Κεφ. 5.1. - Τράπεζα Θεμάτων 2022 - Άλγεβρα Β' Λυκείου

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ & ΛΥΣΕΙΣ

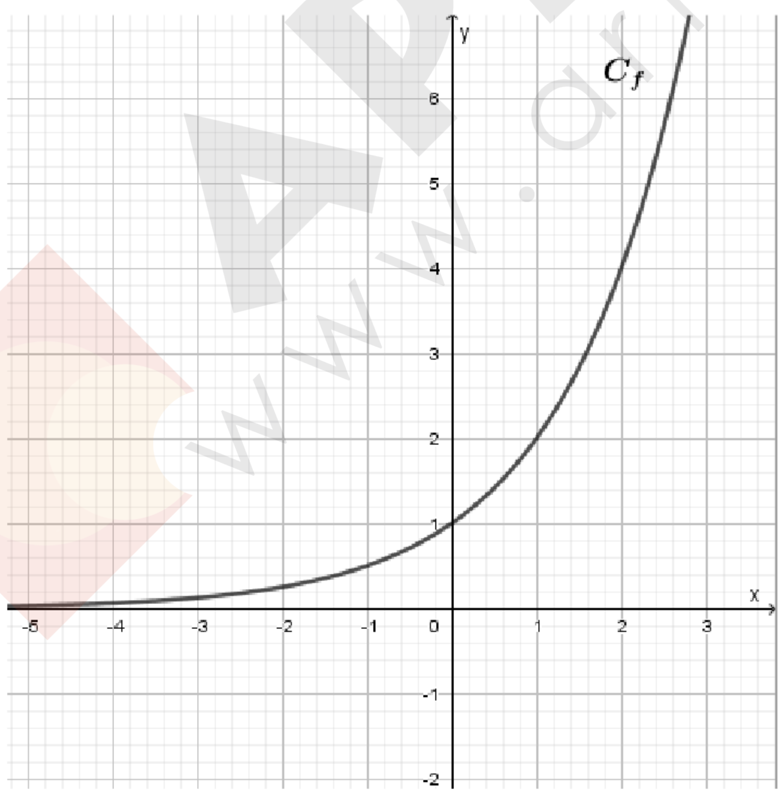
Θέμα 2 – Κωδικοί:

18866, 21091, 21163, 21451, 21993, 21994

Η Τράπεζα Θεμάτων για την Άλγεβρα Β' Λυκείου είναι μία μεγάλη «θάλασσα». Εμείς όμως έχουμε φροντίσει για εσένα, συγκεντρώνοντας εκείνα τα θέματα που αποτελούν τη «βάση» της γνώσης και για τα υπόλοιπα. Μελετώντας και κατανοώντας το μοτίβο σκέψης για τα συγκεκριμένα, μπορείς να λύσεις με επιτυχία και τα υπόλοιπα θέματα. Στην ιστοσελίδα μας www.arnos.gr για το Course της Άλγεβρας, μελετάς και προετοιμάζεσαι με την αναλυτική διδασκαλία σε ασκήσεις και θέματα, στο ύφος της Τράπεζας.

1. Θέμα 18866 Αρχέτυπο

Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2^x,\ x\epsilon\mathbb{R}$.



α) Να λύσετε την εξίσωση $2^x - 1 = 0$.

(Μονάδες 10)

β)

i. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = 2^x - 1,\ x\epsilon\mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της g με τους άξονες συντεταγμένων.

(Μονάδες 05)

ΛΥΣΗ

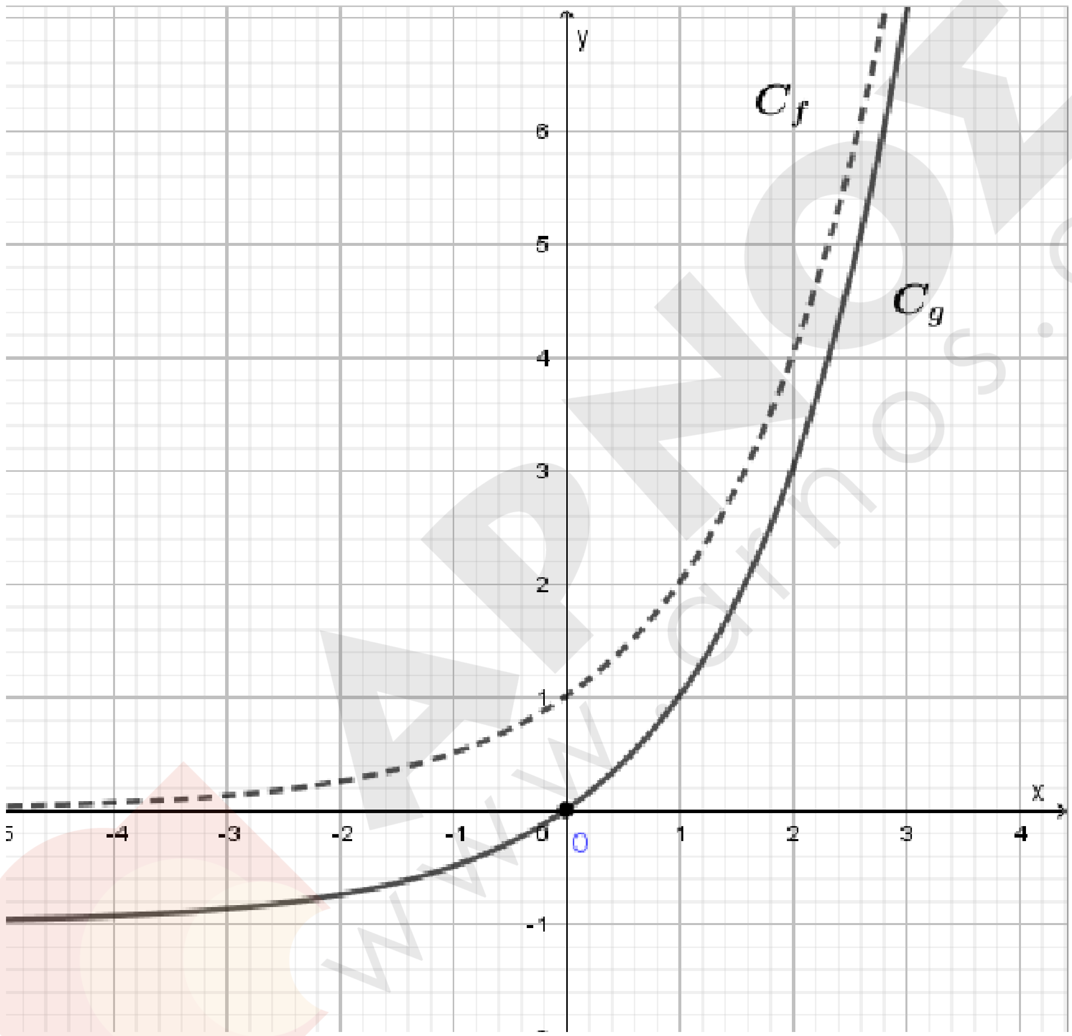
α) $2^x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2^x = 1 \Leftrightarrow 2^x = 2^0 \Leftrightarrow x = 0$.

β)

i. Επειδή $g(x) = f(x) - 1$, η γραφική παράσταση της συνάρτησης g προκύπτει από μία κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f κατά 1 μονάδα προς τα κάτω.

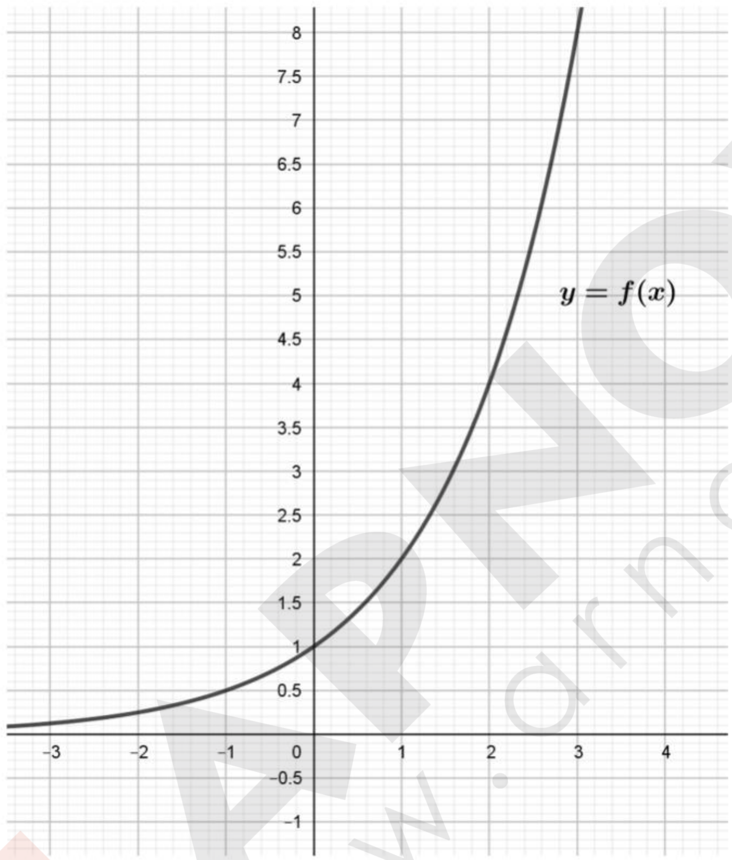
ii. Για να βρούμε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τον άξονα $x'x$, επιλύουμε την εξίσωση: $g(x) = 0 \Leftrightarrow 2^x - 1 = 0 \overset{\alpha)}{\Leftrightarrow} x = 0$. Επομένως, η γραφική παράσταση της συνάρτησης g διέρχεται από την αρχή των αξόνων, δηλαδή το σημείο $O(0,0)$.

