Κεφ. 5.3. - Τράπεζα Θεμάτων 2022 - Άλγεβρα Β' Λυκείου

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ & ΛΥΣΕΙΣ

Θέμα 2 – Κωδικοί:

15267, 15393, 15675, 15808, 17318, 20635, 20692, 20851, 21174, 21449, 21450, 21472, 21473, 21675, 21952, 21953, 21954

Η Τράπεζα Θεμάτων για την Άλγεβρα Β' Λυκείου είναι μία μεγάλη «θάλασσα». Εμείς όμως έχουμε φροντίσει για εσένα, συγκεντρώνοντας εκείνα τα θέματα που αποτελούν τη «βάση» της γνώσης και για τα υπόλοιπα. Μελετώντας και κατανοώντας το μοτίβο σκέψης για τα συγκεκριμένα, μπορείς να λύσεις με επιτυχία και τα υπόλοιπα θέματα. Στην ιστοσελίδα μας www.arnos.gr για το Course της Άλγεβρας, μελετάς και προετοιμάζεσαι με την αναλυτική διδασκαλία σε ασκήσεις και θέματα, στο ύφος της Τράπεζας.

1. **Θέμα 15267 Αρχέτυπο**

Δίνεται η εξίσωση $\log(x^2+1)=1+\log3-\log6$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση γράφεται $\log(x^2+1)=\log5$.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Από τις ιδιότητες των λογαρίθμων έχουμε:

$$1+\log3-\log6=\log10+\log3-\log6=\log\frac{10\cdot3}{6}=\log5$$

οπότε η εξίσωση γράφεται $\log(x^2+1)=\log5$.

β) Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$, αφού $x^2+1>0$. Έτσι με $x\in\mathbb{R}$ και με τη βοήθεια του ερωτήματος α) η εξίσωση γράφεται:

$$\log(x^2+1)=\log5\Leftrightarrow x^2+1=5\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x=2 \text{ ή } x=-2$$

2. **Θέμα 15393 Αρχέτυπο**

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2^x, x \in R$ και δύο άλλων συναρτήσεων $g(x)$ και $h(x)$, $x \in R$ που προέκυψαν από μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της $f(x)$.

α) Να εξηγήσετε με τι είδους μετατοπίσεις προέκυψαν οι γραφικές παραστάσεις των $g(x)$ και $h(x)$ από την γραφική παράσταση της $f(x)$.

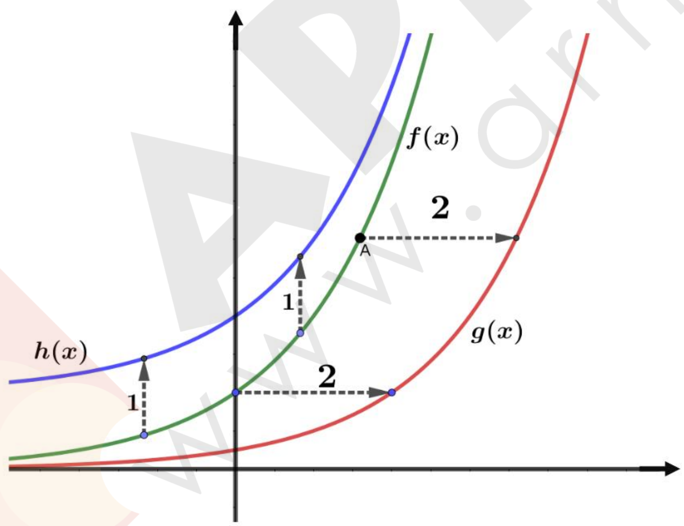
(Μονάδες 8)

β) Να γράψετε τους τύπους των συναρτήσεων $g(x)$ και $h(x)$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την τετμημένη του σημείου Α της γραφικής παράστασης της f του οποίου η τεταγμένη είναι 16.

(Μονάδες 9)



ΛΥΣΗ

α) Παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση της $g(x)$ προέκυψε από μία οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $f(x)$ κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά.

Επίσης, η γραφική παράσταση της $h(x)$ προέκυψε από μία κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $f(x)$ κατά 1 μονάδα προς τα πάνω.

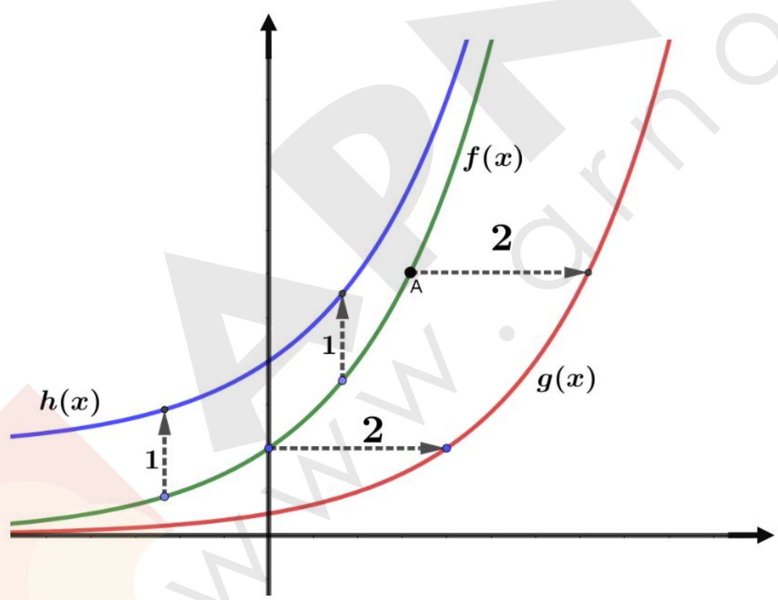
β) Με βάση τα παραπάνω, έχουμε:

$g(x) = f(x - 2)$, άρα $g(x) = 2^{x-2} = \frac{2^x}{2^2} = \frac{1}{4} \cdot f(x)$.

και $h(x) = f(x) + 1 = 2^x + 1$.

γ) Ζητάμε την τιμή του x, ώστε $f(x) = 16 \Leftrightarrow 2^x = 16 \Leftrightarrow 2^x = 2^4 \Leftrightarrow x = 4$.

Έτσι, το ζητούμενο σημείο είναι $\mathrm{A}(4,16)$.



3. Θέμα 15675

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(e^x-1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f ορίζεται για όλες τις πραγματικές τιμές του x για τις οποίες ισχύει

$$\begin{aligned}&e^x-1>0\Leftrightarrow\\&e^x>1\Leftrightarrow\\&e^x>e^0\Leftrightarrow\\&x>0\end{aligned}$$

Συνεπώς το πεδίο ορισμού της f είναι το $(0,+\infty)$.

β) Είναι

$$\begin{aligned}&f(x)=0\Leftrightarrow\\&\ln\left(e^x-1\right)=\ln 1\Leftrightarrow\\&e^x-1=1\Leftrightarrow\\&e^x=2\Leftrightarrow\\&x=\ln 2\end{aligned}$$

Η λύση $\ln 2$ είναι δεκτή αφού $\ln 2>\ln 1\Leftrightarrow \ln 2>0$.

4. Θέμα 15808

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x+2)$.

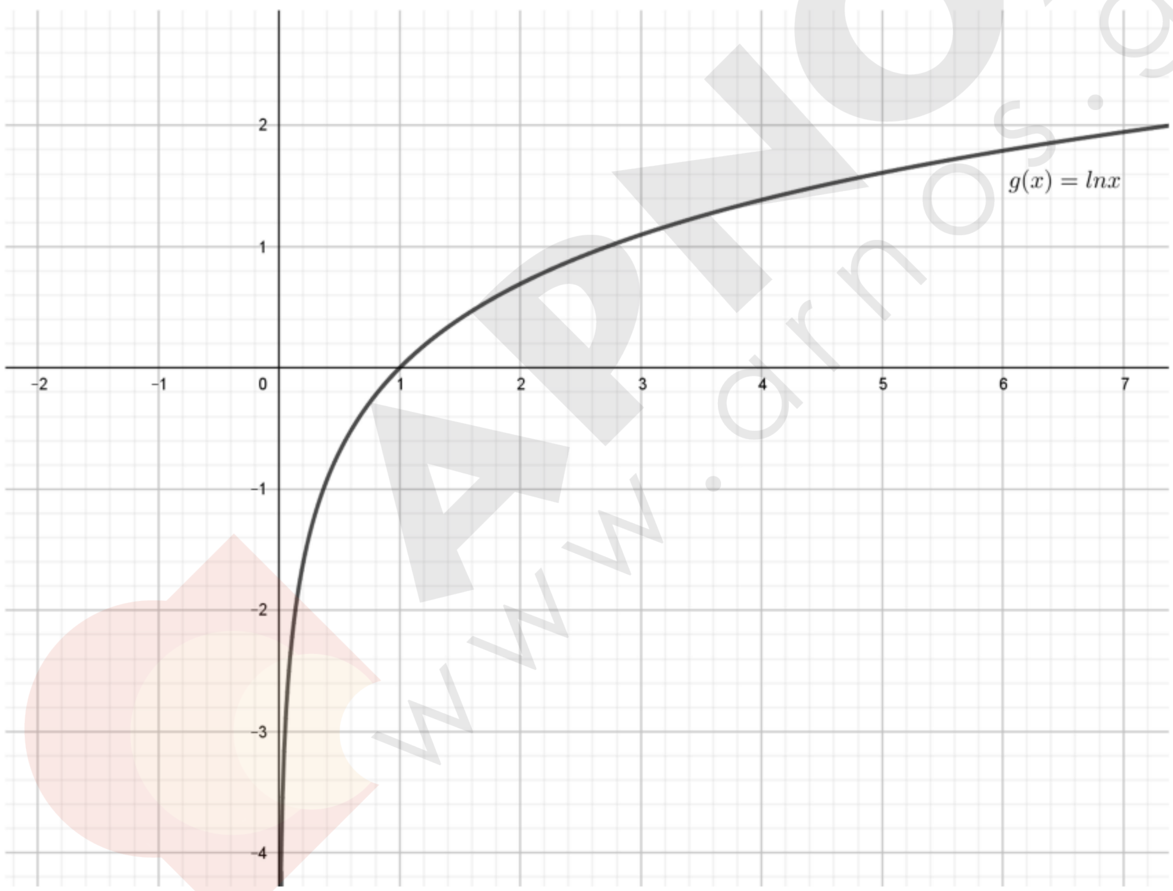
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 8)

γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \ln x$.



Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να χαράξετε τη γραφική παράσταση της $f(x) = \ln(x+2)$ μετατοπίζοντας κατάλληλα την γραφική παράσταση της g.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f ορίζεται για όλες τις πραγματικές τιμές του x για τις οποίες ισχύει:

$$x+2>0 \Leftrightarrow$$
$$x>-2$$

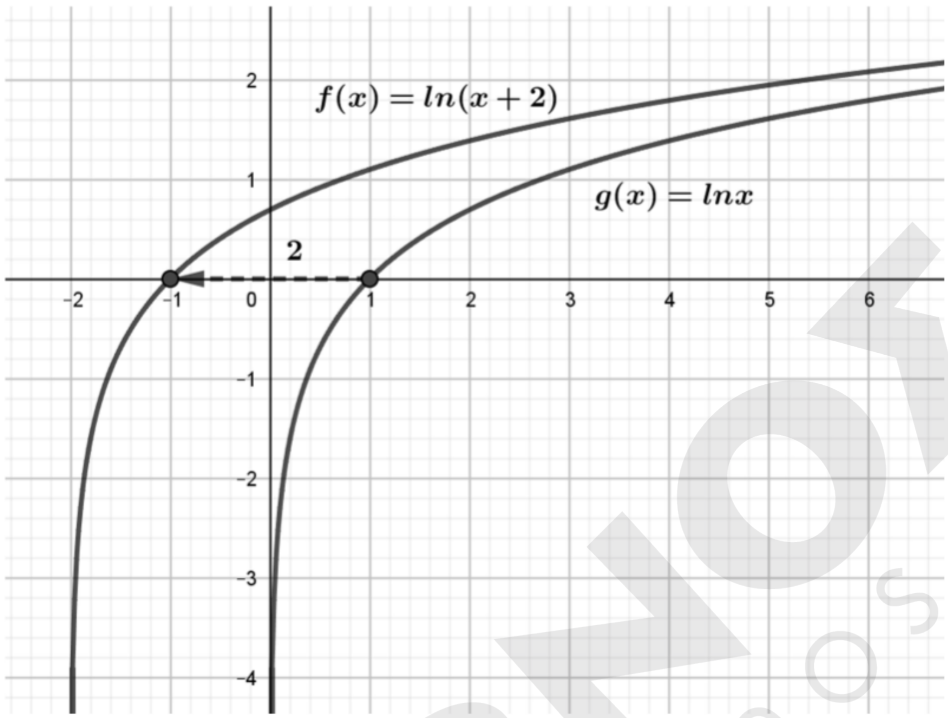
Συνεπώς το πεδίο ορισμού της f είναι το $(-2,+\infty)$.

