Κεφ. 3.2. - Τράπεζα Θεμάτων 2022 - Άλγεβρα Β' Λυκείου

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ & ΛΥΣΕΙΣ

Θέμα 2 – Κωδικοί:

15046, 15185, 15192, 15429, 15814, 16000, 20817, 20824

Η Τράπεζα Θεμάτων για την Άλγεβρα Β' Λυκείου είναι μία μεγάλη «θάλασσα». Εμείς όμως έχουμε φροντίσει για εσένα, συγκεντρώνοντας εκείνα τα θέματα που αποτελούν τη «βάση» της γνώσης και για τα υπόλοιπα. Μελετώντας και κατανοώντας το μοτίβο σκέψης για τα συγκεκριμένα, μπορείς να λύσεις με επιτυχία και τα υπόλοιπα θέματα. Στην ιστοσελίδα μας www.arnos.gr για το Course της Άλγεβρας, μελετάς και προετοιμάζεσαι με την αναλυτική διδασκαλία σε ασκήσεις και θέματα, στο ύφος της Τράπεζας.

1. **Θέμα 15046** **Αρχέτυπο**

Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $συνA = -\frac{3}{5}$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε το $ημA$.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Ο αριθμός Α περιέχεται στο διάστημα $(0, \pi)$ και επειδή ισχύει $συνA < 0$, έχουμε $\frac{\pi}{2} < A < \pi$.

Άρα το τρίγωνο έχει τη γωνία Α αμβλεία, οπότε είναι αμβλυγώνιο.

β) Από την βασική ταυτότητα $ημ^2A + συν^2A = 1$ με $συνA = -\frac{3}{5}$, παίρνουμε: $ημ^2A + \frac{9}{25} = 1$,

οπότε

$$ημ^2A = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

Επιπλέον, αφού $\frac{\pi}{2} < A < \pi$, έχουμε $ημA > 0$, οπότε $ημA = \frac{4}{5}$.

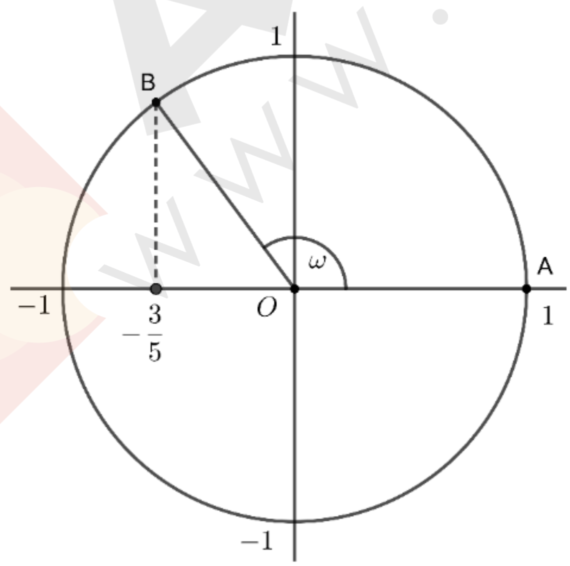
2. **Θέμα 15185**

α) Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας ω του παρακάτω σχήματος και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 11)

β) Αν $συνω = -\frac{3}{5}$, να βρείτε το $ημω$.

(Μονάδες 14)



ΛΥΣΗ

α) Το συνημίτονο της γωνίας ω είναι όσο και η τετμημένη του σημείου B του τριγωνομετρικού κύκλου. Άρα, $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{3}{5}$.

β) Ισχύει ότι:

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow$$

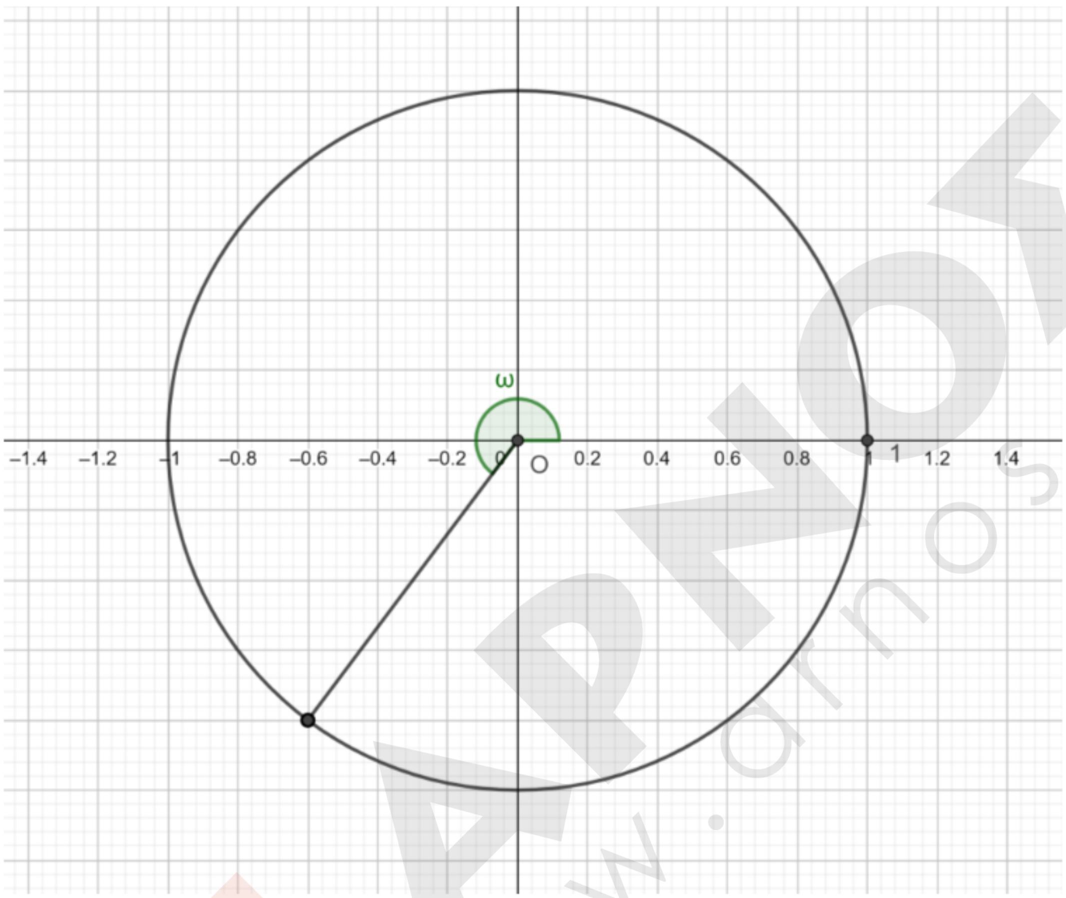
$$\eta\mu^2\omega = 1 - \frac{9}{25} \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega = \frac{16}{25} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\omega = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} = \pm\frac{4}{5}.$$

Από το σχήμα φαίνεται ότι $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$ οπότε $\eta\mu\omega > 0$. Άρα, $\eta\mu\omega = \frac{4}{5}$.

3. Θέμα 15192 Αρχέτυπο

Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία $\hat{\omega}$.



α) Να αιτιολογήσετε με βάση το σχήμα γιατί $\sigma\upsilon\nu\omega = -\dfrac{3}{5}$.

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς

i. $\eta\mu\omega$.

(Μονάδες 6)

ii. $\varepsilon\varphi\omega$

(Μονάδες 7)