Εναλλακτική προσέγγιση: Παρατηρούμε από την γραφική παράσταση της f ότι τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 1. Όταν λοιπόν η γραφική παράσταση μετακινηθεί κατά 1 μονάδα προς τα κάτω, τότε το σημείο τομής της g με τους άξονες συντεταγμένων θα είναι το $O(0,0)$.



2. Θέμα 21091 Αρχέτυπο

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας εκθετικής συνάρτησης f, με πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$.



α)

i. Με βάση την γραφική της παράσταση, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης f .

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$					

(Μονάδες 10)

ii. Να βρείτε τον τύπο της εκθετικής συνάρτησης f .

(Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=32$.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α)

i. Με βάση την γραφική παράσταση της f έχουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$0,5=\frac{1}{2}$	1	2	4	8

ii. Από τον παραπάνω πίνακα τιμών και με δεδομένο ότι η συνάρτηση είναι εκθετική παρατηρούμε ότι $f(-1)=\frac{1}{2}=2^{-1}$, $f(0)=1=2^0$, $f(1)=2=2^1$, $f(2)=4=2^2$ και $f(3)=8=2^3$. Άρα η εκθετική συνάρτηση έχει τύπο $f(x)=2^x$.

β) Έχουμε $f(x)=32$, δηλαδή $2^x=32$, οπότε $2^x=2^5$ και τελικά $x=5$.

3. Θέμα 21163 Αρχέτυπο

Δίνεται το σημείο $A\left(1,\frac{1}{2}\right)$ το οποίο ανήκει στη γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f.

α) Αν η συνάρτηση f είναι εκθετική συνάρτηση $a^x, 0<a<1$, να βρείτε το α.

(Μονάδες 13)

β) Για $a=\frac{1}{2}$, να συγκρίνετε τους αριθμούς $\alpha^{\sqrt{2}}, a^{\sqrt{3}}$.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

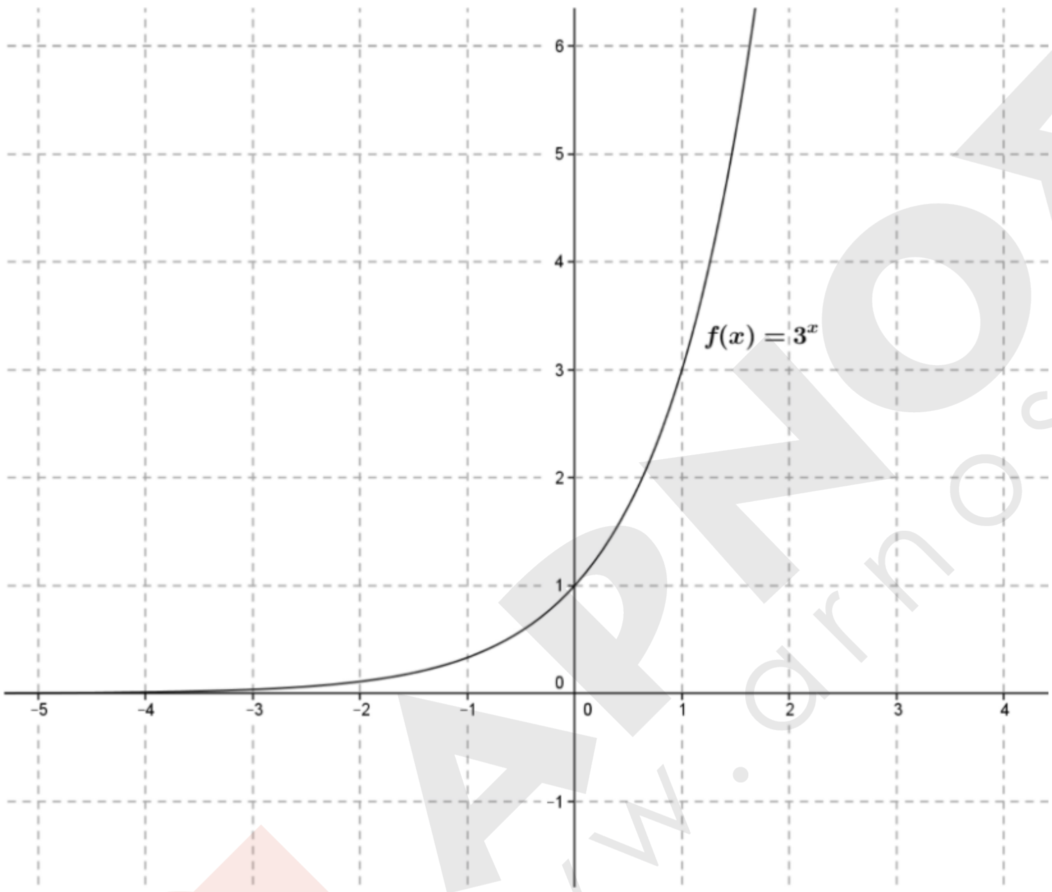
α) Εφόσον το σημείο Α ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=a^x$ οι συντεταγμένες του θα ικανοποιούν τον τύπο της και $0<\alpha<1$, οπότε θα ισχύει ότι

$a^1=\frac{1}{2}\Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$.

β) Η συνάρτηση f έχει τύπο $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ και είναι εκθετική με βάση $a<1$ οπότε θα είναι μία γνησίως φθίνουσα συνάρτηση. Επειδή ισχύει $\sqrt{2}<\sqrt{3}$, θα έχουμε ότι $f(\sqrt{2})>f(\sqrt{3})\Rightarrow a^{\sqrt{2}}>a^{\sqrt{3}}$.

4. Θέμα 21451 Αρχέτυπο

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=3^x$ με $x \in \mathbb{R}$.



α) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x)=3^x+1$ και $h(x)=3^x-1$, μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

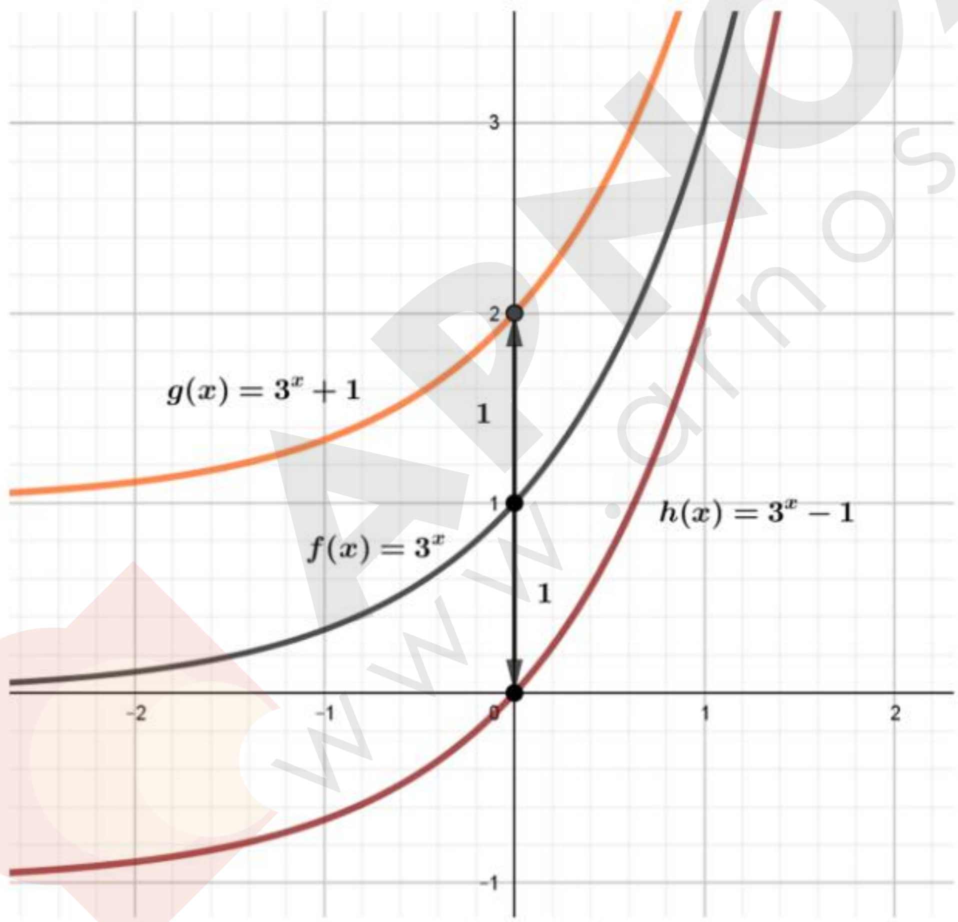
(Μονάδες 12)

β) Ποια είναι η ασύμπτωτη ευθεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g και ποια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h;

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=3^x+1$ προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά 1 μονάδα προς τα πάνω, ενώ η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x)=3^x-1$ προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά 1 μονάδα προς τα κάτω. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των τριών συναρτήσεων.