β) Η τετμημένη του σημείου τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα xx', είναι η λύση της εξίσωσης:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow$$
$$\ln(x+2)=0 \overset{\ln x=y \Leftrightarrow e^y=x}{\Leftrightarrow}$$
$$x+2=e^0 \Leftrightarrow$$
$$x+2=1 \Leftrightarrow$$
$$x=-1.$$

Συνεπώς το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα xx' είναι το $(-1,0)$.

γ) Η γραφική παράσταση της $f(x)=g(x+2)=\ln(x+2)$ θα προκύψει από μετατόπιση της γραφικής παράστασης της g κατά δυο μονάδες αριστερά, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



5. Θέμα 17318 Αρχέτυπο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 3)$, με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το $f(3)$.

(Μονάδες 5)

β) Να δείξετε ότι $ln3 + 3ln2 - f(3) = ln4$.

(Μονάδες 7)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = ln4$.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $f(3) = \ln(3^2 - 2 \cdot 3 + 3) = ln6$.

β) Είναι $ln3 + 3ln2 - f(3) = ln3 + ln2^3 - ln6 = ln\frac{24}{6} = ln4$.

γ) Με $x \in \mathbb{R}$, είναι:

$$f(x) = ln4 \Leftrightarrow \ln(x^2 - 2x + 3) = ln4 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2 - 2x - 1$ είναι: $\Delta = 4 + 4 = 8 = 4 \cdot 2$ και

οι ρίζες: $x_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = \frac{2(1 \pm \sqrt{2})}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$.

Άρα: $x_1 = 1 + \sqrt{2}$ και $x_2 = 1 - \sqrt{2}$.

6. Θέμα 20635

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x+1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 7)

β) Να εξετάσετε αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $O(0, 0)$.

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2$.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση ορίζεται μόνο όταν ισχύει $x + 1 > 0$. Είναι: $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$.

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $A = (-1, +\infty)$

β) Με $x = 0$ έχουμε:

$$f(0) = \ln(0+1) = \ln 1 = 0$$

Άρα η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή O.

γ) Με $x > -1$ έχουμε:

$$f(x) = 2 \Leftrightarrow \ln(x+1) = 2 \Leftrightarrow x + 1 = e^2 \Leftrightarrow x = e^2 - 1$$

που είναι αποδεκτή αφού περιέχεται στο διάστημα $A = (-1, +\infty)$.

7. Θέμα 20692 Αρχέτυπο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = logx, x > 0$.

α) Να υπολογίσετε τους αριθμούς $f(100)$, $f(\sqrt{10})$

(Μονάδες 12)

β) Για $x > 1$, να επιλύσετε την εξίσωση $f(x+1) + f(x-1) = log10 - log5$.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) $f(100) = log100 = 2$ διότι η βάση του λογαρίθμου είναι το 10, άρα από τον ορισμό έχουμε $10^2 = 100$.

$f(\sqrt{10}) = log(\sqrt{10}) = log\left(10^{1/2}\right) = \frac{1}{2}$.

β) Η εξίσωση γράφεται $log(x+1) + log(x-1) = log10 - log5 \Leftrightarrow$

$log[(x+1)(x-1)] = log\left(\frac{10}{5}\right) \Leftrightarrow log(x^2 - 1^2) = log2$.

Ώστε $x^2 - 1 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 3$. Αλλά $x > 1$, οπότε $x = \sqrt{3}$. (η λύση $x = -\sqrt{3}$ απορρίπτεται).

8. Θέμα 20851

Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = 2\log 6 - \log 12 \ \text{ και } \ B = \log 5 + \log 2$$

α) Να αποδείξετε ότι $A = \log 3$ και $B = 1$.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $A < B$.

(Μονάδες 05)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\log x < 1$.

(Μονάδες 08)

ΛΥΣΗ

α) Χρησιμοποιώντας ιδιότητες λογαρίθμων, έχουμε:

$$A = 2\log 6 - \log 12 = \log 6^2 - \log 12 = \log 36 - \log 12 = \log\frac{36}{12} = \log 3$$

$$B = \log 5 + \log 2 = \log(5 \cdot 2) = \log 10 = 1$$

β) Είναι:

$$A < B \Leftrightarrow \log 3 < 1 \Leftrightarrow \log 3 < \log 10 \overset{logx \uparrow}{\Longleftrightarrow} 3 < 10$$

Επομένως, αποδείξαμε την ζητούμενη σχέση.

γ) Η ανίσωση αυτή ορίζεται εφόσον $x > 0$. Τότε έχουμε ισοδύναμα:

$$\log x < 1 \Leftrightarrow \log x < \log 10 \overset{logx\ γν.αύξουσα}{\Longleftrightarrow} x < 10.$$

Επομένως, είναι $0 < x < 10$.

9. Θέμα 21174 Αρχέτυπο

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η εξίσωση:

$\log(x+1) = -\log 2 - \log(1-x) \quad (1)$.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $\log(x+1) = \log\left(\frac{1}{2}\right) - \log(1-x)$.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Για να ορίζεται η εξίσωση (1) πρέπει να είναι $x+1>0$ και $1-x>0$.

Ισοδύναμα πρέπει $x>-1$ και $x<1$. Οπότε η εξίσωση ορίζεται για $x \in (-1,1)$.

β) Για $x \in (-1,1)$ η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα $\log(x+1)=\log\left(\frac{1}{2}\right)-\log(1-x) \Leftrightarrow$

$\log(x+1)+\log(1-x)=\log(1)-\log(2) \Leftrightarrow \log[(x+1)(1-x)]=\log\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow (x+1)(1-x)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$1-x^2=\frac{1}{2} \Leftrightarrow -x^2=\frac{-1}{2} \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \in (-1,1)$ δεκτές και οι δύο λύσεις.

10. Θέμα 21449

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x+1)$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής (αν υπάρχουν) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 10)

γ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της $y=\ln x$.

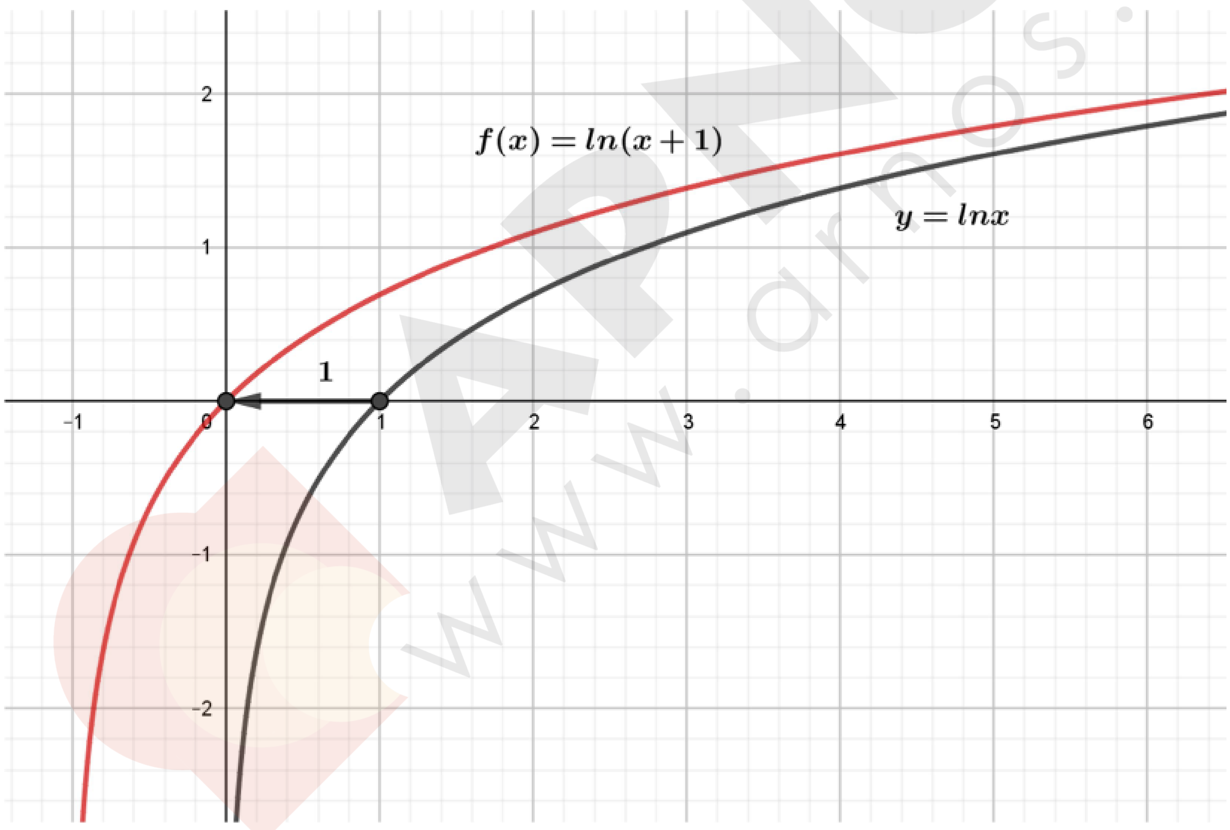
(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση ορίζεται για τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$. Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $\mathrm{A}=(-1,+\infty)$.

β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από την αρχή των αξόνων $(0,0)$, αφού για $x=0$, έχουμε $f(0)=\ln(0+1)=\ln 1=0$. Δεν τέμνει τον $x'x$ σε άλλο σημείο, αφού για $y=0$, έχουμε $\ln(x+1)=0 \Leftrightarrow x+1=1 \Leftrightarrow x=0$.

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f προκύπτει από μετατόπιση της $y=\ln x$ κατά 1 μονάδα αριστερά, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



11. Θέμα 21450 Αρχέτυπο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln(x^2+4)$ και $g(x)=\ln x+\ln 4$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=g(x)$.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Ισχύει $x^2+4>0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x, οπότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A_f=\mathbb{R}$. Η συνάρτηση g ορίζεται για τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $x>0$. Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το $A_g=(0,+\infty)$.

β) Γνωρίζουμε ότι για $\alpha>0, \alpha\neq 1$ και $x_1, x_2>0$ ισχύει η ισοδυναμία:

$$\log_\alpha x_1=\log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1=x_2.$$

Οπότε έχουμε:

$f(x)=g(x) \Leftrightarrow$

$\ln(x^2+4)=\ln x+\ln 4 \Leftrightarrow$

$\ln(x^2+4)=\ln(4x) \Leftrightarrow$

$x^2+4=4x \Leftrightarrow$

$x^2-4x+4=0 \Leftrightarrow$

$(x-2)^2=0 \Leftrightarrow$

$x=2>0$, δεκτή.

12. Θέμα 21472 **Αρχέτυπο**

α) Να λύσετε την εξίσωση: $\ln(x+1)=\ln(2x)$.

(Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $\ln(x+1)>\ln(2x)$.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Γνωρίζουμε ότι για $\alpha>0, \alpha\neq 1$ και $x_1,x_2>0$ ισχύει η ισοδυναμία:

$$\log_\alpha x_1=\log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1=x_2.$$

Επίσης η εξίσωση ορίζεται για $\begin{cases} x+1>0 \\ \text{και} \\ 2x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ \text{και} \\ x>0 \end{cases}$, δηλαδή $x>0$.

Οπότε έχουμε:

$\ln(x+1)=\ln(2x)\Leftrightarrow$

$x+1=2x\Leftrightarrow$

$x=1$, που είναι δεκτή γιατί $x>0$.

β) Η ανίσωση ορίζεται επίσης για $x>0$. Οπότε έχουμε:

$\ln(x+1)>\ln(2x)\Leftrightarrow x+1>2x\Leftrightarrow x<1$

Επειδή $x>0$, η ανίσωση αληθεύει για $0<x<1$.