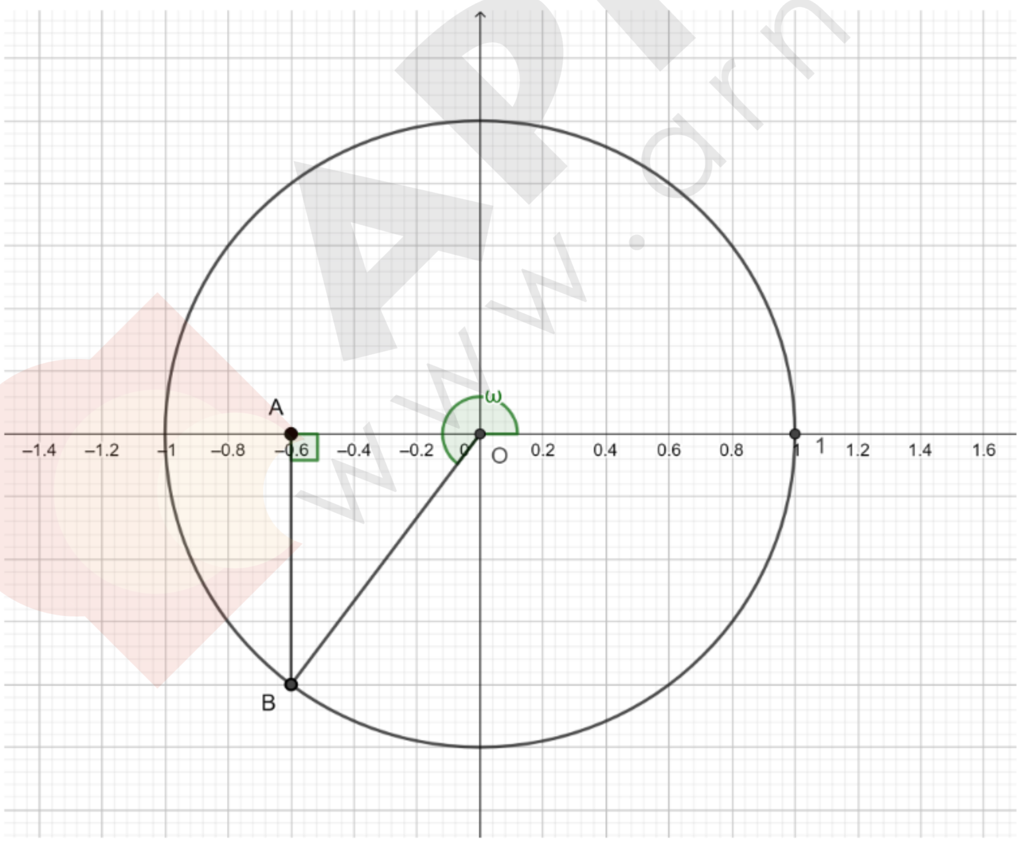
ΛΥΣΗ

α) Το συνημίτονο μιας γωνίας σχεδιασμένης στον τριγωνομετρικό κύκλο είναι η τετμημένη του σημείου τομής της τελικής πλευράς της με τον κύκλο. Οπότε είναι $\sigma\upsilon\nu\omega = -0,6 = -\frac{3}{5}$.

β)

i. Είναι: $\eta\mu\omega = \pm\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\omega} = \pm\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \pm\sqrt{1-\frac{9}{25}} = \pm\frac{4}{5}$, το $\eta\mu\omega = \frac{4}{5}$ απορρίπτεται διότι $\omega \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \eta\mu\omega < 0$, οπότε $\eta\mu\omega = -\frac{4}{5}$.

Εναλλακτικά, σχεδιάζουμε το ορθογώνιο τρίγωνο $O\hat{A}B\left(\hat{A} = \frac{\pi}{2}\right)$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$(\mathrm{AB})=\sqrt{1-(\mathrm{OA})^2}=\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}.$$

Όμως το ημίτονο μιας γωνίας σχεδιασμένης στον τριγωνομετρικό κύκλο είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της τελικής πλευράς της με τον κύκλο. Οπότε είναι $\eta\mu\omega=-\frac{4}{5}$ (1).

ii. Υπολογισμός της $\varepsilon\varphi\omega$:

Είναι: $\varepsilon\varphi\omega=\dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$, οπότε από το α) ερώτημα και τη σχέση (1) έχουμε

$$\varepsilon\varphi\omega=\frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}=\frac{4}{3}.$$

4. Θέμα 15429

α) Να αποδείξετε ότι $\eta\mu 476^o=\eta\mu 116^o$.

(Μονάδες 11)

β) Αν γνωρίζουμε ότι το $\eta\mu 116^o$ είναι περίπου $\frac{9}{10}$, να υπολογίσετε το $\sigma\upsilon\nu 116^o$.

(Μονάδες 14)

ΛΥΣΗ

α) Ισχύει ότι $476^o = 360^o + 116^o$. Άρα, $\eta\mu 476^o = \eta\mu(360^o + 116^o) = \eta\mu 116^o$.

