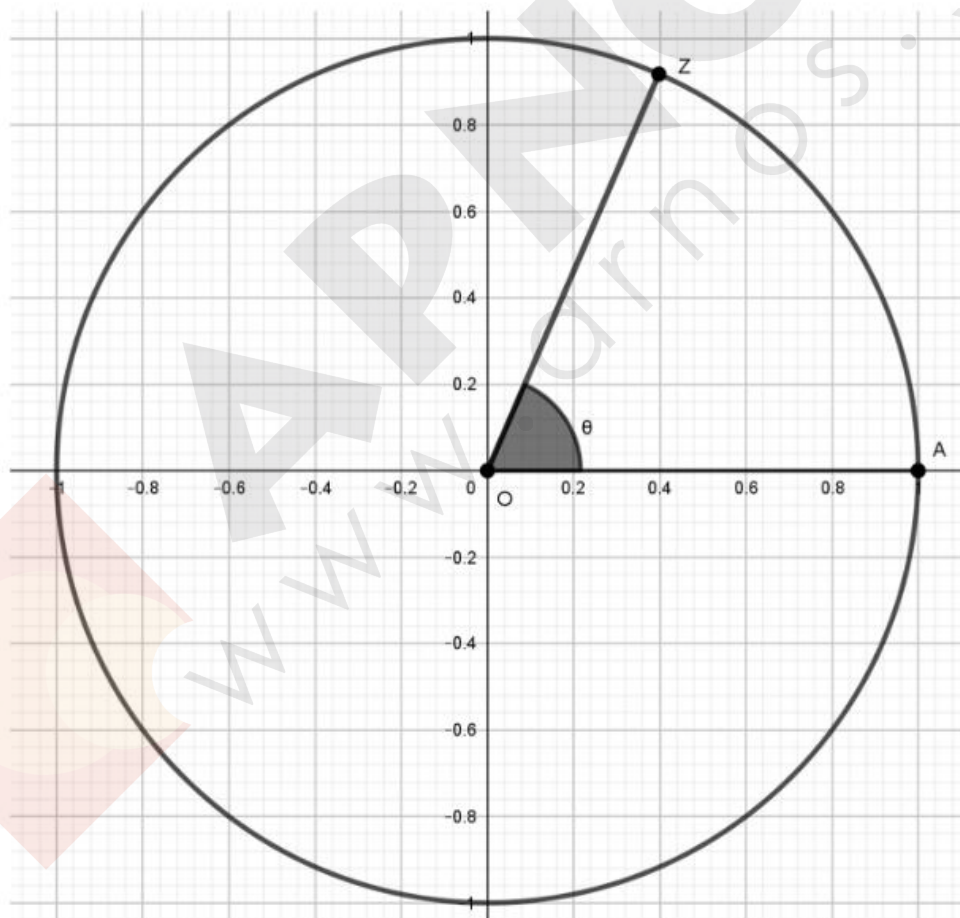
i. Όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα, η τεταγμένη του σημείου Z της τελικής πλευράς της γωνίας θ είναι $0,4$, άρα $\eta\mu\theta = 0,4$.

ii. Από τις συμμετρίες που σχηματίζονται στον τριγωνομετρικό κύκλο, έχουμε:

$$\eta\mu(3\pi + \theta) = -0,4 \text{ και } \eta\mu(4\pi - \theta) = -0,4.$$

7. Θέμα 17936

Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο δίνεται η γωνία $\widehat{AOZ} = \theta$.



Έξυπνα & Εύκολα!

α) Να μεταφέρετε τον κύκλο στην κόλλα σας και να φέρετε σε αυτόν τις τελικές πλευρές των γωνιών $3\pi + \theta$ και $\frac{\pi}{2} + \theta$.

(Μονάδες 9)

β)

i. Να αιτιολογήσετε γιατί $\sin \theta = 0,4$.