13. Θέμα 21473

α) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση

$$\mathrm{A} = \ln x + \ln(x+6).$$

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση

$$\ln x + \ln(x+6) = \ln 7.$$

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Η παράσταση A ορίζεται για τις τιμές του πραγματικού αριθμού x για τις οποίες ισχύει:

$$\begin{cases} x>0 \\ \text{και} \\ x+6>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \text{και} \\ x>-6 \end{cases}, \text{ δηλαδή } x>0.$$

β) Γνωρίζουμε ότι για $\alpha>0, \alpha\neq 1$ και $x_1, x_2>0$ ισχύει η ισοδυναμία:

$$\log_\alpha x_1 = \log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

Οπότε για $x>0$ έχουμε:

$\ln x + \ln(x+6) = \ln 7 \Leftrightarrow$

$\ln[x\cdot(x+6)] = \ln 7 \Leftrightarrow$

$x\cdot(x+6) = 7 \Leftrightarrow$

$x^2 + 6x - 7 = 0 \Leftrightarrow$

$(x-1)\cdot(x+7) = 0 \Leftrightarrow$

$x = 1 > 0$, που είναι δεκτή ή $x=-7$ (απορρίπτεται).

Τελικά η λύση της εξίσωσης είναι $x=1$.

14. Θέμα 21675 **Αρχέτυπο**

Δίνεται η εξίσωση $\log(x^2+1)=1-\log 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $1-\log 2=\log 5$.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$1-\log 2=\log 10-\log 2=\log\frac{10}{2}=\log 5$$

β) Επειδή $x^2+1>0$ η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Με τη βοήθεια του ερωτήματος, α) έχουμε:

$$\log(x^2+1)=1-\log 2\Leftrightarrow \log(x^2+1)=\log 5\Leftrightarrow x^2+1=5$$

$$\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x=-2 \text{ ή } x=2$$

Άρα η εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς -2 και 2.

15. Θέμα 21952

Δίνεται η παράσταση $A=\ln\sqrt{e}+\log\sqrt[3]{100}$. Να αποδείξετε ότι

α) $A=\frac{7}{6}$.

(Μονάδες 12)

β) $0<\ln A<1$.

(Μονάδες 13)

Δίνεται $e\simeq 2.71$.

ΛΥΣΗ

α) Είναι $A = \ln\sqrt{e} + \log\sqrt[3]{100} = \ln e^{\frac{1}{2}} + \log 10^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$.

β) Είναι $1 < \frac{7}{6} < e \Leftrightarrow \ln 1 < \ln\frac{7}{6} < \ln e \Leftrightarrow 0 < \ln A < 1$.

16. Θέμα 21953

Δίνεται η παράσταση $A = e^{\ln 2} + 10^{2\log\sqrt{5}}$. Να αποδείξετε ότι

α) $A = 7$.

(Μονάδες 12)

β) $0 < \log A < 1$.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $A = e^{\ln 2} + 10^{2\log\sqrt{5}} = e^{\ln 2} + 10^{\log(\sqrt{5})^2} = e^{\ln 2} + 10^{\log 5} = 2 + 5 = 7$.

β) Είναι $1 < 7 < 10 \Leftrightarrow \log 1 < \log 7 < \log 10 \Leftrightarrow 0 < \log A < 1$.

17. Θέμα 21954 Αρχέτυπο

Δίνεται η παράσταση $A = \ln(\ln e) + \log(\log 10^{10})$.

α) Να αποδείξετε ότι :

i. $\log 10^{10} = 10$

(Μονάδες 6)

ii. $A = 1$.

(Μονάδες 6)

β) Να λυθεί η εξίσωση $\log(x^2 + 1) = A$.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α)

i. Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x>0$, $\alpha>0$ και $\alpha\neq 1$ ισχύει ότι $\log_\alpha \alpha^x = x$.

Οπότε για $x=\alpha=10$ έχουμε ότι $\log 10^{10}=10$.

Εναλλακτικά, $\log 10^{10} = 10\cdot\log 10 = 10\cdot 1 = 10$.

ii. Είναι $\mathrm{A}=\ln(\ln e)+\log(\log 10^{10}) = \ln 1 + \log 10 = 0+1=1$.

β) Η εξίσωση $\log(x^2+1)=\mathrm{A}$ ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$, αφού $x^2\geq 0 \Leftrightarrow x^2+1\geq 1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και ισοδύναμα έχουμε :

$$\log(x^2+1)=\mathrm{A} \Leftrightarrow \log(x^2+1)=1 \Leftrightarrow x^2+1=10 \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow x=\pm 3.$$

Θέμα 3 - Κωδικός: 15676

18. Θέμα 15676

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(e^x-1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα xx'.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τον xx'.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f ορίζεται για όλες τις πραγματικές τιμές του x για τις οποίες ισχύει

$$e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow$$
$$e^x > 1 \Leftrightarrow$$
$$e^x > e^0 \Leftrightarrow$$
$$x > 0$$

Συνεπώς το πεδίο ορισμού της f είναι το $(0, +\infty)$.

β) Οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα xx', είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\ln\left(e^x - 1\right) = \ln 1 \Leftrightarrow$$
$$e^x - 1 = 1 \Leftrightarrow$$
$$e^x = 2 \Leftrightarrow$$
$$x = \ln 2$$

Η λύση $\ln 2$ είναι δεκτή αφού $\ln 2 > \ln 1 \Leftrightarrow \ln 2 > 0$.

Συνεπώς το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα xx' είναι το $(\ln 2, 0)$.

γ) Η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τον άξονα xx', για όλες τις τιμές του x που είναι λύσεις της ανίσωσης

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow$$
$$\ln\left(e^x - 1\right) < \ln 1 \Leftrightarrow$$
$$e^x - 1 < 1 \Leftrightarrow$$
$$e^x < 2 \Leftrightarrow$$
$$x < \ln 2$$

Όμως πρέπει εξ αρχής $x > 0$, οπότε τελικά η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τον xx' όταν $0 < x < \ln 2$.

Θέμα 4 – Κωδικοί:

15015, 15093, 15591, 15678, 15679, 15690, 15694, 16001, 18865,

21445, 21446, 21447, 21470, 21474, 21678, 21679, 21680, 21950

19. Θέμα 15015 Αρχέτυπο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-x^2-2x$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

(Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την εξίσωση $\ln^3 x-\ln^2 x-2\ln x=0$.

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\ln^3 x-\ln^2 x-2\ln x>0$.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $P(x)=0 \Leftrightarrow x^3-x^2-2x=0 \Leftrightarrow x(x^2-x-2)=0$. Οπότε $x=0$ ή $x^2-x-2=0$ που έχει $\Delta=9$ και ρίζες $x=-1$ και $x=2$. Τελικά ρίζες της εξίσωσης $P(x)=0$ είναι οι $x=0$, $x=-1$ και $x=2$.

β) Για να ορίζεται η εξίσωση, πρέπει $x>0$. Θέτουμε $\ln x=\omega$ και η εξίσωση γίνεται $P(\omega)=0$.

Από το α) ερώτημα έχουμε τις ρίζες $\omega=0$, $\omega=-1$, $\omega=2$. Οπότε προκύπτουν τρείς εξισώσεις:

i) $\ln x=0 \Leftrightarrow \ln x=\ln 1 \Leftrightarrow x=1$ δεκτή.

ii) $\ln x=-1 \Leftrightarrow \ln x=\ln e^{-1} \Leftrightarrow x=e^{-1}$ δεκτή.

iii) $\ln x=2 \Leftrightarrow \ln x=\ln e^2 \Leftrightarrow x=e^2$ δεκτή.

γ) Η ανίσωση $x^3-x^2-2x>0 \Leftrightarrow P(x)>0 \Leftrightarrow x\left(x^2-x-2\right)>0$ αληθεύει για $x\in(-1,0)\cup(2,+\infty)$, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
x^2-x-2		+	0	−		−	0	+	
x		−		−	0	+		+	
$P(x)$		−	0	+	0	−	0	+	

Οπότε για την ανίσωση $(\ln x)^3-(\ln x)^2-2(\ln x)>0 \Leftrightarrow P(\ln x)>0$, προκύπτει ότι $\ln x\in(-1,0)\cup(2,+\infty)$. Λύνουμε τις δύο ανισώσεις:

i) $-1<\ln x<0 \Leftrightarrow \ln e^{-1}<\ln x<\ln 1 \overset{\nearrow}{\Leftrightarrow} \frac{1}{e}<x<1$

ii) $2<\ln x \Leftrightarrow \ln e^2<\ln x \overset{\nearrow}{\Leftrightarrow} e^2<x$.

Τελικά $x\in\left(\frac{1}{e},1\right)\cup\left(e^2,+\infty\right)$.

20. Θέμα 15093 **Αρχέτυπο**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = log(10^x - 1)$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το διάστημα $(0, +\infty)$.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) + x = log(10^{2x} - 10^x)$, $x > 0$.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μοναδικού κοινού σημείου της γραφικής παράστασης της f και της ευθείας $y = -x$.

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Καθώς υπάρχουν λογάριθμοι μόνο θετικών αριθμών, απαιτούμε $10^x - 1 > 0$, άρα $10^x > 1 \Leftrightarrow 10^x > 10^0 \Leftrightarrow x > 0$, αφού η συνάρτηση $g(x) = 10^x$ είναι γνησίως αύξουσα στο R.

β) Πρέπει $f(x) > 0 \Leftrightarrow log(10^x - 1) > 0 \Leftrightarrow log(10^x - 1) > log1$ και καθώς η συνάρτηση $h(x) = logx$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ παίρνουμε $10^x - 1 > 1 \Leftrightarrow 10^x > 2$ σχέση που γράφεται $10^x > 10^{log2}$. Ώστε $x > log2$, δηλαδή $x \in (log2, +\infty)$.

γ) Έχουμε $f(x) + x = log(10^x - 1) + log10^x = log[10^x(10^x - 1)] =$ $log(10^x \cdot 10^x - 10^x) = log(10^{2x} - 10^x)$.

δ) Πρέπει να λύσουμε την εξίσωση $f(x) = -x \Leftrightarrow f(x) + x = 0 \Leftrightarrow log(10^{2x} - 10^x) = 0$ άρα $10^{2x} - 10^x = 1 \Leftrightarrow (10^x)^2 - 10^x - 1 = 0$. Θέτοντας $10^x = y > 0$, παίρνουμε την δευτεροβάθμια εξίσωση $y^2 - y - 1 = 0$ με διακρίνουσα $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 5$, οπότε $y = \frac{-(-1) \pm \sqrt{5}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Έτσι $y = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, αφού $y > 0$.

Τελικά $10^x = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \Leftrightarrow x = log\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$.

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $\left(log\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right), -log\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\right)$.

21. Θέμα 15591 **Αρχέτυπο**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{\alpha}{\alpha+5}\right)^x$.

α) Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση f είναι εκθετική και ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

(Μονάδες 8)

γ) Για τη μεγαλύτερη τιμή του $a \in \mathbb{Z}$ για την οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα εκθετική με βάση ακέραιο αριθμό, να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x) + f(x+1) = 14$$

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Για να ορίζεται η εκθετική συνάρτηση πρέπει η βάση

$\frac{a}{a+5}>0 \Leftrightarrow a(a+5)>0 \Leftrightarrow a \in (-\infty,-5) \cup (0,+\infty)$.

Επιπλέον πρέπει $\frac{a}{a+5} \neq 1$. Όμως, αν $\frac{a}{a+5}=1 \Leftrightarrow a=a+5 \Leftrightarrow 0=5$, το οποίο δε συμβαίνει για κανέναν πραγματικό αριθμό α.

β) Για να είναι η συνάρτηση γνησίως αύξουσα πρέπει

$\frac{\alpha}{a+5}>1 \Leftrightarrow \frac{a}{a+5}-1>0 \Leftrightarrow \frac{a-a-5}{a+5}>0 \Leftrightarrow -\frac{5}{a+5}>0 \Leftrightarrow a+5<0 \Leftrightarrow a<-5$.

γ) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα όταν $a<-5$.

Η μεγαλύτερη ακέραια τιμή του $\alpha=-6$, για την οποία η συνάρτηση f είναι εκθετική και γνησίως αύξουσα και γίνεται $f(x)=\left(\frac{-6}{-6+5}\right)^x=6^x$.

Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$f(x)+f(x+1)=14 \Leftrightarrow 6^x+6^{x+1}=14 \Leftrightarrow 6^x+6\cdot 6^x=14 \Leftrightarrow 7\cdot 6^x=14 \Leftrightarrow 6^x=2 \Leftrightarrow x=\log_6 2$.

22. Θέμα 15678 **Αρχέτυπο**

Δίνεται το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x)=-x^3-4x^2-x+6$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $\mathrm{P}(x)<0$.

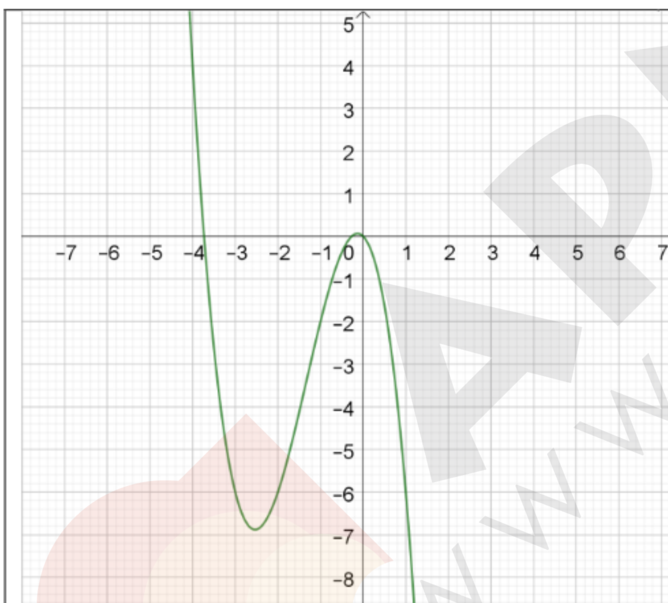
(Μονάδες 10)

β) Από τα παρακάτω σχήματα, ένα μόνο μπορεί να αντιστοιχεί στην γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $\mathrm{P}(x)$. Να βρείτε ποιο αιτιολογώντας την απάντησή σας.

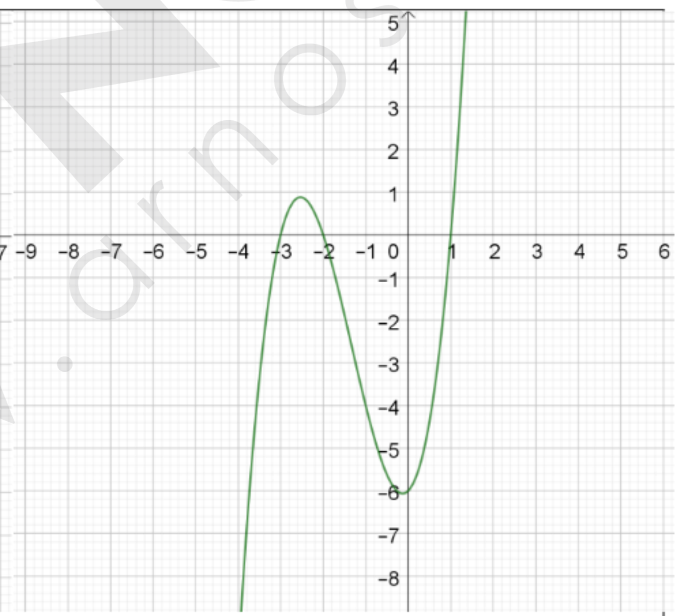
(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\mathrm{P}(x)=\ln x$ έχει μοναδική λύση την $x=1$.

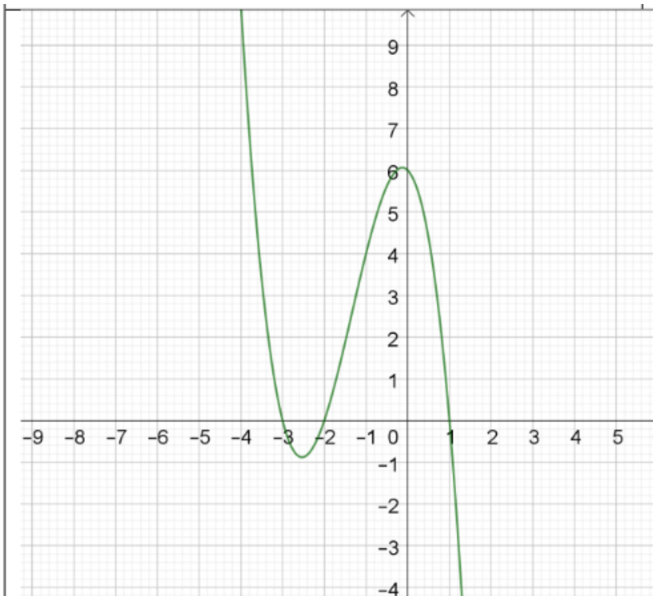
(Μονάδες 8)



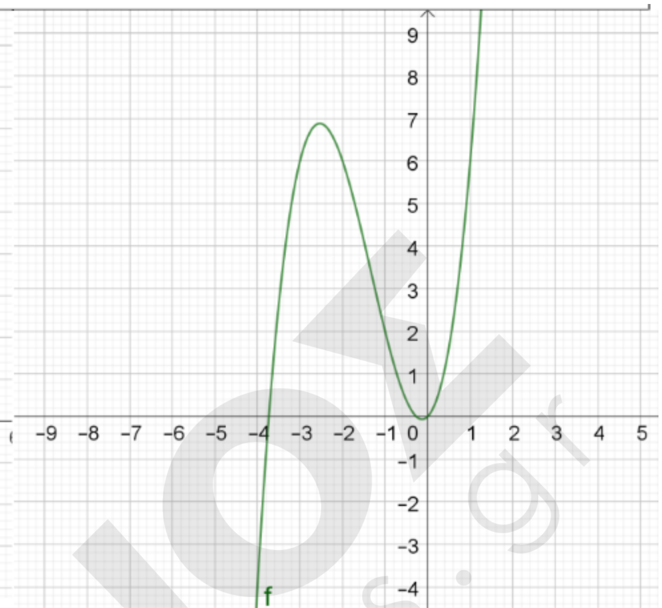
Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3



Σχήμα 4

ΛΥΣΗ

α) Το $P(x) = -x^3 - 4x^2 - x + 6$ έχει άθροισμα συντελεστών ίσο με το 0, οπότε έχει ρίζα το 1.

Το σχήμα Horner για τη διαίρεση $P(x):(x-1)$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα

-1	-4	-1	6	1
	-1	-5	-6	
-1	-5	-6	0	

Συνεπώς η ανίσωση $P(x) < 0$ γίνεται ισοδύναμα $(x-1)(-x^2 - 5x - 6) < 0$.

Ο πίνακας προσήμου του $(x-1)(-x^2-5x-6)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα προσήμων

x	$-\infty$	-3		-2		1	$+\infty$
x-1	-		-		-	0	+
$-x^2-5x-6$	-	0	+	0	-		-
$(x-1)(-x^2-5x-6)$	+	0	-	0	+	0	-

Συνεπώς η ανίσωση $\mathrm{P}(x)<0$ αληθεύει για κάθε $x\in(-3,-2)\cup(1,+\infty)$.

β) Με βάση το α) ερώτημα, η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $\mathrm{P}(x)$ θα πρέπει να είναι κάτω από τον άξονα xx', για κάθε $x\in(-3,-2)\cup(1,+\infty)$. Το μόνο από τα δοσμένα σχήματα που ικανοποιεί αυτήν την απαίτηση είναι το γ.

Εναλλακτικά, αφού $\mathrm{P}(0)=6$ θα πρέπει η γραφική παράσταση να διέρχεται από το σημείο (0,6) και το μόνο σχήμα που ικανοποιεί αυτήν την απαίτηση είναι το γ.

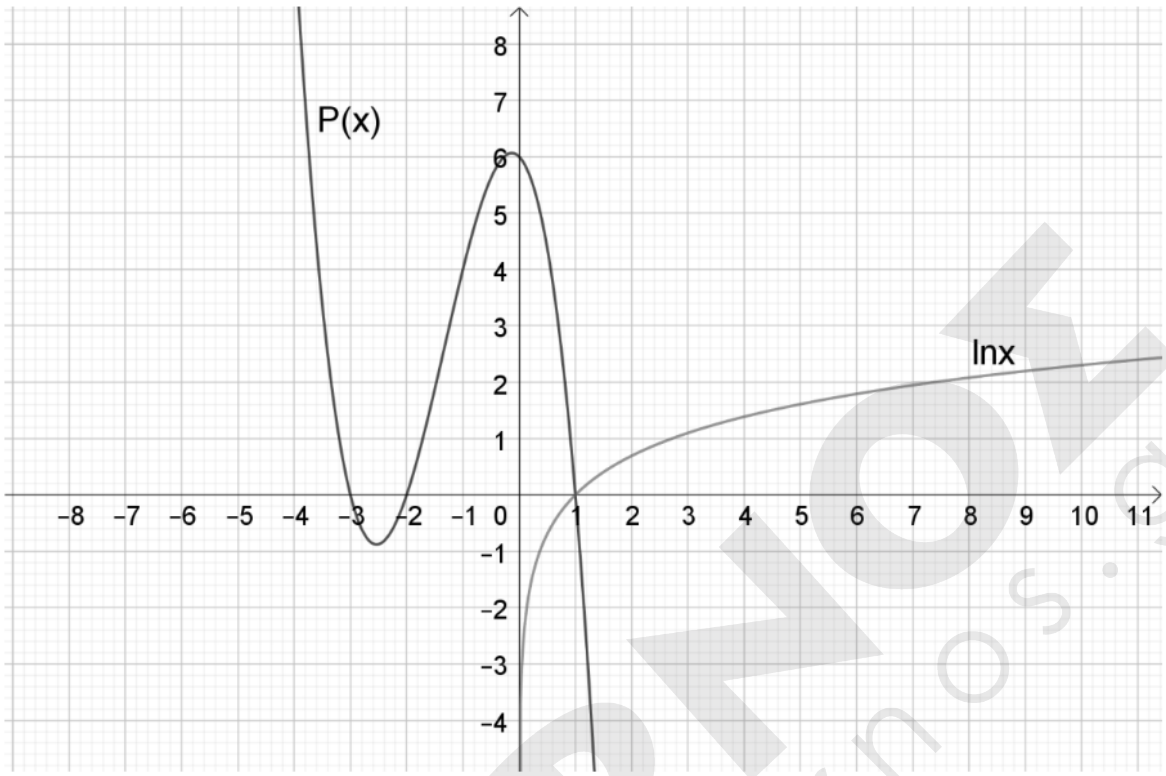
γ) Αν στο σχήμα γ συμπληρώσουμε τη γραφική παράσταση της $\ln x$ όπως φαίνεται παρακάτω, θα διαπιστώσομε ότι έχουν ένα μόνο κοινό σημείο με τετμημένη 1, που σημαίνει ότι η εξίσωση $\mathrm{P}(x)=\ln x$ έχει μοναδική λύση την $x=1$.

Εναλλακτικά, η εξίσωση $\mathrm{P}(x)=\ln x$ ορίζεται για $x>0$.

Για $x>1$ έχουμε ότι $\mathrm{P}(x)<0<\ln x$ που σημαίνει ότι η εξίσωση $\mathrm{P}(x)=\ln x$ δεν έχει ρίζα στο $(1,+\infty)$.

Επίσης για $0<x<1$ έχουμε ότι $\ln x<0<\mathrm{P}(x)$ που σημαίνει ότι η εξίσωση $\mathrm{P}(x)=\ln x$ δεν έχει ρίζα στο $(0,1)$.

Τέλος $\mathrm{P}(1)=\ln 1=0$ που σημαίνει ότι η εξίσωση $\mathrm{P}(x)=\ln x$ έχει μοναδική λύση την $x=1$.



23. Θέμα 15679 **Αρχέτυπο**

Δίνεται η παράσταση $A = \ln\left(\dfrac{e^{2x}-1}{e^{x}-3}\right)$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{\omega^2-1}{\omega-3} > 0$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A.

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $A = -\ln 3$.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Η ανίσωση $\frac{\omega^2-1}{\omega-3}>0$ με $\omega\neq3$ είναι ισοδύναμη με την $(\omega^2-1)(\omega-3)>0$.

