Κεφ. 3.1. - Τράπεζα Θεμάτων 2022 - Άλγεβρα Β' Λυκείου

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ & ΛΥΣΕΙΣ

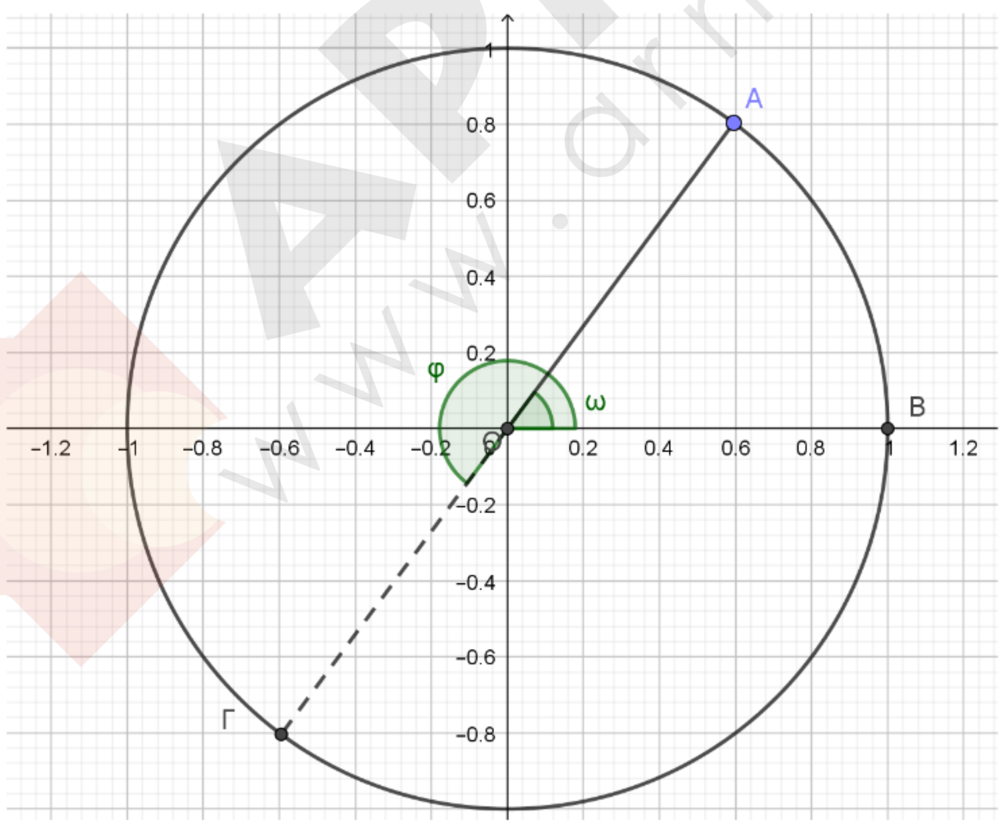
Θέμα 2 – Κωδικοί:

15079, 15191, 17793, 18868, 21161

Η Τράπεζα Θεμάτων για την Άλγεβρα Β' Λυκείου είναι μία μεγάλη «θάλασσα». Εμείς όμως έχουμε φροντίσει για εσένα, συγκεντρώνοντας εκείνα τα θέματα που αποτελούν τη «βάση» της γνώσης και για τα υπόλοιπα. Μελετώντας και κατανοώντας το μοτίβο σκέψης για τα συγκεκριμένα, μπορείς να λύσεις με επιτυχία και τα υπόλοιπα θέματα. Στην ιστοσελίδα μας www.arnos.gr για το Course της Άλγεβρας, μελετάς και προετοιμάζεσαι με την αναλυτική διδασκαλία σε ασκήσεις και θέματα, στο ύφος της Τράπεζας.

1. Θέμα 15079 Αρχέτυπο

Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία $\hat{\omega} = \mathrm{B\hat{O}A}$.



α) Με βάση το σχήμα, να αιτιολογήσετε γιατί $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{3}{5}$.