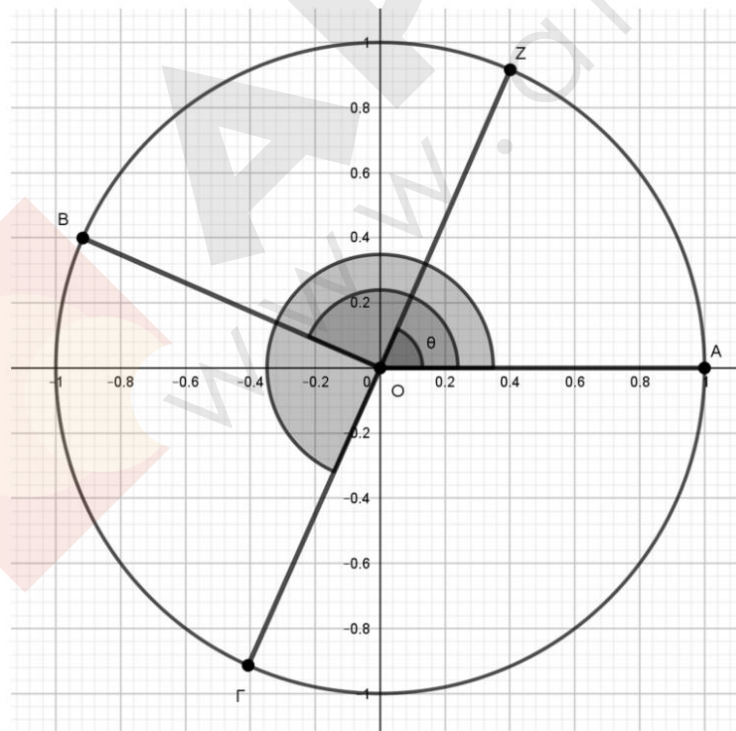
(Μονάδες 7)

ii. Με χρήση του βι) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς: $\sin(3\pi + \theta)$ και $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο έχουμε $\widehat{AOZ} = \theta$, η τελική πλευρά της $3\pi + \theta$, είναι η ΟΓ και η τελική πλευρά της $\frac{\pi}{2} + \theta$ είναι η ΟΒ.



Έξυπνα & Εύκολα!

β)

i. Όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα, η τετμημένη του σημείου Z της τελικής πλευράς της γωνίας θ είναι $0,4$, άρα $\sin\theta = 0,4$.

ii. Από τις συμμετρίες που σχηματίζονται στον τριγωνομετρικό κύκλο, έχουμε:

$$\sin(3\pi + \theta) = -0,4 \text{ και } \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = 0,4.$$

8. Θέμα 21237 Αρχέτυπο

$$\text{Δίνεται ότι } \eta\mu\theta = \frac{\eta\mu\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}}{\sin^2\frac{\pi}{4}}.$$

α) Να δείξετε ότι:

i. $\eta\mu\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

(Μονάδες 5)

ii. $\eta\mu\theta = \sqrt{3} - 1.$

(Μονάδες 7)

β) Αν για την γωνία θ έχουμε $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, να βρείτε το $\sin\theta$.

(Μονάδες 13)

Έξυπνα & Εύκολα!

ΛΥΣΗ

α)

i. Έχουμε $\eta\mu \frac{2\pi}{3} = \eta\mu \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = \eta\mu \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

ii. Έχουμε $\eta\mu\theta = \frac{\eta\mu \frac{2\pi}{3} - \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3}}{\sigma\upsilon\nu^2 \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2} = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}-1$.

β) Έχουμε $\sigma\upsilon\nu\theta = \pm\sqrt{1-\eta\mu^2\theta} = \pm\sqrt{1-(\sqrt{3}-1)^2} = \pm\sqrt{2\sqrt{3}-3} = \sqrt{2\sqrt{3}-3}$, δεδομένου ότι αν μια γωνία ανήκει στο 1ο τεταρτημόριο το συνημίτονό της είναι θετικός αριθμός.

9. Θέμα 22002 Αρχέτυπο

Δίνεται ότι $\eta\mu 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Να βρείτε τους ακόλουθους τριγωνομετρικούς αριθμούς, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

α) $\sigma\upsilon\nu 72^\circ$

(Μονάδες 8)

β) $\sigma\upsilon\nu 108^\circ$

(Μονάδες 9)

γ) $\eta\mu 162^\circ$

(Μονάδες 8)

Έξυπνα & Εύκολα!