Το πρόσημο του $(\omega^2-1)(\omega-3)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

ω	$-\infty$	-1		1		3	$+\infty$
ω-3	-		-		-	0	+
ω^2-1	+	0	-	0	+		+
$(\omega-3)(\omega^2-1)$	-	0	+	0	-	0	+

Συνεπώς η ανίσωση $\frac{\omega^2-1}{\omega-3}>0$ αληθεύει για κάθε $\omega\in(-1,1)\cup(3,+\infty)$.

β) Η παράσταση A ορίζεται για κάθε πραγματική τιμή του x για την οποία ισχύει $\frac{e^{2x}-1}{e^x-3}>0$. Αν θέσουμε $e^x=\omega$ η ανίσωση $\frac{e^{2x}-1}{e^x-3}>0$ γίνεται $\frac{\omega^2-1}{\omega-3}>0$ που όπως δείξαμε στο α) αληθεύει για $\omega\in(-1,1)\cup(3,+\infty)$.

Συνεπώς θα πρέπει $-1<\omega<1\Leftrightarrow-1<e^x<1\Leftrightarrow x<0$ ή $\omega>3\Leftrightarrow e^x>3\Leftrightarrow x>\ln3$

Τελικά η παράσταση A ορίζεται για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(\ln3,+\infty)$.

γ) Η εξίσωση $A=-\ln 3$ ορίζεται για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(\ln 3,+\infty)$ και γίνεται ισοδύναμα

$$\ln\left(\frac{e^{2x}-1}{e^x-3}\right)=\ln 3^{-1}\Leftrightarrow$$
$$\frac{e^{2x}-1}{e^x-3}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow$$
$$3e^{2x}-3=e^x-3\Leftrightarrow$$
$$3e^{2x}-e^x=0\Leftrightarrow$$
$$e^x\left(3e^x-1\right)=0\overset{e^x\neq 0}{\Leftrightarrow}$$
$$3e^x-1=0\Leftrightarrow$$
$$e^x=\frac{1}{3}\Leftrightarrow$$
$$x=\ln\frac{1}{3}$$

και επειδή $\frac{1}{3}<1\Leftrightarrow\ln\frac{1}{3}<0$ η λύση $x=\ln\frac{1}{3}$ είναι δεκτή.

24. Θέμα 15690 Αρχέτυπο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{2}\ln x^2,\ x\neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει $f(x)=\ln x$.

(Μονάδες 6)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $f(x)=\frac{1}{2}\ln x^2,\ x\neq 0$.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική της παράσταση είναι κάτω από την ευθεία $y=2$.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $A=\mathbb{R}-\{0\}$.

Για κάθε $x \in A$, είναι φανερό ότι $-x \in A$ και

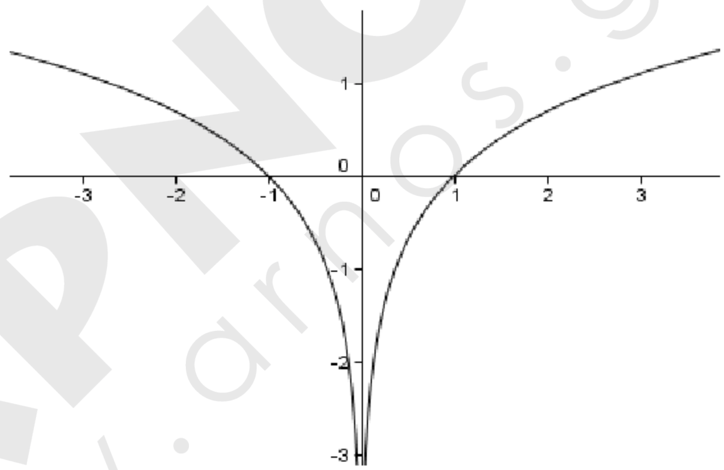
$$f(-x)=\frac{1}{2}\ln(-x)^2=\frac{1}{2}\ln x^2=f(x)$$

Επομένως η f είναι άρτια, οπότε η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.

β) Για κάθε $x>0$ έχουμε:

$$f(x)=\frac{1}{2}\ln x^2=\frac{1}{2}\ln|x|^2=2\cdot\frac{1}{2}\ln|x|=\ln|x|=\ln x$$

γ) Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο διπλανό σχήμα και, σύμφωνα με τα προηγούμενα ερωτήματα, προκύπτει αν σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\ln x, x>0$ και στη συνέχεια θεωρήσουμε το συμμετρικό του σχήματος ως προς τον άξονα $y'y$.



δ) Η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από την ευθεία $y=2$, μόνο όταν $f(x)<2$. Με $x\neq 0$ έχουμε:

$$f(x)<2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln x^2<2 \Leftrightarrow \ln x^2<4 \Leftrightarrow x^2<e^4 \Leftrightarrow |x|<e^2 \Leftrightarrow -e^2<x<e^2$$

Άρα, η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από την ευθεία $y=2$ για κάθε x με $x\in(-e^2,0)\cup(0,e^2)$
.

25. Θέμα 15694 Αρχέτυπο

Στην Αστρονομία, οι αστέρες ταξινομούνται ανάλογα με την λαμπρότητα τους με βάση την σχέση $m - M = 5 \cdot log\left(\frac{d}{10}\right)$, (I) όπου d η απόσταση του αστέρα από τον παρατηρητή, m είναι το φαινόμενο μέγεθός τους (το πόσο λαμπροί φαίνονται) και M το απόλυτο μέγεθός τους. Το απόλυτο μέγεθος ορίζεται να είναι το φαινόμενο μέγεθος σε απόσταση 10 parsec από τον παρατηρητή, όπου 1 parsec είναι η μονάδα μέτρησης της απόστασης d και ισούται με 3,26 έτη φωτός $= 30{,}9 \cdot 10^{12}\, Km$.

α) Για ποιες τιμές της απόστασης d το φαινόμενο μέγεθος ενός αστέρα είναι μικρότερο από το απόλυτο μέγεθός του;

(Μονάδες 7)

β) Ένας αστέρας έχει φαινόμενο μέγεθος $m = 1{,}157$ και βρίσκεται σε απόσταση $d = 100$ parsec από έναν παρατηρητή. Ποιο είναι το απόλυτο μέγεθος αυτού του αστέρα;

(Μονάδες 6)

γ) Να επιλύσετε την σχέση (I) ως προς d.

(Μονάδες 7)

δ) Ο αστέρας Betelgeuse έχει φαινόμενο μέγεθος 0,46 και απόλυτο μέγεθος $-5{,}14$. Ποια είναι η απόστασή του από τον παρατηρητή; Δίνεται ότι $\sqrt[25]{10^{53}} \cong 131$.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Θέλουμε να είναι $m - M < 0 \Leftrightarrow 5 \cdot log\left(\frac{d}{10}\right) < 0 \Leftrightarrow log\left(\frac{d}{10}\right) < 0 \Leftrightarrow log\left(\frac{d}{10}\right) < log1$ επομένως $\frac{d}{10} < 1 \Leftrightarrow d < 10$, αφού η συνάρτηση $f(x) = logx$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

β) Έχουμε $M = m - 5 \cdot log\left(\frac{d}{10}\right) = 1{,}157 - 5 \cdot log\left(\frac{100}{10}\right) =$
$= 1{,}157 - 5 \cdot log10 = 1{,}157 - 5 = -3{,}843$.

γ) Είναι $log\left(\frac{d}{10}\right) = \frac{m-M}{5} \Leftrightarrow \frac{d}{10} = 10^{\frac{m-M}{5}}$, άρα $d = 10 \cdot 10^{\frac{m-M}{5}} = 10^{1+\frac{m-M}{5}} = 10^{\frac{5+m-M}{5}}$.

δ) Με χρήση της παραπάνω σχέσης, έχουμε

$$d = 10^{\frac{5+0,46+5,14}{5}} = 10^{\frac{10,6}{5}} = 10^{\frac{53}{25}} = \sqrt[25]{10^{53}} \cong 131 \text{ parsec.}$$

26. Θέμα 16001 **Αρχέτυπο**

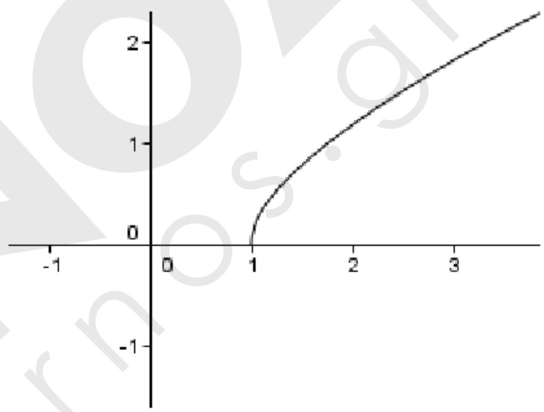
Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x\ln x}$ και $g(x) = \sqrt{\ln x}$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού τους.

(Μονάδες 4)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση της f είναι από τη γραφική παράσταση της g και πάνω.

(Μονάδες 5)



Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της f.

γ) i. Να βρείτε τη μονοτονία της.

(Μονάδες 4)

ii. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\frac{5}{3}\right)$ και $f\left(\frac{7}{5}\right)$.

(Μονάδες 5)

δ) Να σχεδιάσετε την ευθεία $y = 1 - x$ και να βρείτε γραφικά τη λύση της εξίσωσης $f(x) = 1 - x$.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f ορίζεται μόνο όταν $x>0$ και $x\ln x \geq 0$, δηλαδή μόνο όταν $x \geq 1$, οπότε $A_f=[1,+\infty)$. Ομοίως η g ορίζεται μόνο όταν $x>0$ και $\ln x \geq 0$, δηλαδή μόνο όταν $x \geq 1$, οπότε $A_g=[1,+\infty)$.

β) Με $x \geq 1$ έχουμε:

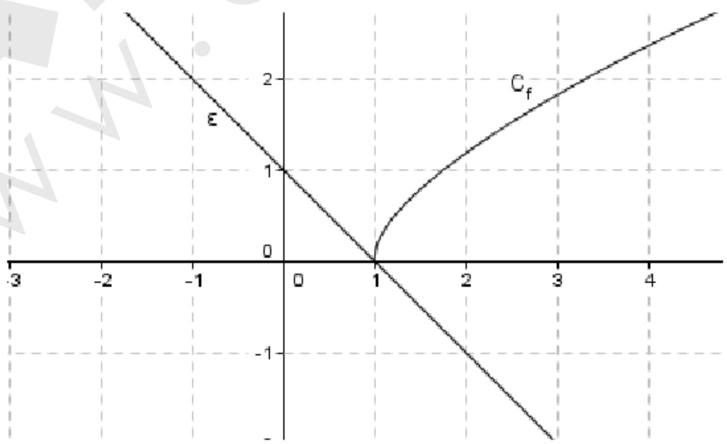
$$f(x)-g(x)=\sqrt{x\ln x}-\sqrt{\ln x}=\left(\sqrt{x}-1\right)\sqrt{\ln x} \geq 0$$

αφού καθένας από τους όρους του γινομένου είναι μη αρνητικός. Επομένως, η γραφική παράσταση της f είναι από τη γραφική παράσταση της g και πάνω.

γ) i. Από τη γραφική παράσταση της f προκύπτει ότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της $A_f=[1,+\infty)$.

ii. Επειδή $\frac{5}{3}-\frac{7}{5}=\frac{25-21}{15}=\frac{4}{15}>0$, ισχύει $\frac{5}{3}>\frac{7}{5}$ και αφού η f είναι γνησίως αύξουσα συμπεραίνουμε ότι $f\left(\frac{5}{3}\right)>f\left(\frac{7}{5}\right)$.

δ) Η ευθεία $\varepsilon: y=1-x$ τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία $(1,0)$ και $(0,1)$ αντίστοιχα όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, απ' όπου προκύπτει ότι το μοναδικό κοινό σημείο της με την C_f είναι το $(1,0)$. Αυτό σημαίνει ότι η εξίσωση $f(x)=1-x$ έχει μοναδική ρίζα την $x=1$.



Επισήμανση.

Στο πλαίσιο μιας αλγεβρικής λύσης θα μπορούσαμε να αναζητήσουμε ρίζες στο διάστημα $[1,+\infty)$, να διαπιστώσουμε ότι ο αριθμός 1 είναι η μία ρίζα της και να αποδείξουμε ότι αν $x>1$ έχουμε $f(x)>f(1)$, δηλαδή $f(x)>0$ και $1-x<0$, οπότε η εξίσωση δεν έχει ρίζα μεγαλύτερη από τη μονάδα.