(Μονάδες 8)

β) Η προέκταση του τμήματος AO τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο Γ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

i. Να εκφράσετε την γωνία $\hat{\varphi} = \mathrm{B}\hat{\mathrm{O}}\Gamma$ με την βοήθεια της γωνίας $\hat{\omega}$.

(Μονάδες 8)

ii. Με την βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο θέλετε να υπολογίσετε το $\sigma\upsilon\nu\varphi$.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Το συνημίτονο μιας γωνίας σχεδιασμένης στον τριγωνομετρικό κύκλο είναι η τετμημένη του σημείου τομής της τελικής πλευράς της με τον κύκλο. Επειδή η τετμημένη του σημείου A είναι $0,6 = \frac{3}{5}$, έχουμε $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{3}{5}$.

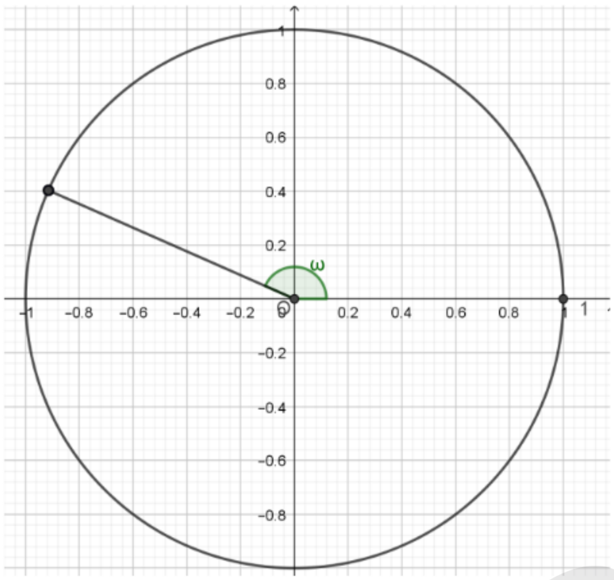
β)

i. Εφόσον η $\mathrm{O}\Gamma$ είναι προέκταση της OA έχουμε $\mathrm{A}\hat{\mathrm{O}}\Gamma = \pi\, rad$. Επομένως $\mathrm{B}\hat{\mathrm{O}}\Gamma = \hat{\varphi} = \pi + \hat{\omega}$.

ii. Το συνημίτονο της γωνίας $\hat{\varphi}$ είναι η τετμημένη του σημείου Γ, δηλαδή $\sigma\upsilon\nu\varphi = -\frac{3}{5}$.

2. Θέμα 15191

Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία $\hat{\omega}$, με $\eta\mu\omega = 0,4$.



α) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να σχεδιάσετε την γωνία $-\hat{\omega}$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

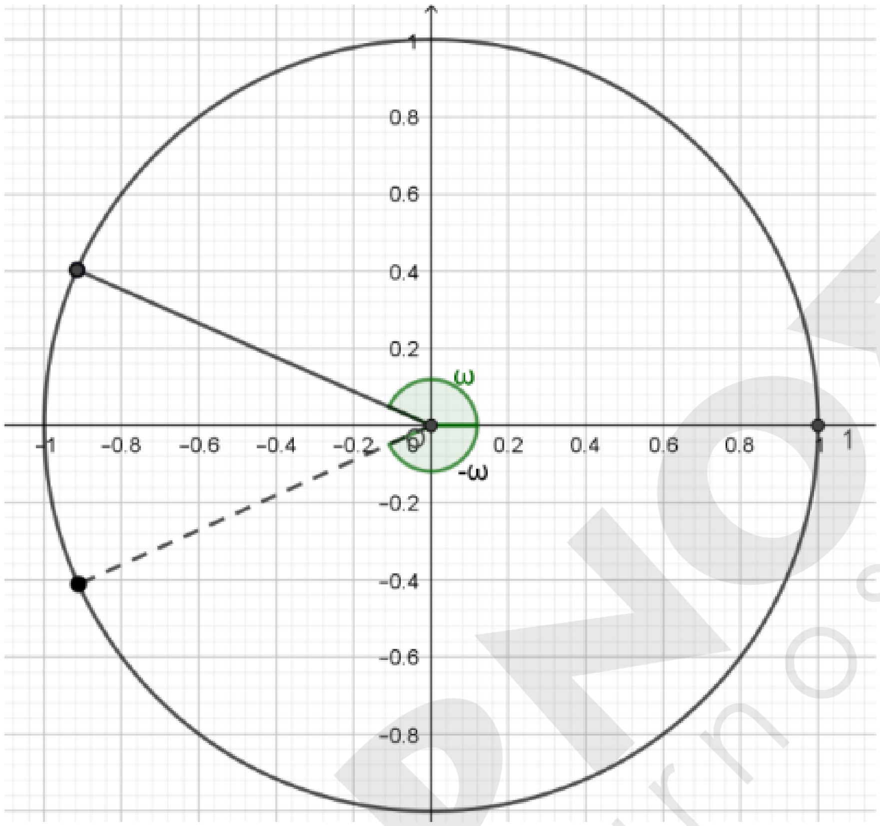
(Μονάδες 12)