β) Από τη σχέση $\eta\mu^2 116^o + \sigma\upsilon\nu^2 116^0 = 1$ βρίσκουμε $\sigma\upsilon\nu^2 116^o = 1 - \eta\mu^2 116^o$. Άρα,

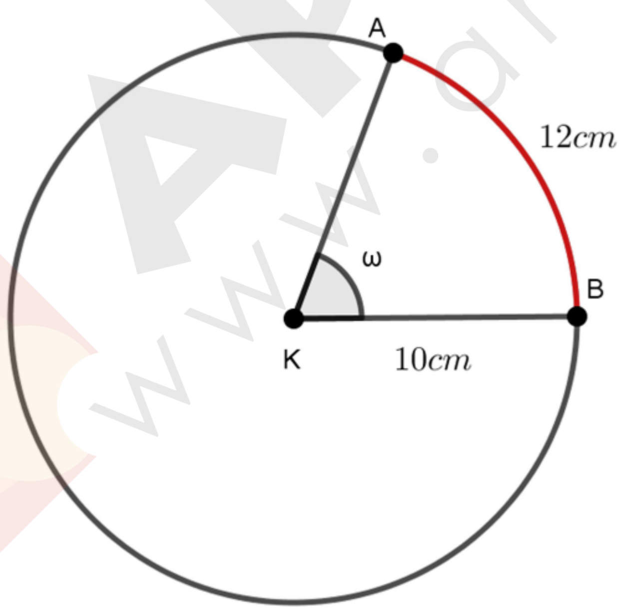
$$\sigma\upsilon\nu^2 116 \approx 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^2 = \frac{19}{100}.$$

Είναι $90^o < 116^o < 180^o$. Άρα, $\sigma\upsilon\nu 116^o < 0$. Οπότε,

$$\sigma\upsilon\nu^2 116^o \approx -\sqrt{\frac{19}{100}} = -\frac{\sqrt{19}}{10}.$$

5. Θέμα 15814 **Αρχέτυπο**

Δίνεται ο κύκλος του παρακάτω σχήματος με κέντρο K και ακτίνα $10\,cm$. Επίσης δίνεται το τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ με μήκος $12\,cm$ και η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία ω.



α)

i. Να αιτιολογήσετε γιατί το μέτρο της γωνίας ω είναι $1,2\,rad$.

(Μονάδες 6)

ii. Με χρήση του αi) ερωτήματος, να αιτιολογήσετε γιατί η γωνία ω είναι οξεία.

(Μονάδες 6)

β) Αν $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{9}{25}$, να βρείτε το $\eta\mu\omega$.

(Δίνεται ότι $\sqrt{544} = 4\sqrt{34}$).

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α)

i. Στο συγκεκριμένο σχήμα, η γωνία ω είναι επίκεντρη και βαίνει σε τόξο μήκους $12\,cm$. Δεδομένου ότι το $1\,rad$ (1 ακτίνιο) είναι η γωνία η οποία, όταν γίνει επίκεντρη, βαίνει σε τόξο μήκους $10\,cm$, η γωνία ω είναι ίση με $\frac{12}{10} = 1,2\,rad$.

ii. Ισχύει ότι $1,2\,rad < \frac{\pi}{2}rad$ (γιατί $1,2 \cdot 2 = 2,4 < \pi$), οπότε η γωνία ω είναι οξεία.

β) Έχουμε:

$$\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1\Leftrightarrow$$
$$\eta\mu^2\omega+\left(\frac{9}{25}\right)^2=1\Leftrightarrow$$
$$\eta\mu^2\omega=1-\frac{81}{625}\Leftrightarrow$$
$$\eta\mu^2\omega=\frac{544}{625}\Leftrightarrow$$
$$\eta\mu\omega=\pm\frac{\sqrt{544}}{25}=\pm\frac{4\sqrt{34}}{25}$$

Και επειδή η γωνία ω είναι οξεία, $\eta\mu\omega=\dfrac{4\sqrt{34}}{25}$.

6. Θέμα 16000 Αρχέτυπο

α) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει γωνία θ ώστε $\eta\mu\theta=\frac{1}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{1}{2}$.