27. Θέμα 18865

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln|x|$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

(Μονάδες 03)

β) Να προσδιορίσετε το είδος της συμμετρίας της γραφικής παράστασης της f.

(Μονάδες 06)

γ) Να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

(Μονάδες 06)

δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $E(x)=\frac{1}{2}(x-1)\ln x$, με $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ μπορεί να περιγράψει το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου $A(1,0)$, $B(x,0)$ και $\Gamma(x,lnx)$.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Αφού το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών, για τους οποίους το $f(x)$ έχει νόημα, είναι:

$$|x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$$

Επομένως $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

β) Είναι: $f(-x) = \ln|-x| = \ln|x| = f(x)$.

Έτσι για κάθε $x \in D_f$ το $-x \in D_f$ και ισχύει $f(-x) = f(x)$.

Επομένως η συνάρτηση είναι άρτια και ως εκ τούτου συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.

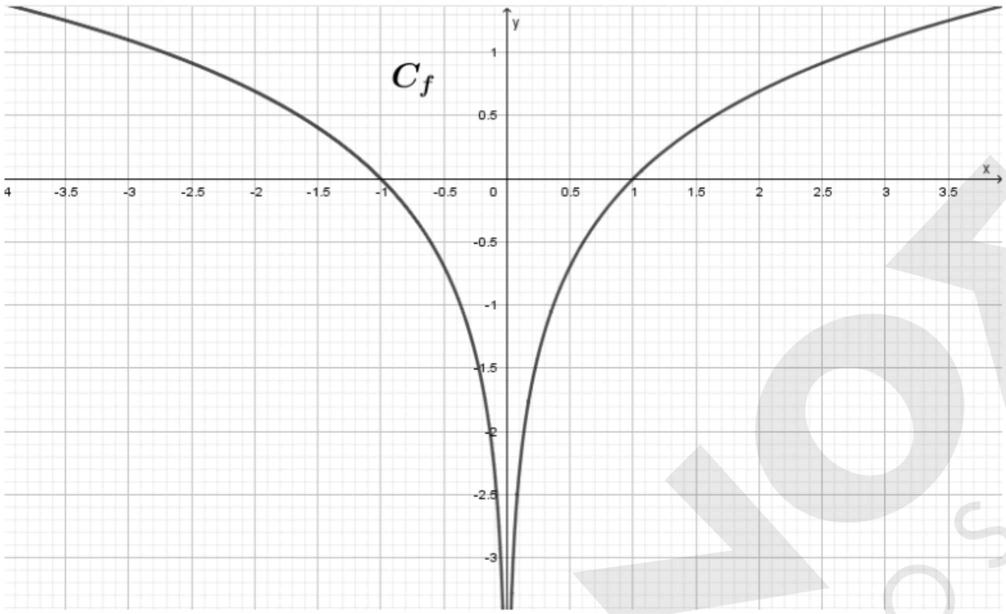
γ) Είναι: $f(x) = ln|x| = \begin{cases} lnx, & \text{αν } x > 0 \\ \ln(-x), & \text{αν } x < 0 \end{cases}$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f αποτελείται από δύο κλάδους.

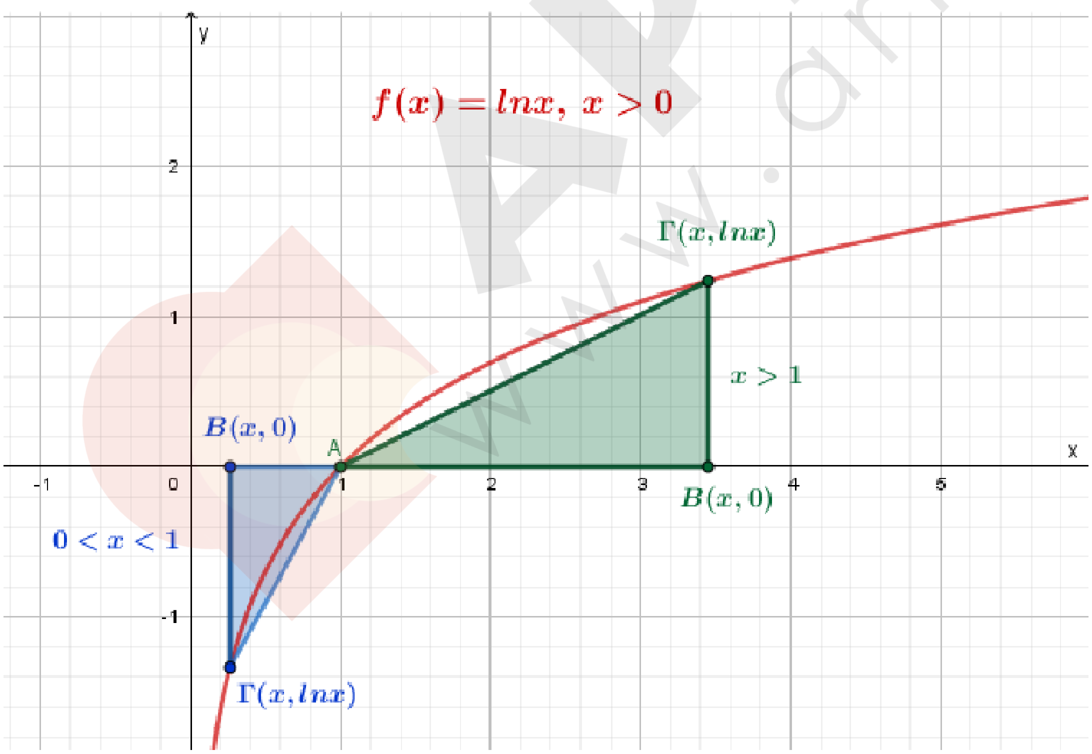
Αν $x > 0$, τότε έχουμε τη γραφική παράσταση της λογαριθμικής συνάρτησης $f(x) = lnx$.

Αν $x < 0$, παίρνουμε την συμμετρική καμπύλη της λογαριθμικής συνάρτησης $f(x) = lnx$ ως προς τον άξονα $y'y$.

Επομένως, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι η ακόλουθη:



δ) Υπάρχουν δύο περιπτώσεις, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



- Αν $x > 1$:

$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}(AB)(B\Gamma)$, όπου $(AB) = |x-1| = x-1$ και $(B\Gamma) = |lnx| = lnx$.

Άρα $(AB\Gamma) = \frac{(x-1)lnx}{2}$.

- Αν $0 < x < 1$:

$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}(AB)(B\Gamma)$, όπου $(AB) = |x-1| = 1-x$ και $(B\Gamma) = |lnx| = -lnx$.

Άρα $(AB\Gamma) = \frac{(x-1)lnx}{2}$.

Επομένως η ζητούμενη συνάρτηση είναι:

$$E(x) = \frac{(x-1)lnx}{2}, \quad x \in (0,1) \cup (1,+\infty).$$

28. Θέμα 21445 **Αρχέτυπο**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log\frac{4^x - 1}{2^x + 5}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

(Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \log 3 - \log 7$.

(Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > \log 3 - \log 7$.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει

$$\frac{4^x-1}{2^x+5}>0 \overset{2^x+5>0}{\Leftrightarrow}$$
$$4^x-1>0 \Leftrightarrow$$
$$4^x>1 \Leftrightarrow$$
$$4^x>4^0 \Leftrightarrow$$
$$x>0.$$

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A=(0,+\infty)$.

β) Γνωρίζουμε ότι για $\alpha>0, \alpha\neq 1$ και $x_1, x_2>0$ ισχύει η ισοδυναμία: $\log_\alpha x_1=\log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1=x_2$. Οπότε έχουμε:

$$f(x)=\log 3-\log 7 \Leftrightarrow$$
$$\log\frac{4^x-1}{2^x+5}=\log\frac{3}{7} \Leftrightarrow$$
$$\frac{4^x-1}{2^x+5}=\frac{3}{7} \Leftrightarrow$$
$$7\cdot 4^x-7=3\cdot 2^x+15 \Leftrightarrow$$
$$7\cdot\left(2^x\right)^2-3\cdot 2^x-22=0 \overset{2^x=y}{\Leftrightarrow}$$
$$7\cdot y^2-3\cdot y-22=0.$$

Η τελευταία είναι εξίσωση 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta=(-3)^2-4\cdot 7\cdot(-22)=625>0$ και ρίζες $y_1=\frac{3+25}{14}=\frac{28}{14}=2$, $y_2=\frac{3-25}{14}=\frac{-22}{14}=-\frac{11}{7}$.

Οπότε $2^x=2 \Leftrightarrow x=1$, που είναι δεκτή διότι $x>0$ (η εξίσωση $2^x=-\frac{11}{7}$ είναι αδύνατη).

γ) Έχουμε

$f(x) > \log 3 - \log 7 \Leftrightarrow$

$\log \dfrac{4^x - 1}{2^x + 5} > \log \dfrac{3}{7} \Leftrightarrow$

$\dfrac{4^x - 1}{2^x + 5} > \dfrac{3}{7} \overset{2^x+5>0}{\Leftrightarrow}$

$7 \cdot 4^x - 7 > 3 \cdot 2^x + 15 \Leftrightarrow$

$7 \cdot \left(2^x\right)^2 - 3 \cdot 2^x - 22 > 0 \overset{2^x = y}{\Leftrightarrow}$

$7 \cdot y^2 - 3 \cdot y - 22 > 0 \qquad (1)$

Από το β) ερώτημα γνωρίζουμε ότι το τριώνυμο $7 \cdot y^2 - 3 \cdot y - 22$ έχει ρίζες $y = 2$ και $y = -\dfrac{11}{7}$. Οπότε η ανίσωση (1) αληθεύει για $y < -\dfrac{11}{7}$ ή $y > 2$, δηλαδή $2^x < -\dfrac{11}{7}$ (αδύνατη διότι $2^x > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x) ή $2^x > 2 \Leftrightarrow x > 1$.

Τελικά η ανίσωση αληθεύει για $x > 1$.

29. Θέμα 21446

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(e^x - 2\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

(Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + x = 3\ln 2$.

(Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) + x \geq 3\ln 2$.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση ορίζεται για τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $e^x - 2 > 0$

Δηλαδή: $e^x > 2 \overset{\ln x \nearrow}{\Leftrightarrow} \ln e^x > \ln 2 \Leftrightarrow x > \ln 2$.

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι $\mathrm{A} = (\ln 2, +\infty)$.

β) Έχουμε

$$\begin{aligned}
&f(x) + x = 3\ln 2 \Leftrightarrow \\
&\ln\left(e^x - 2\right) + x = \ln 2^3 \Leftrightarrow \\
&\ln\left(e^x - 2\right) + \ln e^x = \ln 8 \Leftrightarrow \\
&\ln\left[\left(e^x - 2\right) \cdot e^x\right] = \ln 8 \Leftrightarrow \\
&\left(e^x\right)^2 - 2e^x = 8 \overset{e^x = y}{\Leftrightarrow} \\
&y^2 - 2y - 8 = 0.
\end{aligned}$$

Η τελευταία είναι εξίσωση 2^{ου} βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 36 > 0$ και ρίζες $y = 4$, $y = -2$. Άρα $e^x = 4 \Leftrightarrow x = \ln 4$ (η εξίσωση $e^x = -2$ είναι αδύνατη, διότι $e^x > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x). Η λύση $x = \ln 4$ είναι δεκτή, διότι $\ln 4 > \ln 2$.

Τελικά η εξίσωση $f(x) + x = 3\ln 2$ έχει λύση $x = \ln 4$.

γ) Έχουμε

$$\begin{aligned}
&f(x) + x \geq 3\ln 2 \Leftrightarrow \\
&\ln\left(e^x - 2\right) + x \geq \ln 2^3 \Leftrightarrow \\
&\ln\left(e^x - 2\right) + \ln e^x \geq \ln 8 \Leftrightarrow \\
&\ln\left[\left(e^x - 2\right) \cdot e^x\right] \geq \ln 8 \Leftrightarrow \\
&\left(e^x\right)^2 - 2e^x \geq 8 \overset{e^x = y}{\Leftrightarrow} \\
&y^2 - 2y - 8 \geq 0 \qquad (1).
\end{aligned}$$

Από το β) ερώτημα γνωρίζουμε ότι το τριώνυμο y^2-2y-8 έχει ρίζες $y=4$ και $y=-2$. Άρα η ανίσωση (1) αληθεύει για $y\leq -2$ ή $y\geq 4$, δηλαδή $e^x\leq -2$ (που είναι αδύνατη) ή $e^x\geq 4\Leftrightarrow \ln e^x\geq \ln 4\Leftrightarrow x\geq \ln 4$. Πρέπει και $x>\ln 2$, οπότε τελικά η ανίσωση $f(x)+x\geq 3\ln 2$ αληθεύει για $x\geq \ln 4$.