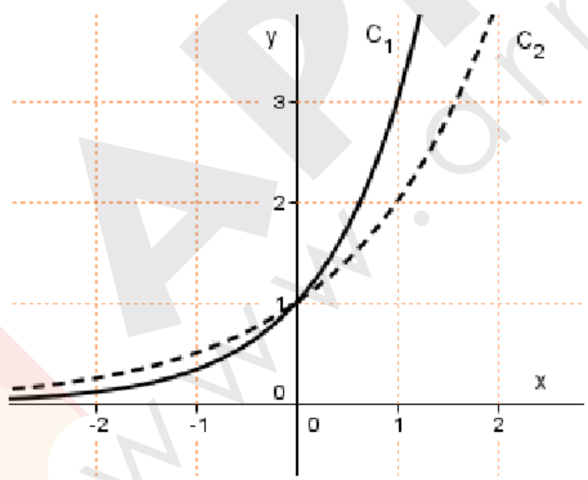


β) Η γραφική παράσταση της $f(x)=3^x$ έχει ασύμπτωτη την ευθεία $y=0$ (τον αρνητικό ημιάξονα των x). Η κατακόρυφη μετατόπιση της f κατά 1 μονάδα προς τα πάνω θα μετατοπίσει και την ασύμπτωτη ευθεία κατά μία μονάδα προς τα πάνω. Άρα η γραφική παράσταση της g έχει ασύμπτωτη την ευθεία με εξίσωση $y=1$.

Ομοίως, η κατακόρυφη μετατόπιση της f κατά 1 μονάδα προς τα κάτω θα μετατοπίσει και την ασύμπτωτη ευθεία κατά μία μονάδα προς τα κάτω. Άρα η γραφική παράσταση της h έχει ασύμπτωτη την ευθεία με εξίσωση $y=-1$.

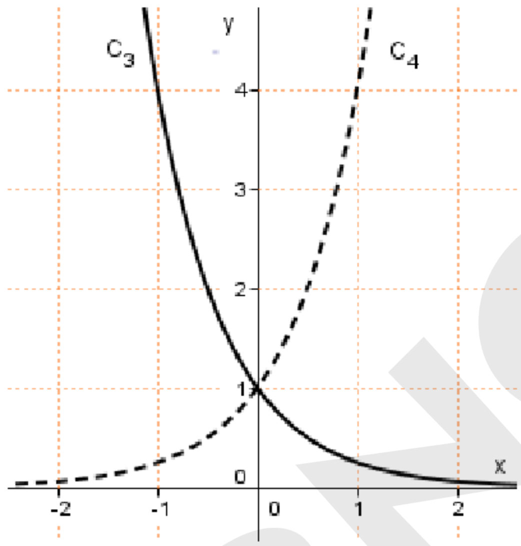
5. Θέμα 21993 Αρχέτυπο

α) Ποια από τις δύο καμπύλες C_1 (συνεχής γραμμή) και C_2 (διακεκομμένη γραμμή) είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2^x$ και ποια της συνάρτησης $g(x) = 3^x$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



(Μονάδες 12)

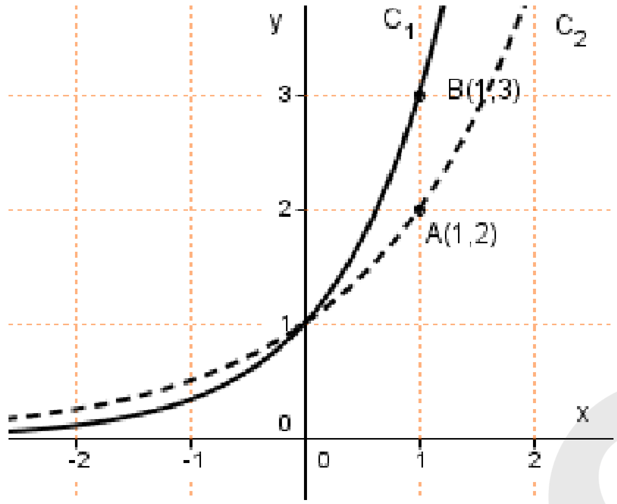
β) Ποια από τις δύο καμπύλες C_3 (συνεχής γραμμή) και C_4 (διακεκομμένη γραμμή) είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\varphi(x) = 4^x$ και ποια της συνάρτησης $\psi(x) = 4^{-x}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



(Μονάδες 13)

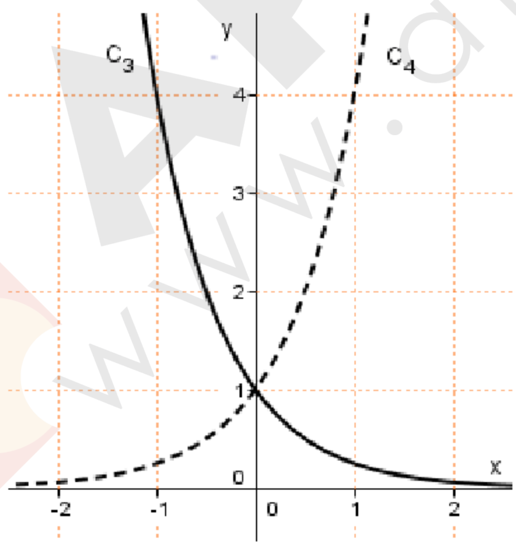
ΛΥΣΗ

α) Παρατηρούμε ότι $f(1) = 2^1 = 2$, οπότε το σημείο $A(1,2)$ είναι σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f. Επίσης, και $g(1) = 3^1 = 3$, οπότε το σημείο $B(1,3)$ είναι σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g. Άρα, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f αντιστοιχεί στην καμπύλη C_2 και η γραφική παράσταση της συνάρτησης g αντιστοιχεί στην καμπύλη C_1.



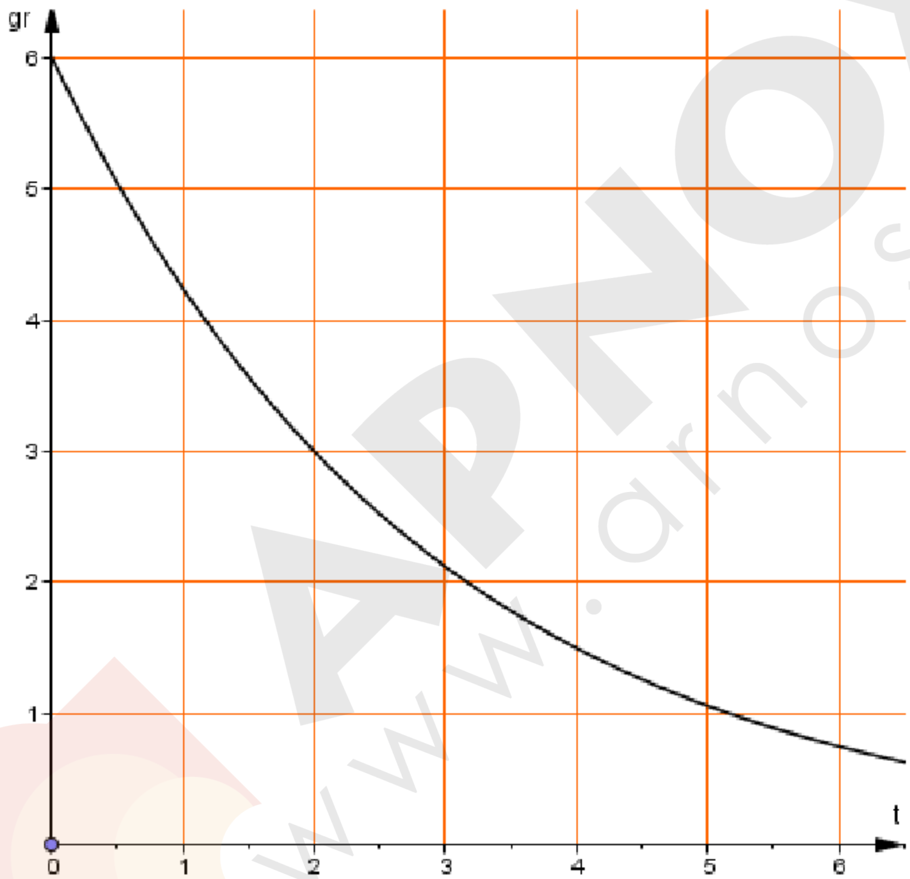
β) Γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης α^x είναι γνησίως αύξουσα όταν $\alpha > 1$ και γνησίως φθίνουσα όταν $0 < \alpha < 1$.