β) Με την βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε το $\eta\mu(-\omega)$.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

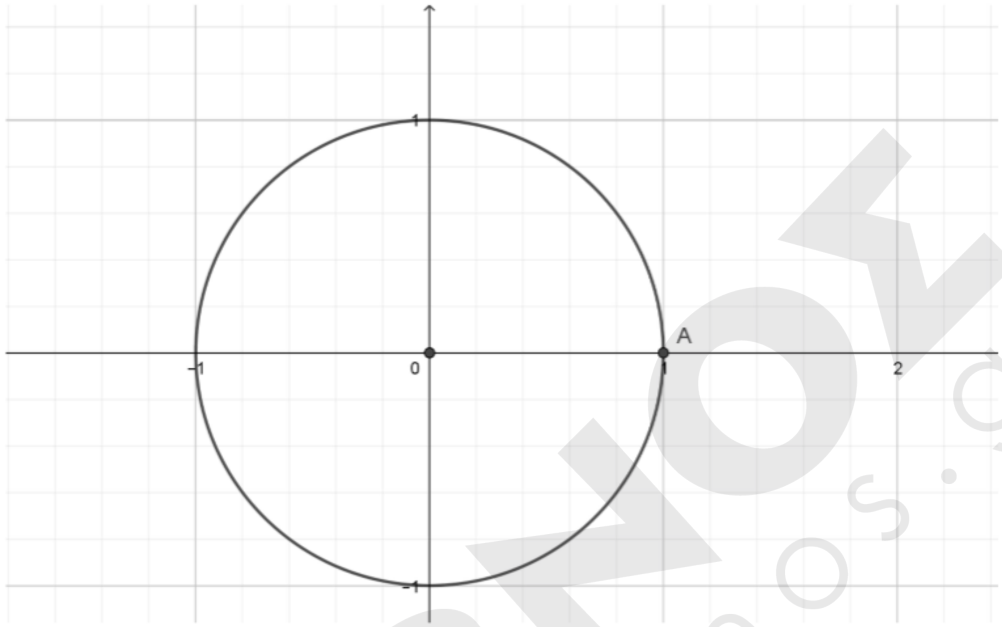
α) Δύο γωνίες σχεδιασμένες στον τριγωνομετρικό κύκλο είναι αντίθετες όταν έχουν τα σημεία τομής της τελικής τους πλευράς με τον τριγωνομετρικό κύκλο συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$. Άρα η γωνία $-\hat{\omega}$ είναι όπως φαίνεται με διακεκομμένη γραμμή στο παρακάτω σχήμα.



β) Το ημίτονο γωνίας σχεδιασμένης στον τριγωνομετρικό κύκλο είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της τελικής πλευράς της γωνίας με το κύκλο, οπότε έχουμε, λόγω συμμετρίας $\eta\mu(-\omega) = -0,4$.

3. Θέμα 17793 Αρχέτυπο

Στον τριγωνομετρικό κύκλο έχει σημειωθεί το σημείο A.