30. Θέμα 21447

Σε ένα πείραμα εργαστηρίου, ο αριθμός των βακτηρίων δίνεται από τον τύπο

$$P(t)=200\cdot e^{ct},$$

Όπου t ο χρόνος σε ώρες από την αρχή του πειράματος ($t=0$). Σε μία ώρα ο αριθμός των βακτηρίων ήταν 328.

(Δίνεται ότι ln(1,64) $\cong$ 0,5 και ln10 $\cong$ 2,3)

α) Να βρείτε τον αριθμό των βακτηρίων όταν ξεκίνησε το πείραμα.

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $c=\dfrac{1}{2}$.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε το χρονικό διάστημα κατά το οποίο ο αριθμός των βακτηρίων είναι μεγαλύτερος από το δεκαπλάσιο και μικρότερος από το εκατονταπλάσιο της αρχικής του τιμής.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Ο αριθμός των βακτηρίων όταν ξεκίνησε το πείραμα ήταν $P(0)=200\cdot e^{c\cdot 0}=200$ βακτήρια.

β) Έχουμε:

$$P(1)=328 \Leftrightarrow 200\cdot e^{c\cdot 1}=328 \Leftrightarrow e^{c}=\frac{328}{200} \Leftrightarrow e^{c}=1,64 \Leftrightarrow c=\ln(1,64) \Leftrightarrow c=0,5.$$

Άρα $c=\frac{1}{2}$.

γ) Ο αριθμός των βακτηρίων είναι μεγαλύτερος από το δεκαπλάσιο και μικρότερος από το εκατονταπλάσιο της αρχικής του τιμής, δηλαδή

$$10\cdot P(0)<P(t)<100\cdot P(0) \Leftrightarrow$$
$$10\cdot 200<200\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot t}<100\cdot 200 \Leftrightarrow$$
$$10<e^{\frac{1}{2}\cdot t}<100 \overset{\ln x \nearrow}{\Leftrightarrow}$$
$$\ln 10<\ln(e^{\frac{1}{2}\cdot t})<\ln 100 \Leftrightarrow$$
$$\ln 10<\frac{1}{2}\cdot t<\ln 10^{2} \Leftrightarrow$$
$$2\cdot \ln 10<t<4\cdot \ln 10 \Leftrightarrow$$
$$2\cdot 2,3<t<4\cdot 2,3 \Leftrightarrow$$
$$4,6<t<9,2.$$

Άρα το ζητούμενο χρονικό διάστημα (σε ώρες) είναι $4,6<t<9,2$.

31. Θέμα 21470 Αρχέτυπο

Μια ποσότητα Q ραδιενεργού υλικού (σε κιλά) θάβεται και με την πάροδο του χρόνου t (σε έτη), μειώνεται ακολουθώντας το νόμο της εκθετικής μεταβολής $Q(t)=Q_0\cdot e^{ct}$. Γνωρίζουμε ότι μετά από δύο χρόνια έχει απομείνει το $\frac{1}{3}$ της αρχικής ποσότητας και μετά από τέσσερα χρόνια έχει απομείνει 1 κιλό.

α) Να δείξετε ότι $Q(t)=Q_0\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t$.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την αρχική ποσότητα που θάφτηκε (για $t=0$).

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε μετά από πόσα χρόνια η ποσότητα που θα έχει απομείνει θα είναι $\frac{1}{81}$ κιλά.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Γνωρίζουμε ότι μετά από δύο χρόνια έχει απομείνει το $\frac{1}{3}$ της αρχικής ποσότητας, δηλαδή:

$Q(2)=\frac{1}{3}\cdot Q_0 \Leftrightarrow Q_0\cdot e^{2c}=\frac{Q_0}{3} \Leftrightarrow \left(e^c\right)^2=\frac{1}{3} \overset{e^c>0}{\Leftrightarrow} e^c=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Οπότε

$$Q(t)=Q_0\cdot e^{ct} \Leftrightarrow$$
$$Q(t)=Q_0\cdot\left(e^c\right)^t \Leftrightarrow$$
$$Q(t)=Q_0\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t.$$

β) Γνωρίζουμε ότι μετά από τέσσερα χρόνια έχει απομείνει 1 κιλό ραδιενεργού υλικού και από το α) ερώτημα γνωρίζουμε επίσης ότι $Q(t)=Q_0\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t$. Ζητούμενη είναι η αρχική ποσότητα που θάφτηκε, δηλαδή το Q_0.

Επομένως: $Q(4)=1\Leftrightarrow Q_0\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4=1\Leftrightarrow Q_0\cdot\left(\frac{1}{9}\right)=1\Leftrightarrow Q_0=9$ κιλά.

γ) Στα ερωτήματα α) και β) δείξαμε ότι $Q(t)=9\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t$. Έχουμε

$$Q(t)=\frac{1}{81}\Leftrightarrow$$
$$9\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t=\frac{1}{81}\Leftrightarrow$$
$$3^2\cdot\left(3^{-\frac{1}{2}}\right)^t=3^{-4}\Leftrightarrow$$
$$3^{2-\frac{t}{2}}=3^{-4}\Leftrightarrow$$
$$2-\frac{t}{2}=-4\Leftrightarrow$$
$$\frac{t}{2}=6\Leftrightarrow t=12.$$

Συνεπώς μετά από 12 χρόνια η ποσότητα που θα έχει απομείνει θα είναι $\frac{1}{81}$ κιλά.

32. Θέμα 21474 Αρχέτυπο

Σε ένα ανοιχτό δοχείο υπάρχουν 10 λίτρα ενός υγρού. Το υγρό εξατμίζεται έτσι ώστε ο όγκος του να μειώνεται κατά 15% ανά εβδομάδα.

α) Να βρείτε την ποσότητα του υγρού που υπάρχει στο δοχείο στο τέλος της 1ης και στο τέλος της 2ης εβδομάδας.

(Μονάδες 8)

β) Ο όγκος V του υγρού μετά από t εβδομάδες δίνεται από τη συνάρτηση $V(t)=V_0\cdot\alpha^t$, όπου V_0 και α σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Να βρείτε τους αριθμούς V_0 και α.

(Μονάδες 8)

γ) Αν ο όγκος του υγρού μετά από t εβδομάδες δίνεται από τη σχέση $V(t)=10\cdot(0,85)^t$, να βρείτε πότε ο όγκος του υγρού που υπάρχει στο δοχείο είναι μικρότερος από το μισό της αρχικής του τιμής. (Δίνεται ότι: $\log(0,5)\simeq-0,3$ και $\log(0,85)\simeq-0,07$).

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Η ποσότητα του υγρού στο δοχείο στο τέλος της 1ης εβδομάδας είναι:

$10-\frac{15}{100}\cdot10=10\cdot(1-0,15)=10\cdot0,85=8,5$ λίτρα.

Η ποσότητα του υγρού στο δοχείο στο τέλος της 2ης εβδομάδας είναι:

$(10\cdot0,85)-\frac{15}{100}\cdot(10\cdot0,85)=(10\cdot0,85)\cdot(1-0,15)=10\cdot(0,85)^2=7,225$ λίτρα.

β) Η αρχική ποσότητα του υγρού στο δοχείο (δηλαδή η ποσότητα τη χρονική στιγμή $t=0$) είναι 10 λίτρα, οπότε $V(0)=V_0=10$.

Από το α) ερώτημα, ο όγκος V του υγρού μετά από 1 εβδομάδα είναι $V(1)=10\cdot0,85\Leftrightarrow V_0\cdot\alpha^1=10\cdot0,85\Leftrightarrow10\cdot\alpha=10\cdot0,85\Leftrightarrow\alpha=0,85$.

γ) Θα βρούμε μετά από πόσες εβδομάδες ο όγκος του υγρού που υπάρχει στο δοχείο είναι μικρότερος από το μισό της αρχικής του τιμής, δηλαδή θα βρούμε τις τιμές του t ώστε:

$$V(t) < \frac{V_0}{2} \Leftrightarrow$$

$$10 \cdot (0,85)^t < \frac{10}{2} \Leftrightarrow$$

$$(0,85)^t < 0,5 \Leftrightarrow$$

$$\log(0,85)^t < \log(0,5) \Leftrightarrow$$

$$t \cdot (-0,07) < -0,3 \Leftrightarrow$$

$$t > \frac{0,3}{0,07} \Leftrightarrow t > \frac{30}{7} \Leftrightarrow t > 4\frac{2}{7}.$$

Άρα μετά από $4\frac{2}{7}$ εβδομάδες (4 εβδομάδες και 2 ημέρες) ο όγκος του υγρού που υπάρχει στο δοχείο είναι μικρότερος από το μισό της αρχικής του τιμής.

33. Θέμα 21678

Ημιζωή ενός ραδιενεργού υλικού λέμε τον χρόνο που απαιτείται για να διασπασθεί η μισή από την αρχική του ποσότητα, οπότε να απομείνει το 50% από αυτή.

Αν Q_o είναι η αρχική ποσότητα ενός ραδιενεργού υλικού, τότε η ποσότητα $Q(t)$ που απομένει t χρόνια μετά, δίνεται από τον τύπο $Q(t) = Q_o e^{ct}$, όπου c είναι μια σταθερά που εξαρτάται από το υλικό.

α) Να αποδείξετε ότι ο χρόνος ημιζωής t' δίνεται από τον τύπο $t' = -\frac{\ln 2}{c}$.

(Μονάδες 8)

Το ραδιοϊσότοπο του άνθρακα, άνθρακας -14 έχει χρόνο ημιζωής 5730 χρόνια.

β) Να αποδείξετε ότι η ποσότητα του άνθρακα -14 που απομένει t χρόνια μετά, δίνεται από τον τύπο

$$Q(t)=Q_o e^{-\frac{\ln 2}{5730}t}$$

(Μονάδες 8)

γ) Κατά την εξέταση ενός οστού που ανακάλυψαν οι παλαιοντολόγοι διαπιστώθηκε ότι έχει απομείνει σ' αυτό το 25% της ποσότητας του άνθρακας -14 που περιείχε αρχικά. Να βρείτε την ηλικία του οστού.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$Q(t')=\frac{1}{2}Q_o \Leftrightarrow Q_o e^{ct'}=\frac{1}{2}Q_o \Leftrightarrow e^{ct'}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow ct'=\ln\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow ct'=-\ln 2 \Leftrightarrow t'=-\frac{\ln 2}{c}$$

που είναι το ζητούμενο.

β) Για το ραδιοϊσότοπο του άνθρακα, άνθρακας -14 ισχύει $t'=5730$, οπότε έχουμε

$$-\frac{\ln 2}{c}=5730 \Leftrightarrow 5730c=-\ln 2 \Leftrightarrow c=-\frac{\ln 2}{5730}$$

οπότε ο τύπος που μας δίνει την ποσότητα του άνθρακα -14 που απομένει t χρόνια μετά δίνεται από τον τύπο

$$Q(t)=Q_o e^{-\frac{\ln 2}{5730}t}$$

γ) Αν στον προηγούμενο τύπο θέσουμε $Q(t)=\frac{25}{100}Q_o=\frac{1}{4}Q_o$, έχουμε:

$$Q_oe^{-\frac{\ln2}{5730}t}=\frac{1}{4}Q_o \Leftrightarrow e^{-\frac{\ln2}{5730}t}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{\ln2}{5730}t=\ln\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\ln2}{5730}t=-\ln4 \Leftrightarrow \frac{\ln2}{5730}t=2\ln2 \Leftrightarrow t=11460$$

οπότε το οστό εκτιμάται ότι είναι ηλικίας 11.460 χρόνων.