Άρα, η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\varphi(x) = 4^x$, ως γνησίως αύξουσας, αντιστοιχεί στην καμπύλη C_4, ενώ η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\psi(x) = 4^{-x} = \left(\frac{1}{4}\right)^x$, ως γνησίως φθίνουσας, αντιστοιχεί στην καμπύλη C_3.



6. Θέμα 21994 Αρχέτυπο

Η καμπύλη που φαίνεται στο παρακάτω σύστημα αξόνων δείχνει την εκθετική απόσβεση ενός ραδιενεργού υλικού σε συνάρτηση με το χρόνο. Ειδικότερα, ο οριζόντιος άξονας δηλώνει τον χρόνο t σε ημέρες (π.χ. η 1^{η} ημέρα αντιστοιχεί στο χρονικό διάστημα από $t = 0$ μέχρι $t = 1$, η 2^{η} ημέρα στο χρονικό διάστημα από $t = 1$ μέχρι $t = 2$ κ.λπ.) και ο κατακόρυφος άξονας δηλώνει την ποσότητα του υλικού σε γραμμάρια (gr).



α) Πόσα γραμμάρια ήταν η αρχική ($t = 0$) ποσότητα του ραδιενεργού υλικού;

(Μονάδες 8)

β) Πόση είναι η ημιζωή (ή χρόνος υποδιπλασιασμού) του ραδιενεργού υλικού;

(Μονάδες 9)

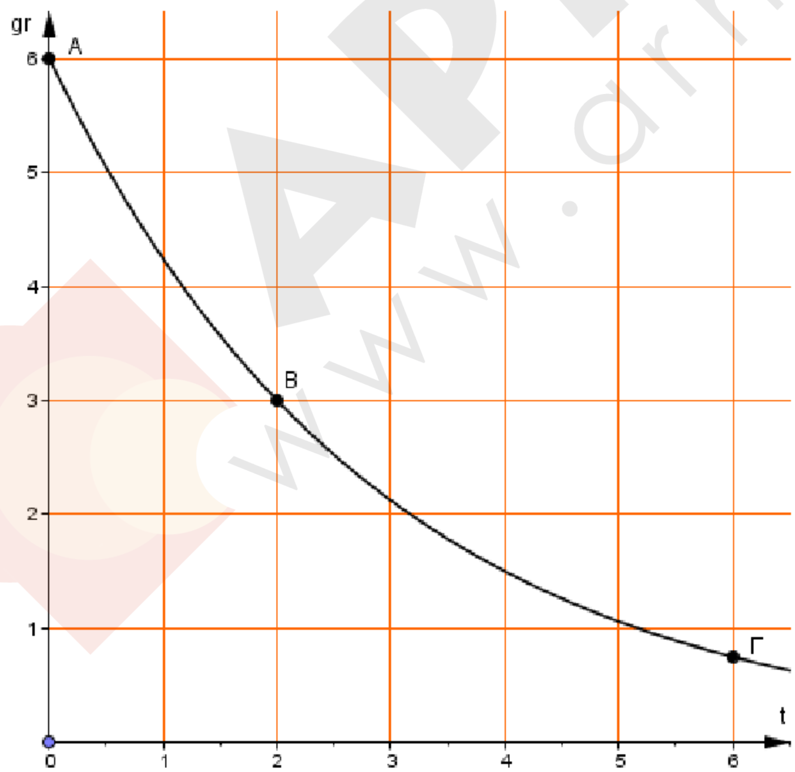
γ) Κατά τη διάρκεια ποιάς ημέρας θα έχει απομείνει ποσότητα ραδιενεργού υλικού μικρότερη από 1gr;

(Μονάδες 8)

Σε όλα τα ερωτήματα, να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ΛΥΣΗ

α) Η αρχική ποσότητα του ραδιενεργού υλικού είναι το υψόμετρο του σημείου της γραφικής παράστασης που αντιστοιχεί στο $t = 0$, δηλαδή η τεταγμένη του σημείου A. Οπότε, η αρχική ποσότητα του υλικού είναι 6 (γραμμάρια).



β) Η ημιζωή του ραδιενεργού υλικού είναι η τιμή του χρόνου t κατά την οποία η ποσότητα του υλικού μειώνεται στο ήμισυ της αρχικής, δηλαδή γίνεται 3 γραμμάρια. Είναι συνεπώς, η τετμημένη του σημείου B, δηλαδή $t = 2$.

γ) Το υψόμετρο της καμπύλης γίνεται μικρότερο του 1 στο χρονικό διάστημα $(5, 6)$, δηλαδή κατά τη διάρκεια της $6^{ης}$ ημέρας. Άρα, κατά τη διάρκεια της $6^{ης}$ ημέρας θα έχει απομείνει ποσότητα ραδιενεργού υλικού μικρότερη από 1gr.

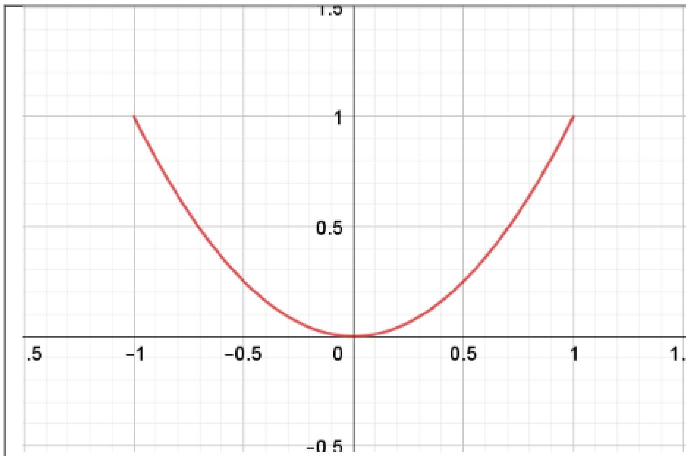
Θέμα 3 – Κωδικός: 15023

7. Θέμα 15023 Αρχέτυπο

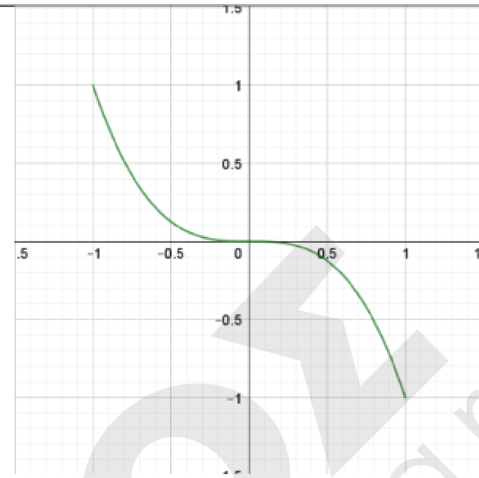
Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-1,1]$, η οποία είναι περιττή και γνησίως φθίνουσα.

α) Από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις μόνο μία μπορεί να είναι η γραφική παράσταση της f. Να βρείτε ποια είναι αιτιολογώντας την απάντησή σας.

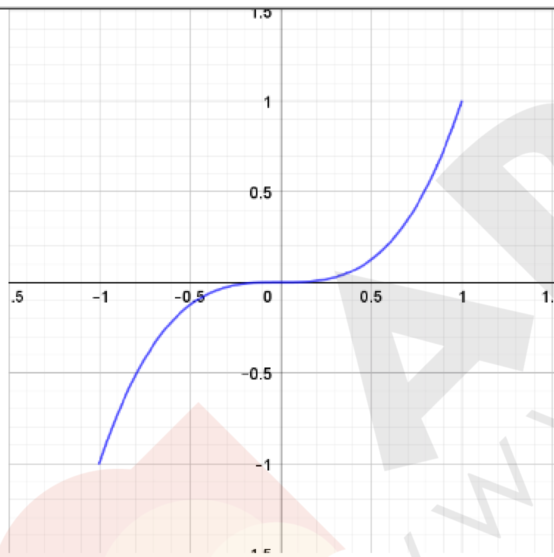
(Μονάδες 8)



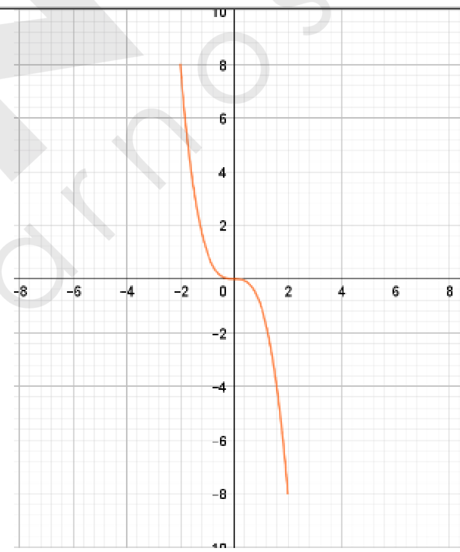
Σχήμα α



Σχήμα β



Σχήμα γ



Σχήμα δ

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=f(x)+2$

(Μονάδες 5)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x)=f(x-1)$

(Μονάδες 5)

δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $s(x)=e^x-1$ και να αποδείξετε (αλγεβρικά ή γραφικά) ότι η εξίσωση $s(x)=f(x)$ έχει μοναδική λύση τη $x=0$.