α) Να μεταφέρετε το σχήμα στην κόλα σας και να τοποθετήσετε κατά προσέγγιση στον τριγωνομετρικό κύκλο σημεία B,Γ,Δ ώστε να δημιουργηθούν τόξα $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}=1rad$, $\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma}}=2rad$ και $\overset{\frown}{\mathrm{A\Delta}}=4rad$.

(Μονάδες 13)

β) Για κάθε ένα τόξο του α) ερωτήματος να αποφανθείτε αν το συνημίτονο της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας είναι θετικός ή αρνητικός αριθμός. Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Για τα τόξα $\overparen{AB}, \overparen{A\Gamma}$ και $\overparen{A\Delta}$ έχουμε:

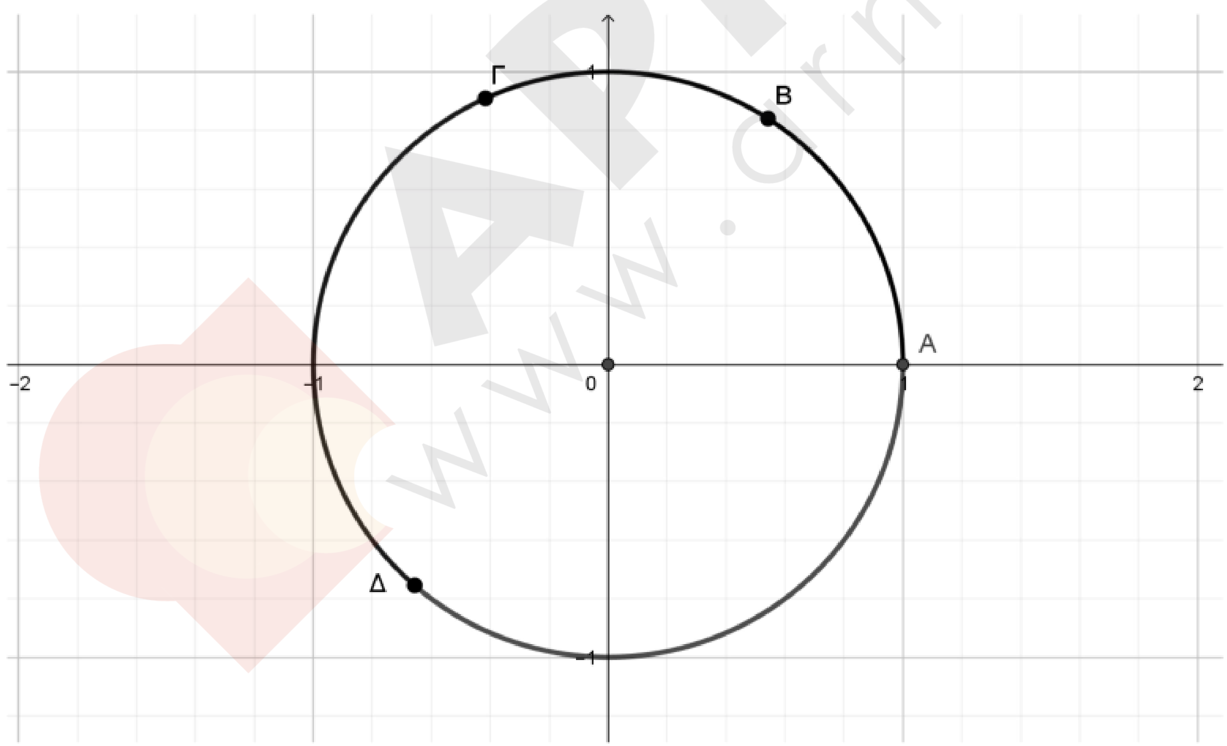
$\overparen{AB} = 1 < \frac{\pi}{2}$, άρα το σημείο B βρίσκεται στο 1^{o} τεταρτημόριο.

Ακόμα $\frac{\pi}{2} < \overparen{A\Gamma} = 2 < \pi$, άρα το σημείο Γ βρίσκεται στο 2^{o} τεταρτημόριο.