34. Θέμα 21679

Ένα ζεστό ρόφημα τη στιγμή που σερβίρεται, σε θερμοκρασία του περιβάλλοντος που είναι $T_\alpha=25^oC$, έχει θερμοκρασία $T_o=73^oC$. Η θερμοκρασία του ροφήματος μετά από t λεπτά δίνεται, σύμφωνα με τον νόμο ψύξης του Νεύτωνα, από την συνάρτηση

$$T(t)=T_\alpha+ce^{-\kappa t}$$

όπου όπου c, κ κατάλληλες σταθερές και $t\in[0, 60]$. Αν είναι γνωστό ότι η θερμοκρασία του ροφήματος μετά από 10 λεπτά είναι 61^oC, τότε:

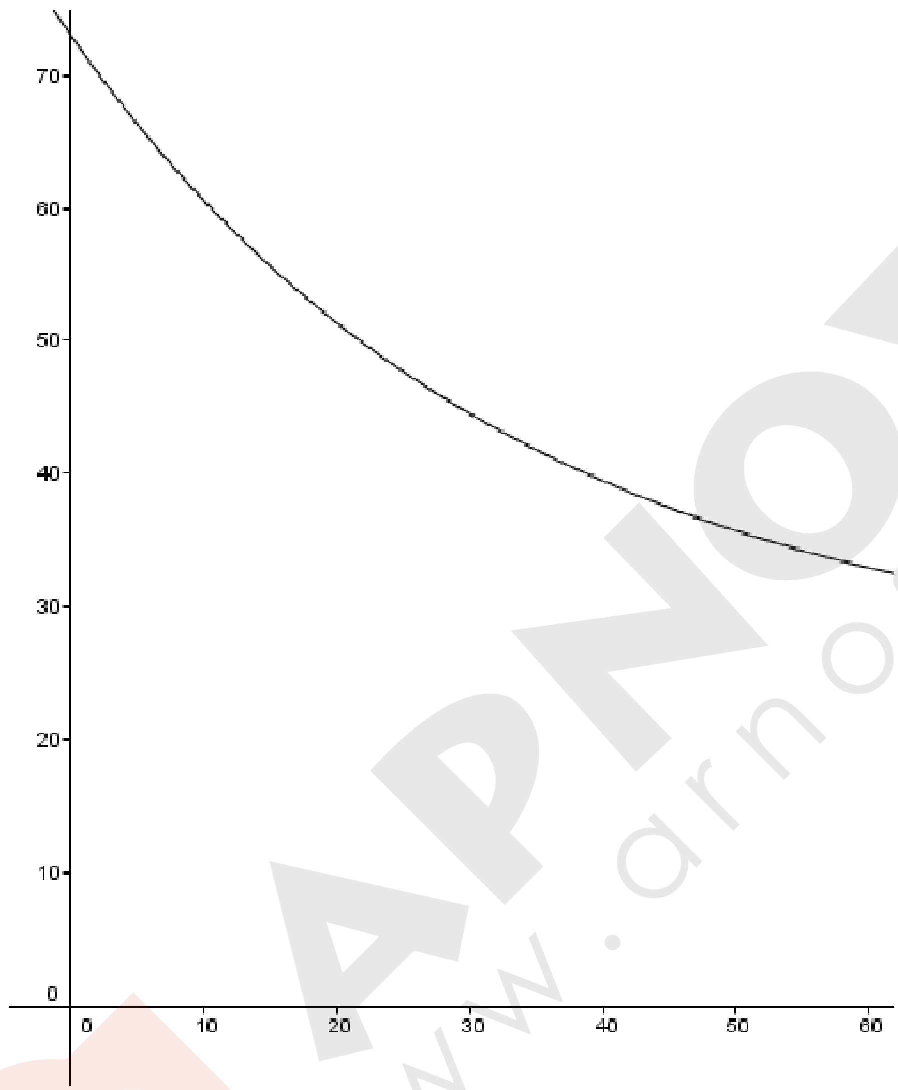
α) Να αποδείξετε ότι $c=48$.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την σταθερά κ. (Θεωρήστε $\ln0,75=-0,3$).

(Μονάδες 8)

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $T(t)$ φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



γ) Να βρείτε την θερμοκρασία του ροφήματος 40 λεπτά μετά το σερβίρισμα. (Θεωρήστε $e^{-1,2}=0,3$).

(Μονάδες 5)

δ) Αν θεωρήσουμε ότι ο καταναλωτής έχει την αίσθηση του ζεστού όταν η θερμοκρασία του ροφήματος είναι μεγαλύτερη από $40^{\circ}C$, να αιτιολογήσετε, με βάση τη γραφική παράσταση και το αποτέλεσμα του ερωτήματος γ), γιατί πριν περάσουν 40 λεπτά ο καταναλωτής του ροφήματος έχει την αίσθηση ότι το ρόφημα δεν είναι πλέον ζεστό.

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$T(0)=T_\alpha+ce^{-\kappa\cdot 0}\Leftrightarrow 73=25+ce^{0}\Leftrightarrow 73=25+c\Leftrightarrow c=48$$

β) Δεδομένου ότι $T(10)=61$, έχουμε:

$$61=25+48e^{-10\kappa}\Leftrightarrow 48e^{-10\kappa}=36\Leftrightarrow e^{-10\kappa}=\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow e^{-10\kappa}=0,75\Leftrightarrow -10\kappa=\ln(0,75)\Leftrightarrow -10\kappa=-0,3\Leftrightarrow \kappa=0,03$$

Επομένως η σταθερά κ είναι ίση με $0,03$.

γ)Η θερμοκρασία $T(40)$ του ροφήματος 40 λεπτά μετά το σερβίρισμά του είναι

$$T(40)=25+48e^{-0,03\cdot 40}=25+48e^{-1,2}=25+48\cdot 0,3$$
$$=25+14,4=39,4$$

Επομένως η θερμοκρασία του ροφήματος 40 λεπτά μετά το σερβίρισμά του είναι $39,4^{\circ}C$.

δ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $T(t)=25+48e^{-0,3t}$, όπως φαίνεται και στο δοσμένο σχήμα είναι γνησίως φθίνουσα και από το ερώτημα γ) ισχύει $T(40)=39,4$, οπότε αν $T(t_o)=40$, τότε $T(t_o)>T(40)$ και λόγω της μονοτονίας της συνάρτησης παίρνουμε $t_o<40$.
Επομένως, πριν περάσουν 40 λεπτά, η θερμοκρασία του ροφήματος έχει ήδη πέσει κάτω από τους 40^{o} και ο καταναλωτής του ροφήματος έχει την αίσθηση ότι το ρόφημα δεν είναι πλέον ζεστό.

35. Θέμα 21680 **Αρχέτυπο**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-1)\ln x,\ x>0$ και η ευθεία $\varepsilon: y=2x-2$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(2)+f(4)=\frac{1}{3}f(8)$.

(Μονάδες 8)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση C_f της f είναι από τον άξονα x′x και πάνω.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε:

i. Τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία.

(Μονάδες 4)

ii. Για ποιες τιμές του x η C_f είναι κάτω από την ευθεία.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Από τον τύπο της συνάρτησης σε συνδυασμό με τις ιδιότητες των λογαρίθμων, έχουμε:

$$f(2)+f(4)=\ln 2+3\ln 4=\ln 2+3\ln 2^2=\ln 2+6\ln 2=7\ln 2$$

και

$$\frac{1}{3}f(8)=\frac{1}{3}\cdot 7\ln 8=\frac{1}{3}\cdot 7\ln 2^3=\frac{3}{3}(7\ln 2)=7\ln 2$$

οπότε $f(2)+f(4)=\frac{1}{3}f(8)$.

β) Διακρίνουμε τις παρακάτω δυνατές περιπτώσεις:

- Αν $0<x\le 1$, τότε $x-1\le 0$ και $\ln x\le 0$, οπότε $(x-1)\ln x\ge 0 \Rightarrow f(x)\ge 0$.
- Αν $x>1$, τότε $x-1>0$ και $\ln x>0$, οπότε $(x-1)\ln x>0 \Rightarrow f(x)>0$

Επομένως, σε κάθε περίπτωση, ισχύει $f(x)\ge 0$, οπότε η γραφική παράσταση της f είναι από τον άξονα x′x και πάνω.

γ) i.Οι τετμημένες των κοινών σημείων προσδιορίζονται από τη λύση της εξίσωσης $f(x)=2x-2,\ x>0$. Είναι:

$$f(x)=2x-2 \Leftrightarrow (x-1)\ln x=2(x-1) \Leftrightarrow (x-1)(\ln x-2)=0$$

$$\Leftrightarrow x-1=0 \text{ ή } \ln x-2=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=e^2$$

Εύκολα πλέον βρίσκουμε ότι τα κοινά σημεία είναι τα $A(1,\,0)$ και $B(e^2,\,2e^2-2)$.

ii. Η C_f είναι κάτω από την ευθεία (ε) για όλες τις θετικές τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x)<2(x-1)$. Είναι:

$$f(x)<2(x-1) \Leftrightarrow (x-1)\ln x-2(x-1)<0 \Leftrightarrow (x-1)(\ln x-2)<0$$

Το πρόσημο κάθε παράγοντα και του γινομένου φαίνεται στον επόμενο πίνακα.

x	0		1		e^2		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\ln x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-1)(\ln x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Από την τελευταία γραμμή του πίνακα συμπεραίνουμε ότι η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από την ευθεία (ε) για κάθε x με $x\in(1,\,e^2)$

36. Θέμα 21950 Αρχέτυπο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\dfrac{e^{3x}-8}{e^{2x}+4e^{x}-12}$.

α) Να αποδείξετε ότι το σύνολο λύσεων της ανίσωσης $\dfrac{\omega^3-8}{\omega^2+4\omega-12}>0$ είναι το $(-6,2)\cup(2,+\infty)$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}-\{\ln 2\}$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f και του άξονα xx'.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $\omega^2+4\omega-12$ έχει ρίζες τις $\omega=2$ και $\omega=-6$. Για $\omega\neq 2$ και $\omega\neq -6$ έχουμε ισοδύναμα

$\dfrac{\omega^3-8}{\omega^2+4\omega-12}>0\Leftrightarrow\dfrac{(\omega-2)(\omega^2+2\omega+4)}{(\omega-2)(\omega+6)}>0\Leftrightarrow(\omega^2+2\omega+4)(\omega+6)>0$ και επειδή το τριώνυμο $\omega^2+2\omega+4$ έχει αρνητική διακρίνουσα θα είναι για κάθε $\omega\in\mathbb{R}$ ομόσημο του συντελεστή του ω^2, δηλαδή θετικό, έχουμε τελικά ότι $\omega+6>0\Leftrightarrow\omega>-6$.

Το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης $\dfrac{\omega^3-8}{\omega^2+4\omega-12}>0$ είναι το $(-6,2)\cup(2,+\infty)$.

β) Η συνάρτηση f ορίζεται για τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $\frac{e^{3x}-8}{e^{2x}+4e^x-12}>0$. Αν θέσουμε $e^x=\omega$ η τελευταία ανίσωση γίνεται $\frac{\omega^3-8}{\omega^2+4\omega-12}>0$ που όπως δείξαμε στο α) αληθεύει για κάθε $\omega \in (-6,2)\cup(2,+\infty)$.

Συνεπώς θα πρέπει $e^x \neq 2 \Leftrightarrow x \neq \ln 2$ και $e^x > -6$ που ισχύει. Τελικά το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}-\{\ln 2\}$.

γ) Οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφική παράσταση της f με τον άξονα xx' είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=0$ με $x \neq \ln 2$. Είναι

$$\begin{aligned}
&f(x)=0 \Leftrightarrow \\
&\ln\frac{e^{3x}-8}{e^{2x}+4e^x-12}=\ln 1 \Leftrightarrow \\
&\frac{e^{3x}-8}{e^{2x}+4e^x-12}=1 \Leftrightarrow \\
&e^{3x}-8=e^{2x}+4e^x-12 \Leftrightarrow \\
&e^{3x}-e^{2x}-4e^x+4=0 \Leftrightarrow \\
&e^{2x}(e^x-1)-4(e^x-1)=0 \Leftrightarrow \\
&(e^x-1)(e^{2x}-4)=0 \Leftrightarrow \\
&(e^x-1)(e^x-2)(e^x+2)=0
\end{aligned}$$

Συνεπώς θα πρέπει $e^x-1=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x=0$ που είναι δεκτή ή

$e^x-2=0 \Leftrightarrow e^x=2 \Leftrightarrow x=\ln 2$ που απορρίπτεται ή

$e^x+2=0 \Leftrightarrow e^x=-2$ που είναι αδύνατη.

Τελικά το μοναδικό σημείο τομής της γραφική παράσταση της f με τον άξονα xx' είναι το $(0,0)$.