(Μονάδες 7)

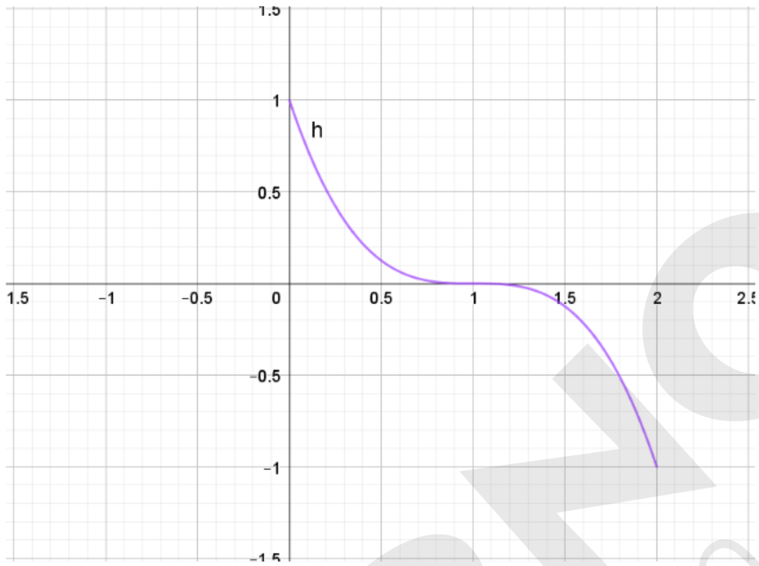
ΛΥΣΗ

α) Στο σχήμα α η γραφική παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον yy' οπότε είναι άρτια και όχι περιττή, οπότε δεν είναι. Στο σχήμα γ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα οπότε δεν είναι. Στο σχήμα δ η συνάρτηση είναι μεν περιττή και γνησίως φθίνουσα, αλλά έχει πεδίο ορισμού το $[-2,2]$ και όχι το $[-1,1]$, οπότε δεν είναι.

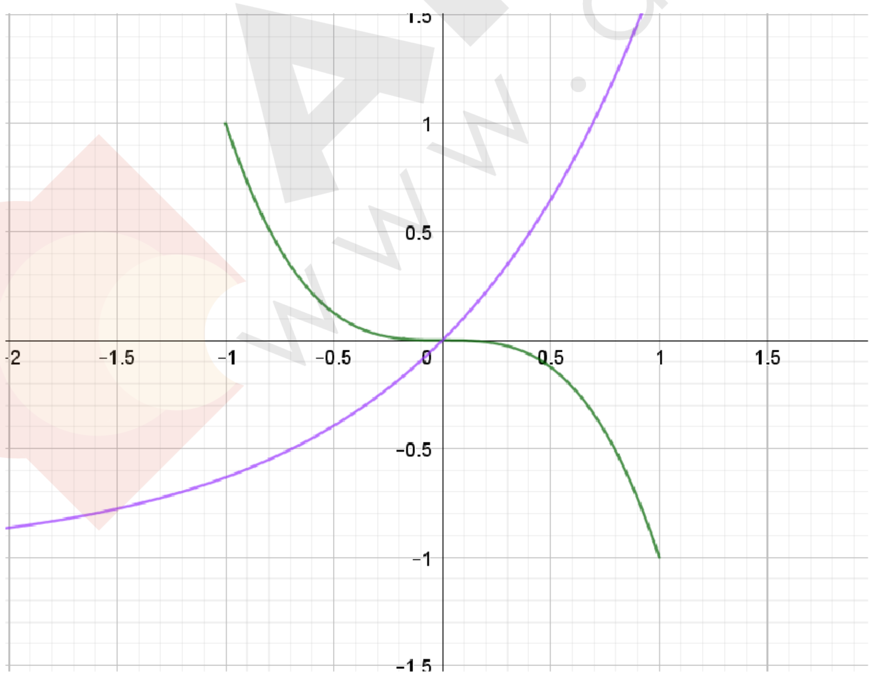
Συνεπώς σωστή απάντηση είναι το σχήμα β.

β) Η γραφική παράσταση της $g(x)=f(x)+2$ προκύπτει με κατακόρυφη μετατόπιση της $f(x)$ κατά 2 μονάδες προς τα πάνω. Η γραφική της παράσταση φαίνεται παρακάτω.

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = f(x-1)$ προκύπτει με οριζόντια μετατόπιση της $f(x)$ κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά. Η γραφική της παράσταση φαίνεται παρακάτω.



δ) Η γραφική παράσταση της $s(x) = e^x - 1$ προκύπτει με κατακόρυφη μετατόπιση της e^x κατά 1 μονάδα προς τα κάτω. Η γραφική της παράσταση φαίνεται παρακάτω.



Από το παραπάνω σχήμα βλέπουμε ότι η γραφική παράσταση της $s(x)=e^x-1$ έχει ένα ακριβώς κοινό σημείο, το $(0,0)$ με τη γραφική παράσταση της f, που σημαίνει ότι η εξίσωση $s(x)=f(x)$ έχει ακριβώς μία λύση τη $x=0$.

Εναλλακτικά, για $x=0$ είναι $s(0)=e^0-1=1-1=0=f(0)$.

Για $x>0$ είναι $e^x>e^0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow e^x-1>0$ ενώ $f(x)<f(0) \Leftrightarrow f(x)<0$ αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε για $x>0$ είναι $s(x)>f(x)$.

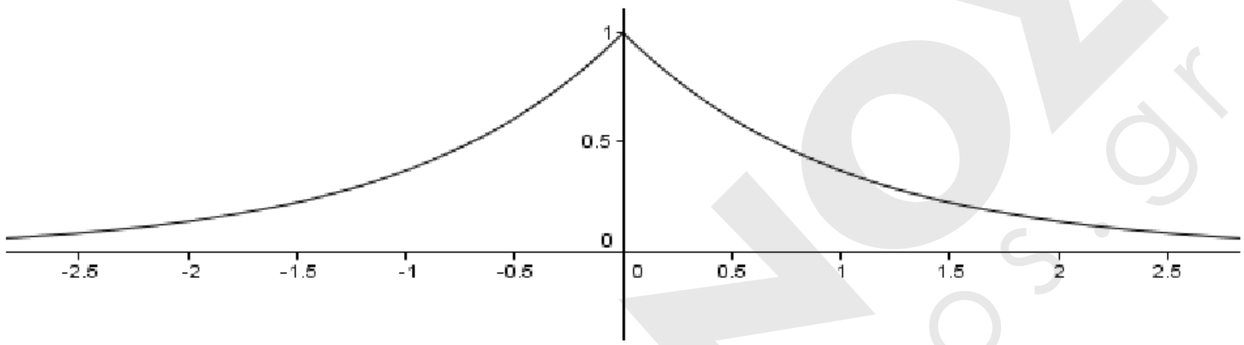
Για $x<0$ είναι $e^x<e^0 \Leftrightarrow e^x<1 \Leftrightarrow e^x-1<0$ ενώ $f(x)>f(0) \Leftrightarrow f(x)>0$ αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε για $x<0$ είναι $s(x)<f(x)$.

Συνεπώς η εξίσωση $s(x)=f(x)$ έχει ακριβώς μία λύση τη $x=0$.

Θέμα 4 – Κωδικοί:
15269, 20689, 20854, 21444, 21448, 21471

8. Θέμα 15269 Αρχέτυπο

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f διπλού τύπου.



α) Αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση αντιστοιχεί σε μια ακριβώς από τις παρακάτω συναρτήσεις να επιλέξετε ποιος είναι ο τύπος της συνάρτησης f.

A. $f(x)=\begin{cases} e^{x}, & x<0 \\ e^{-x}, & x\geq 0 \end{cases}$ B. $f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x<0 \\ e^{x}, & x\geq 0 \end{cases}$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τη μονοτονία και την μέγιστη τιμή της.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε, για τις διάφορες τιμές του α, το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία $y=\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

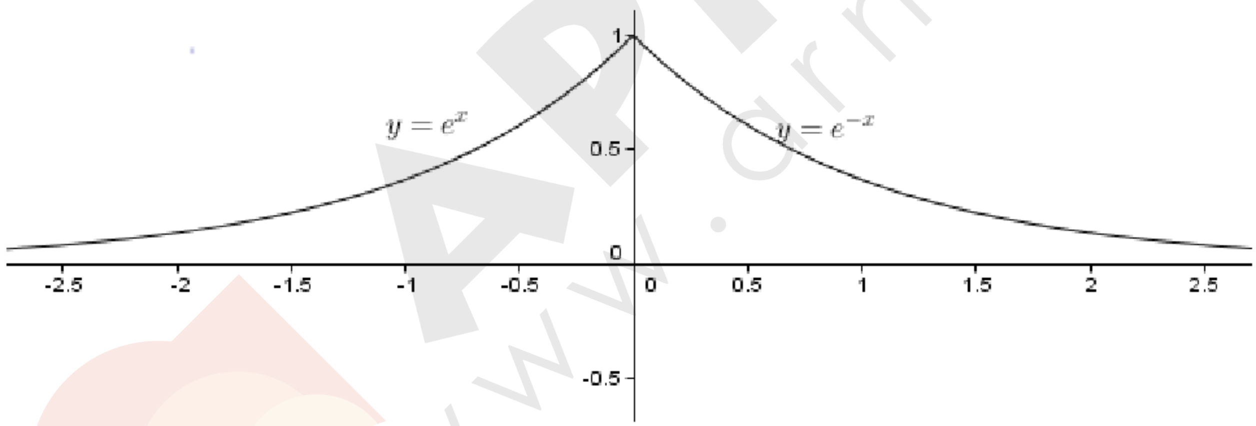
(Μονάδες 7)

δ) Να αιτιολογήσετε γιατί το μοναδικό κοινό σημείο της γραφικής παράστασης C_f της f με την παραβολή $y=x^2+1$, $x\in\mathbb{R}$ είναι το σημείο $(0,1)$.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Η γραφική παράσταση της f αποτελείται από την $y=e^x$ για $x<0$ και την $y=e^{-x}$ για $x\geq 0$ οπότε ο τύπος της είναι ο πρώτος από τους δοσμένους τύπους.