(Μονάδες 12)

β) Έστω θ μια γωνία με $\theta\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ για την οποία ισχύει $\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{1}{2}$. Να βρείτε το ημθ.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει τέτοια γωνία, τότε από την ταυτότητα $\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta=1$ θα έχουμε:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=1 \text{ δηλαδή } \frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$$

που αποκλείεται. Επομένως δεν υπάρχει τέτοια γωνία.

β) Είναι:

$$\eta\mu^2\theta = 1 - \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

και επειδή $\theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, έχουμε $\eta\mu\theta < 0$, οπότε $\eta\mu\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

7. Θέμα 20817

Δίνεται γωνία ω, με $\pi < \omega < \frac{3\pi}{2}$, για την οποία ισχύει $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{4}{5}$.

α) Να δείξετε ότι $\eta\mu\omega = -\frac{3}{5}$.

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίστε την τιμή της παράστασης $\mathrm{A} = \frac{\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega}{1 + \varepsilon\varphi\omega}$.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Από την τριγωνομετρική ταυτότητα $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ έχουμε ισοδύναμα:

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu^2\omega + \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu^2\omega = 1 - \frac{16}{25} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu^2\omega = \frac{9}{25} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\omega = \pm\frac{3}{5}.$$

Επειδή $\pi < \omega < \frac{3\pi}{2}$, $\eta\mu\omega < 0$, οπότε $\eta\mu\omega = -\frac{3}{5}$.

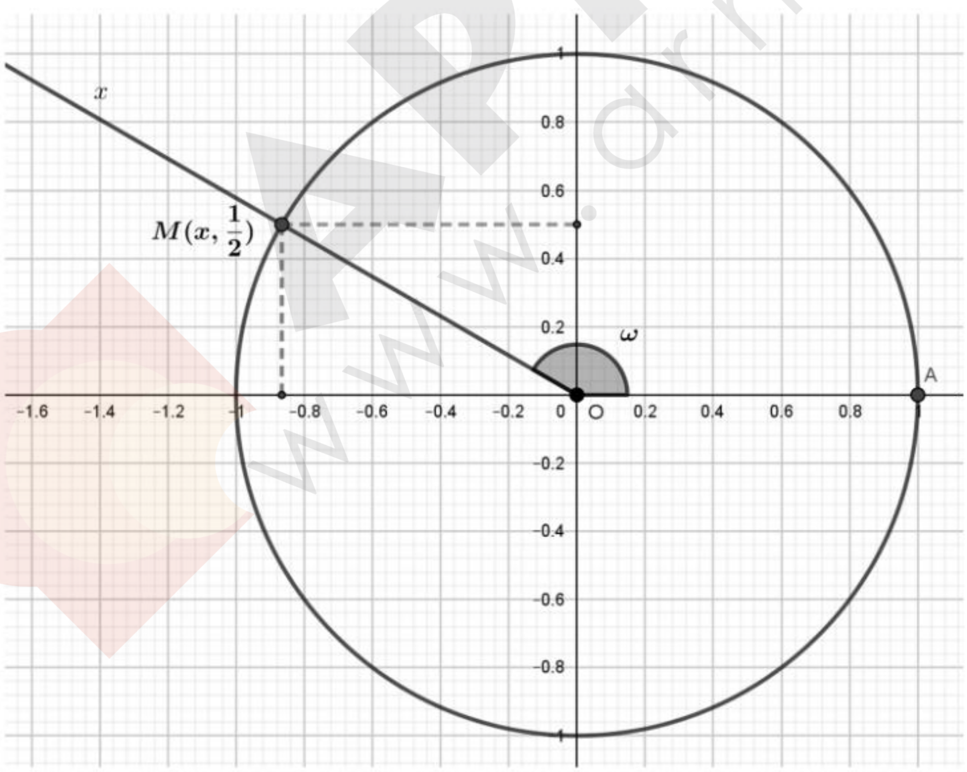
β) Έχουμε $\sigma\upsilon\nu\omega=-\frac{4}{5}$ και $\eta\mu\omega=-\frac{3}{5}$, οπότε $\varepsilon\varphi\omega=\frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=\frac{3}{4}$. Συνεπώς η τιμή της παράστασης

Α είναι:

$$A=\frac{\eta\mu\omega+\sigma\upsilon\nu\omega}{1+\varepsilon\varphi\omega}=\frac{-\frac{3}{5}-\frac{4}{5}}{1+\frac{3}{4}}=\frac{-\frac{7}{5}}{\frac{7}{4}}=-\frac{4}{5}.$$

8. Θέμα 20824 **Αρχέτυπο**

Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο δίνεται γωνία $A\hat{O}x=\omega$, $\frac{\pi}{2}<\omega<\pi$ και το σημείο $M\left(x,\frac{1}{2}\right)$.