Τέλος $\pi < \overparen{A\Delta} = 4 < \frac{3\pi}{2}$, άρα το σημείο Δ βρίσκεται στο 3^{o} τεταρτημόριο.

β) Το πρόσημο του συνημίτονου μιας γωνίας καθορίζεται από το τελικό σημείο της, ανάλογα σε ποιο τεταρτημόριο είναι. Δηλαδή θετικό, αν το τελικό σημείο είναι στο 1^{o} ή 4^{o} τεταρτημόριο και αρνητικό, αν είναι στα άλλα δύο τεταρτημόρια.

Οπότε, $\sigma\upsilon\nu(A\hat{O}B) > 0$, $\sigma\upsilon\nu(A\hat{O}\Gamma) < 0$, $\sigma\upsilon\nu(A\hat{O}\Delta) < 0$.



4. Θέμα 18868 Αρχέτυπο

α) Να αποδείξετε οτι $\varepsilon\varphi 500° = \varepsilon\varphi 140°$.

(Μονάδες 10)

β)

i. Να βρείτε το πρόσημο του τριγωνομετρικού αριθμού $\varepsilon\varphi 500°$

(Μονάδες 05)

ii. Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $A = \varepsilon\varphi 500° \cdot \eta\mu 250° \cdot \sigma\upsilon\nu 300°$.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Είναι γνωστό οτι $\varepsilon\varphi(\kappa \cdot 360° + \omega) = \varepsilon\varphi\omega$ για κάθε ακέραιο κ.

Επομένως $\varepsilon\varphi 500° = \varepsilon\varphi(360° + 140°) = \varepsilon\varphi 140°$.

β)

i. Το πρόσημο του τριγωνομετρικού αριθμού $\varepsilon\varphi 500°$ είναι το ίδιο με το πρόσημο του τριγωνομετρικού αριθμού $\varepsilon\varphi 140°$.
Αφού $90° < 140° < 180°$, τότε η τελική πλευρά της γωνίας $140°$ βρίσκεται στο 2ο τεταρτημόριο του τριγωνομετρικού κύκλου. Άρα $\varepsilon\varphi 140° < 0$.

ii. Είναι λοιπόν $A = \varepsilon\varphi 140° \cdot \eta\mu 250° \cdot \sigma\upsilon\nu 300°$.
Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι $\varepsilon\varphi 140° < 0$.
Αφού $180° < 250° < 270°$, τότε η τελική πλευρά της γωνίας $250°$ βρίσκεται στο 3ο τεταρτημόριο του τριγωνομετρικού κύκλου. Άρα $\eta\mu 250° < 0$.
Αφού $270° < 300° < 360°$, τότε η τελική πλευρά της γωνίας $300°$ βρίσκεται στο 4ο τεταρτημόριο του τριγωνομετρικού κύκλου. Άρα $\sigma\upsilon\nu 300° > 0$.
Επομένως $A > 0$.

5. Θέμα 21161 Αρχέτυπο

Σε έναν κύκλο ακτίνας ρ θεωρούμε ένα τόξο AB με μήκος ίσο με 2ρ.

α) Να βρείτε πόσα ακτίνια είναι η αντίστοιχη στο τόξο ΑΒ, επίκεντρη γωνία ω.

(Μονάδες 13)

β) Αν ω=2 ακτίνια, να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία ω.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Ένα ακτίνιο είναι το τόξο ενός κύκλου ακτίνας ρ που έχει μήκος ίσο με την ακτίνα του κύκλου ρ. Εφόσον το μήκος του τόξου ΑΒ είναι ίσο με δύο ακτίνες του κύκλου η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία θα είναι ίση με 2 ακτίνια.

β) Είναι γνωστό ότι 2π ακτίνια είναι η γωνία η οποία είναι ίση με 360 μοίρες, άρα η γωνία ω που είναι 2 ακτίνια θα αντιστοιχεί σε $\frac{360}{\pi}$μοίρες.