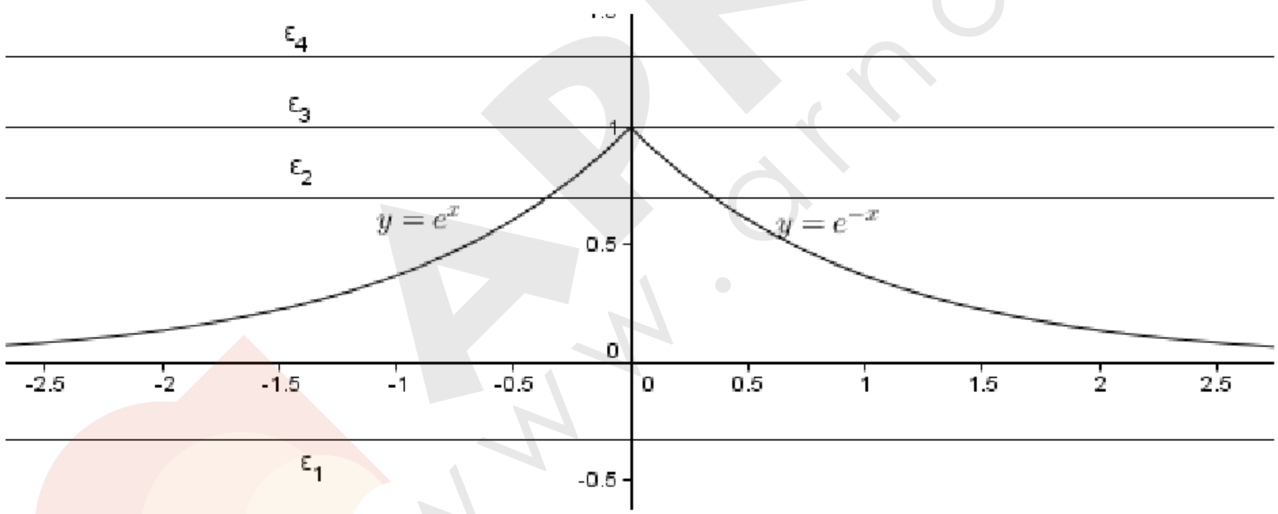


β) Από την παραπάνω γραφική παράσταση της f συμπεραίνουμε ότι αυτή είναι:

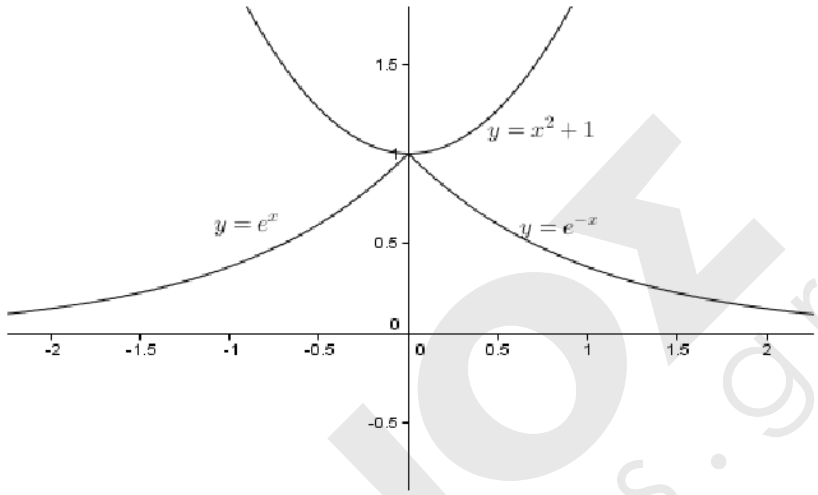
- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$
- γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$ και
- παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x=0$, το $f(0)=1$

γ) Διακρίνουμε τις παρακάτω δυνατές περιπτώσεις:

- Αν $\alpha \le 0$, (ευθεία ε_1) τότε η C_f και η ευθεία $y=\alpha$ δεν έχουν κοινό σημείο.
- Αν $0<\alpha<1$, (ευθεία ε_2) τότε η C_f και η ευθεία $y=\alpha$ έχουν ακριβώς δυο κοινά σημεία.
- Αν $\alpha=1$, (ευθεία ε_3) τότε η C_f και η ευθεία $y=\alpha$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.
- Αν $\alpha>1$, (ευθεία ε_4) τότε η C_f και η ευθεία $y=\alpha$ δεν έχουν κοινό σημείο.



δ) Η παραβολή $y=x^2+1$ διέρχεται από το σημείο $(0,1)$ αφού για $x=0$ είναι $y=0^2+1=1$. Το σημείο $(0,1)$ είναι και σημείο της C_f, αφού $f(0)=1$. Με $x\neq 0$ έχουμε $x^2>0$, οπότε $y=x^2+1>1$ και $f(x)\leq 1$. Άρα η παραβολή και η C_f δεν έχουν άλλο κοινό σημείο, οπότε το μοναδικό κοινό σημείο τους είναι το $(0,1)$.



Σχόλιο

Στο πλαίσιο μιας γραφικής λύσης θα μπορούσαμε να σχεδιάσουμε την παραβολή και τη γραφική παράσταση της f και να διαπιστώσουμε ότι έχουν μοναδικό κοινό σημείο το $(0,1)$ όπως φαίνεται στο σχήμα.

9. Θέμα 20689 Αρχέτυπο

α) Να λυθεί η ανίσωση $\frac{x-2}{x+1}>0$.

(Μονάδες 07)

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(\frac{\alpha-2}{\alpha+1}\right)^x$, με $x\in\mathbb{R}$.

i. Να βρεθούν οι τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση f είναι καλώς ορισμένη.

(Μονάδες 03)

ii. Για ποιες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα;

(Μονάδες 10)

iii. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν τιμές του πραγματικού αριθμού α για τις οποίες η συνάρτηση f είναι σταθερή.

(Μονάδες 05)

ΛΥΣΗ

α) Η ανίσωση ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με $x\neq-1$.

Είναι $\frac{x-2}{x+1}>0\Leftrightarrow(x-2)(x+1)>0\Leftrightarrow x<-1$ ή $x>2$.

Τελικά $x\in(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$.

β)

i. Η συνάρτηση f ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$ αν και μόνο αν $\frac{\alpha-2}{\alpha+1}>0$.

Από το ερώτημα (α) έχουμε ότι: $\frac{\alpha-2}{\alpha+1}>0\Leftrightarrow\alpha\in(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$.

ii. Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα αν και μόνο αν $0<\frac{\alpha-2}{\alpha+1}<1$.

Από το ερώτημα (i) έχουμε ότι: $\frac{\alpha-2}{\alpha+1}>0 \Leftrightarrow \alpha\in(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$.

Ακόμη είναι:

$$\frac{\alpha-2}{\alpha+1}<1 \Leftrightarrow \frac{\alpha-2}{\alpha+1}-1<0 \Leftrightarrow \frac{\alpha-2-1(\alpha+1)}{\alpha+1}<0 \Leftrightarrow \frac{-3}{\alpha+1}<0 \Leftrightarrow \alpha+1>0 \Leftrightarrow \alpha>-1.$$

Οι παραπάνω ανισώσεις συναληθεύουν για $\alpha\in(2,+\infty)$. Επομένως για $\alpha\in(2,+\infty)$ η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

iii. Ισχύει $\frac{\alpha-2}{\alpha+1}>0$.

- Αν $\frac{\alpha-2}{\alpha+1}>1$ τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
- Αν $0<\frac{\alpha-2}{\alpha+1}<1$ τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.
- Αν ισχύει $\frac{\alpha-2}{\alpha+1}=1$, η f είναι σταθερή αφού $f(x)=1^x=1$.

  Τότε $\frac{\alpha-2}{\alpha+1}=1 \Rightarrow \alpha-2=\alpha+1 \Rightarrow 0\alpha=3$, αδύνατη.