α) Να βρείτε το $\eta\mu\omega$. Με ποιον τριγωνομετρικό αριθμό της γωνίας ω ισούται η τετμημένη x του σημείου M;

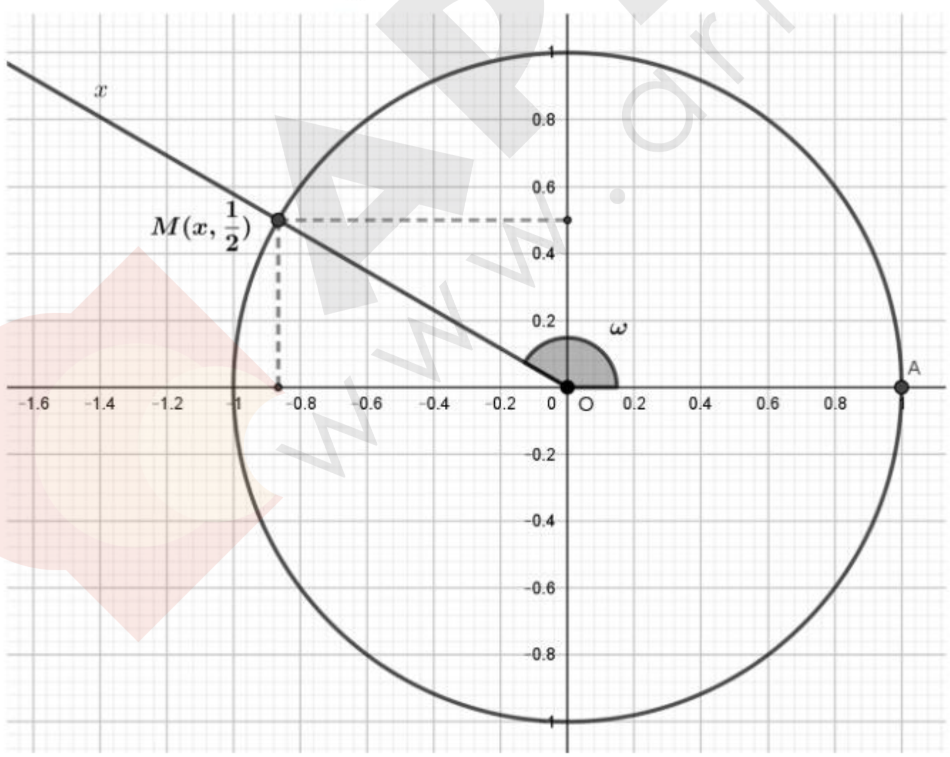
(Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu\omega = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Το σημείο $\mathrm{M}\left(x, \dfrac{1}{2}\right)$ είναι σημείο τομής της τελικής πλευράς της γωνίας ω με τον τριγωνομετρικό κύκλο, άρα η τετμημένη του ισούται με το $\sigma\upsilon\nu\omega$ και η τεταγμένη του με το $\eta\mu\omega$. Οπότε $x = \sigma\upsilon\nu\omega$ και $\eta\mu\omega = \dfrac{1}{2}$



β) Γνωρίζουμε ότι $\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1$ και από το α) ερώτημα $\eta\mu\omega=\frac{1}{2}$. Οπότε έχουμε ισοδύναμα:

$$\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1\Leftrightarrow$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1\Leftrightarrow$$
$$\sigma\upsilon\nu^2\omega=\frac{3}{4}\Leftrightarrow$$
$$\sigma\upsilon\nu\omega=\pm\sqrt{\frac{3}{4}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Από το α) ερώτημα η τετμημένη x του σημείου M ισούται με το $\sigma\upsilon\nu\omega$ και $x<0$. Άρα και $\sigma\upsilon\nu\omega<0$, οπότε $\sigma\upsilon\nu\omega=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.