ΛΥΣΗ

Αναγωγή στο 1^ο τεταρτημόριο:

$$\alpha) \sin 72^\circ = \sin(90^\circ - 18^\circ) = \cos 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

$$\beta) \sin 108^\circ = \sin(90^\circ + 18^\circ) = \cos 18^\circ = \frac{1-\sqrt{5}}{4}.$$

$$\gamma) \cos 162^\circ = \cos(180^\circ - 18^\circ) = -\cos 18^\circ = -\frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Θέμα 4 - Κωδικός: 18231
10. Θέμα 18231 Αρχέτυπο

Έστω $f: [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση C_f φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

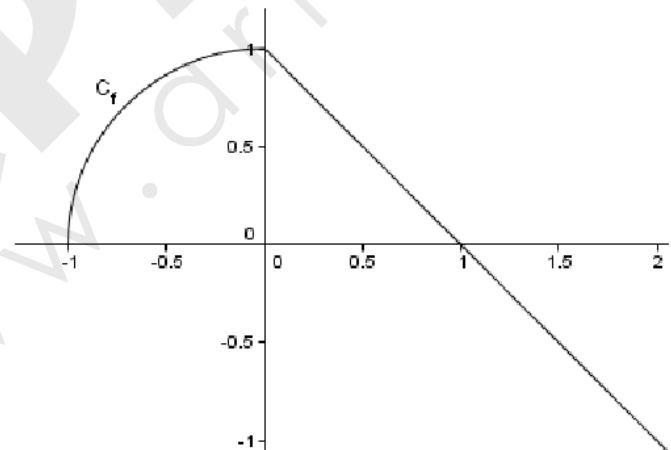
α) Να βρείτε τη μονοτονία και τη μέγιστη τιμή της.

(Μονάδες 5)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$f\left(-\frac{3}{5}\right), f\left(-\frac{5}{9}\right)$$

(Μονάδες 7)



Έξυπνα & Εύκολα!

γ) Αν ο τύπος της συνάρτησης είναι

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x, & x > 0 \end{cases},$$

να βρείτε τους αριθμούς $f(\sin 120^\circ)$, $f(\cos 120^\circ)$

(Μονάδες 8)

δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(x-2)$, $x \geq 1$.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Από τη γραφική παράσταση της f συμπεραίνουμε ότι αυτή είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$. Επιπλέον η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x = 0$. Η μέγιστη τιμή της είναι ίση με $f(0) = 1$.

β) Οι αριθμοί $-\frac{3}{5}$, $-\frac{5}{9}$ περιέχονται στο διάστημα $[-1, 0]$ όπου η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα και

$$-\frac{3}{5} + \frac{5}{9} = \frac{-27+25}{45} = -\frac{2}{45} < 0$$

οπότε $-\frac{3}{5} < -\frac{5}{9}$ και λόγω της μονοτονίας της f συμπεραίνουμε ότι $f\left(-\frac{3}{5}\right) < f\left(-\frac{5}{9}\right)$.

γ) Είναι:

$$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{1}{2} \in [-1, 0]$$

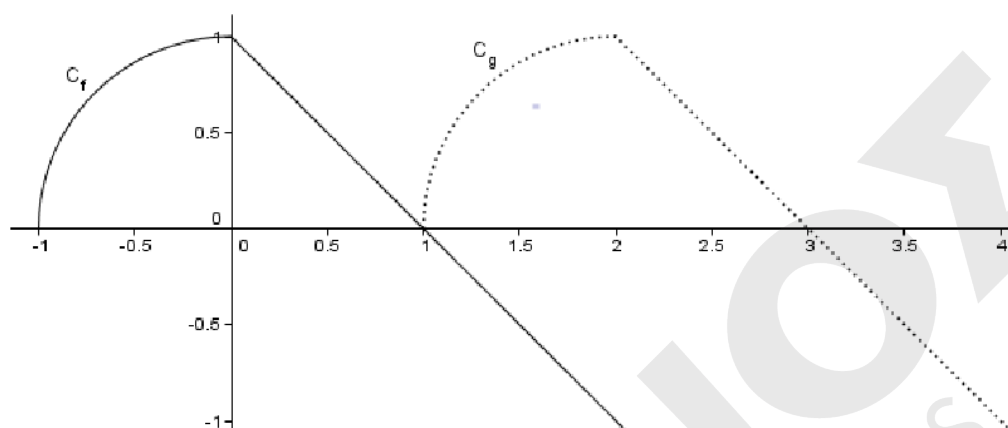
$$\text{και } \cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2} \in (0, +\infty)$$

Έτσι, με τη βοήθεια του τύπου της f έχουμε:

$$f(\sin 120^\circ) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ και } f(\cos 120^\circ) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$$

Έξυπνα & Εύκολα!

δ) Η γραφική παράσταση της g προκύπτει με μεταφορά της C_f δυο μονάδες προς τα δεξιά και φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



Έξυπνα & Εύκολα!