Τελικά, δεν υπάρχουν τιμές του πραγματικού αριθμού α για τις οποίες η συνάρτηση f είναι σταθερή.

10. Θέμα 20854 Αρχέτυπο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι άρτια.

(Μονάδες 05)

β) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 0$ και να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της.

(Μονάδες 05)

γ) Να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση f.

(Μονάδες 10)

δ) Αν $g(x) = συνx$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, τότε να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

(Μονάδες 05)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι άρτια, διότι:

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, το $-x \in \mathbb{R}$ και ισχύει ότι $f(-x) = e^{|-x|} = e^{|x|} = f(x)$.

β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(x) \geq f(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ισοδύναμα έχουμε ότι

$$e^{|x|} \geq e^0 \overset{e^x \uparrow}{\Longleftrightarrow} |x| \geq 0,$$

η οποία ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x = 0$.

Επομένως, η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = 0$ και η ελάχιστη τιμή της είναι η $f(0) = 1$.

γ) Αν $x \geq 0$, τότε $|x| = x$ και $f(x) = e^x$.

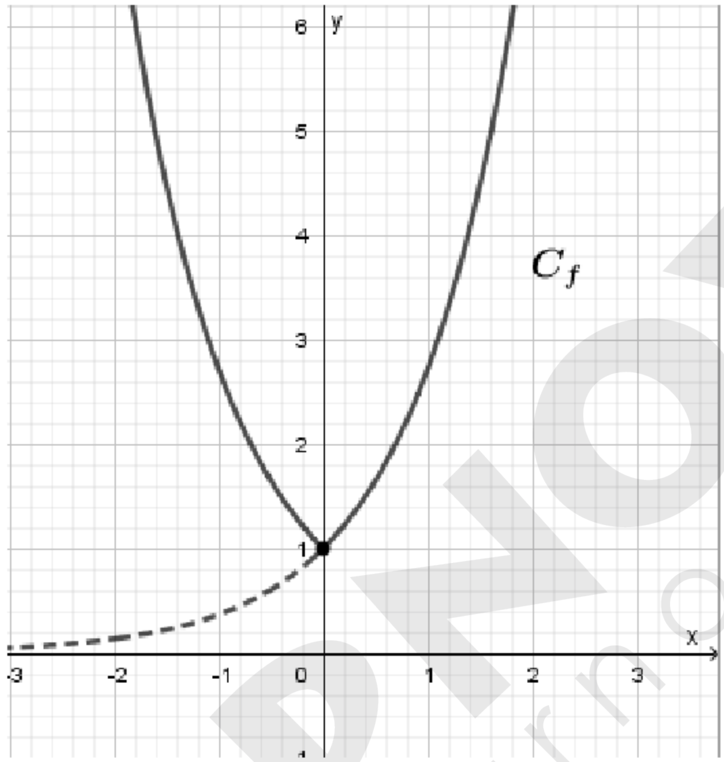
Αν $x < 0$, τότε $|x| = -x$ και $f(x) = e^{-x}$.

Έτσι προκύπτει η δίκλαδη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x < 0 \\ e^x, & x \geq 0 \end{cases}$, η οποία σύμφωνα με το ερώτημα α) είναι άρτια. Οπότε είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.

Επομένως, αποτελείται από την γραφική παράσταση της $h(x) = e^x$, $x \geq 0$ και την συμμετρική της h ως προς τον άξονα $y'y$ για $x < 0$.

Επιπλέον, από το ερώτημα β) γνωρίζουμε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = 0$ και η ελάχιστη τιμή της είναι η $f(0) = 1$.

Επομένως η γραφική παράσταση της f δίνεται από το παρακάτω σχήμα:

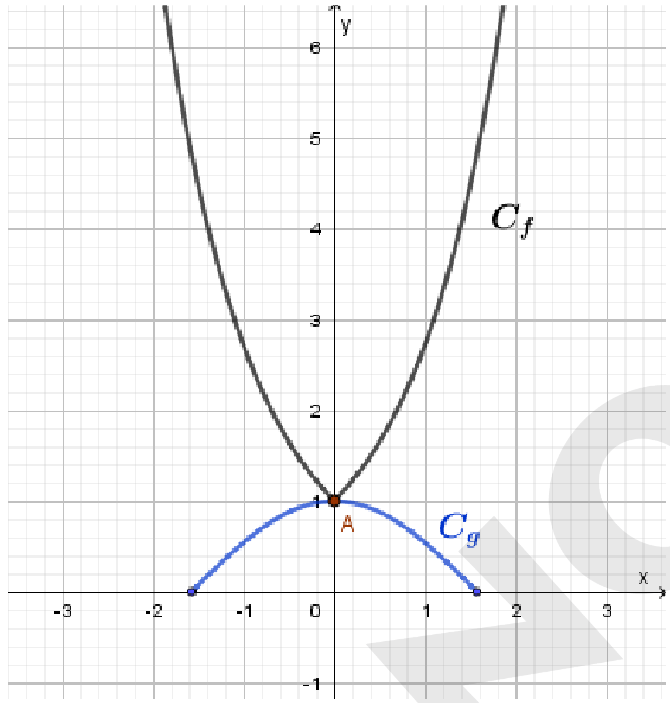


δ) Έχουμε αποδείξει ότι $f(x) \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν $x = 0$.

Για την συνάρτηση $g(x) = \sigma\upsilon\nu x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ γνωρίζουμε ότι έχει μέγιστη τιμή το 1 στη θέση $x = 0$. Επομένως, είναι $g(x) \leq 1 \leq f(x)$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$.

Ως εκ τούτου, οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν μοναδικό κοινό σημείο το $A(0,1)$.

Τα παραπάνω φαίνονται στο επόμενο σχήμα:



11. Θέμα 21444 **Αρχέτυπο**

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπους $f(x)=4^x$ και $g(x)=2^x-\dfrac{1}{4}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο A, του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g, με εξαίρεση το σημείο A.

(Μονάδες 9)

γ) Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις f και g στο ίδιο σύστημα αξόνων.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Οι λύσεις τις εξίσωσης $f(x)=g(x)$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g. Έχουμε:

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow$$
$$4^x=2^x-\frac{1}{4}\Leftrightarrow$$
$$4\cdot\left(2^x\right)^2-4\cdot 2^x+1=0\overset{y=2^x}{\Leftrightarrow}$$
$$4y^2-4y+1=0\Leftrightarrow$$
$$(2y-1)^2=0\Leftrightarrow$$
$$y=\frac{1}{2}.$$

Άρα

$$2^x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$
$$2^x=2^{-1}\Leftrightarrow$$
$$x=-1.$$

Οπότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο το $\mathrm{A}\left(-1,\frac{1}{4}\right)$, αφού $f(-1)=g(-1)=\frac{1}{4}$.

β) Θα δείξουμε ότι $f(x)>g(x)$ για κάθε $x\neq -1$. Έχουμε ισοδύναμα:

$$f(x)>g(x)\Leftrightarrow$$
$$4^x>2^x-\frac{1}{4}\Leftrightarrow$$
$$4\cdot\left(2^x\right)^2-4\cdot 2^x+1>0\overset{y=2^x}{\Leftrightarrow}$$
$$4y^2-4y+1>0\Leftrightarrow$$
$$(2y-1)^2>0.$$

που ισχύει για κάθε για κάθε πραγματικό αριθμό $y\neq\frac{1}{2}$, δηλαδή για κάθε πραγματικό αριθμό x για τον οποίο ισχύει:

$2^x \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$2^x \neq 2^{-1} \Leftrightarrow$

$x \neq -1$.

Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g, με εξαίρεση το σημείο $\mathrm{A}\left(-1,\frac{1}{4}\right)$.

γ) Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g. Να σημειώσουμε ότι η γραφική παράσταση της g προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $y=2^x$ κατά $\frac{1}{4}$ μονάδες προς τα κάτω και με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα τιμών.

x	-2	-1	0	1
$f(x)=4^x$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	1	4

x	-2	-1	0	1
$g(x)=2^x-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{4}$

12. Θέμα 21448 Αρχέτυπο

Όταν ένας ασθενής παίρνει μια δόση ενός φαρμάκου τη χρονική στιγμή $t=0$, τότε ο οργανισμός του το μεταβολίζει έτσι ώστε η ποσότητά του $f(t)$ (σε mg) να μειώνεται μετά από t ημέρες σύμφωνα με τη συνάρτηση

$$f(t)=q_0\cdot\alpha^t\,,\ t\geq 0,$$

όπου οι αριθμοί α, q_0 είναι κατάλληλες θετικές σταθερές.

α) Να εξηγήσετε τι παριστάνει η σταθερά q_0 στο πλαίσιο του προβλήματος και να αιτιολογήσετε γιατί ισχύει $0<\alpha<1$.

(Μονάδες 6)

β) Υποθέτουμε τώρα ότι μία ημέρα μετά τη λήψη του φαρμάκου, η ποσότητά του στον οργανισμό του ασθενούς έχει υποδιπλασιαστεί.

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha = \frac{1}{2}$.

(Μονάδες 5)

ii. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης f, εκφράζοντας τις τιμές $f(t)$ ως συνάρτηση της αρχικής τιμής q_0.

(Μονάδες 4)

t	0	1	2	3	4	5	6
$f(t)$	q_0	$\frac{q_0}{2}$					

γ) Υποθέτουμε τώρα ότι $\alpha = \frac{1}{2}$ και ότι η ποσότητα του φαρμάκου που παραμένει στον οργανισμό στο τέλος της 4ης ημέρας είναι 25 mg.

i. Να υπολογίσετε την ποσότητα της δόσης που πήρε ο ασθενής.

(Μονάδες 5)

ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0,6]$.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Στο πλαίσιο του προβλήματος η σταθερά q_0 παριστάνει τη δόση του φαρμάκου που πήρε ο ασθενής (την ποσότητα του φαρμάκου στον οργανισμό τη χρονική στιγμή $t = 0$).
Η ποσότητα του φαρμάκου που παραμένει στον οργανισμό του ασθενούς μειώνεται όσο περνούν οι ημέρες, δηλαδή η εκθετική συνάρτηση $f(t) = q_0 \cdot \alpha^t$ είναι φθίνουσα, το οποίο συμβαίνει όταν $0 < \alpha < 1$.

β)

i. Μία ημέρα μετά τη λήψη του φαρμάκου, η ποσότητά του στον οργανισμό του ασθενούς έχει υποδιπλασιαστεί, δηλαδή

$$f(1)=\frac{q_0}{2}\Leftrightarrow$$

$$q_0\cdot\alpha=\frac{q_0}{2}\Leftrightarrow$$

$$\alpha=\frac{1}{2}.$$

ii. Παρατηρούμε ότι:

$$f(0)=q_0\cdot\alpha^0=q_0,\quad f(1)=q_0\cdot\frac{1}{2}=\frac{q_0}{2},\quad f(2)=q_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{q_0}{4},\quad f(3)=q_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{q_0}{8},$$

$$f(4)=q_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{q_0}{16},\ f(5)=q_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{q_0}{32},\ f(6)=q_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{q_0}{64}.$$

Οπότε:

t	0	1	2	3	4	5	6
$f(t)$	q_0	$\frac{q_0}{2}$	$\frac{q_0}{4}$	$\frac{q_0}{8}$	$\frac{q_0}{16}$	$\frac{q_0}{32}$	$\frac{q_0}{64}$

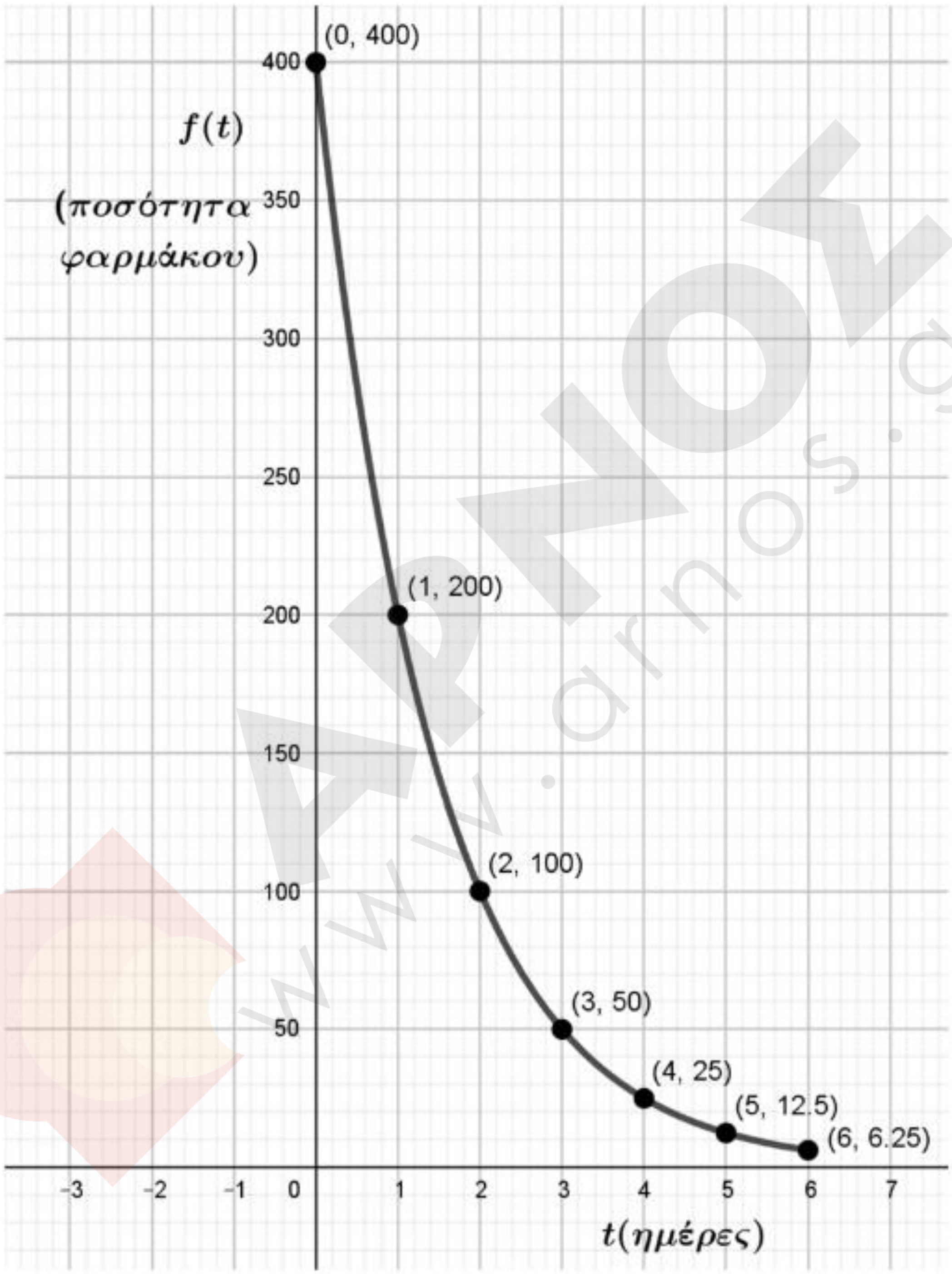
γ)

i. Έχουμε $f(4)=25\Leftrightarrow\frac{q_0}{16}=25\Leftrightarrow q_0=25\cdot16\Leftrightarrow q_0=400$ mg.

ii. Με τη βοήθεια του βii) ερωτήματος έχουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών για τη συνάρτηση $f(t)=400\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^t$ στο διάστημα $[0,6]$:

t	0	1	2	3	4	5	6
$f(t)$	400	200	100	50	25	12,5	6,25

Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων.



13. Θέμα 21471 Αρχέτυπο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha\cdot 2^x+\beta$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(1,3)$ και $B(2,13)$.

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β.

(Μονάδες 7)

Αν $\alpha=5$ και $\beta=-7$,

β) Να βρείτε το κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $y'y$.

(Μονάδες 4)

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>4^x-3$.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(1,3)$ και $B(2,13)$, οπότε:

$$\begin{cases} f(1)=3 \\ f(2)=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\cdot 2^1+\beta=3 \\ \alpha\cdot 2^2+\beta=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha+\beta=3 \\ 4\alpha+\beta=13 \end{cases} \overset{(-)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2\alpha=10 \\ 2\alpha+\beta=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=5 \\ \beta=-7. \end{cases}$$

β) Για $\alpha=5$ και $\beta=-7$ η συνάρτηση γίνεται $f(x)=5\cdot 2^x-7$ και για $x=0$ έχουμε $f(0)=5\cdot 2^0-7=5\cdot 1-7=-2$. Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0,-2)$.

γ) Παρατηρούμε ότι για $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$,έχουμε

$$2^{x_1}<2^{x_2} \Leftrightarrow$$
$$5\cdot 2^{x_1}<5\cdot 2^{x_2} \Leftrightarrow$$
$$5\cdot 2^{x_1}-7<5\cdot 2^{x_2}-7 \Leftrightarrow$$
$$f(x_1)<f(x_2).$$

Άρα η $f(x)=5\cdot 2^x-7$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση.

δ) Έχουμε

$f(x) > 4^x - 3 \Leftrightarrow$

$5 \cdot 2^x - 7 > \left(2^x\right)^2 - 3 \overset{2^x = y}{\Leftrightarrow}$

$y^2 - 5y + 4 < 0$ (1).

Το τριώνυμο $y^2 - 5y + 4$ έχει ρίζες $y_1 = 4$, $y_2 = 1$ (διότι $1 + 4 = 5 = S$ και $1 \cdot 4 = 4 = P$). Η ανίσωση (1) αληθεύει για $1 < y < 4$, δηλαδή:

$1 < 2^x < 4 \Leftrightarrow 2^0 < 2^x < 2^2 \Leftrightarrow 0 < x < 2$.

Τελικά η ανίσωση $f(x) > 4^x - 3$ αληθεύει για $x \in (0,2)$.

Σολωμού 29 Αθήνα τηλ: 210 38 22 157 info@arnos.gr www.arnos.gr