

**Κεφ. 4.2. - Τράπεζα Θεμάτων 2022 - Άλγεβρα Β' Λυκείου**
**ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ & ΛΥΣΕΙΣ**
**Θέμα 2 – Κωδικοί:**
**14981, 15012, 15096, 15642, 21997**
**1. Θέμα 14981 Αρχέτυπο**

 Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 - x + 6$ .

 α) Να υπολογίσετε το  $P(-2)$ .

(Μονάδες 5)

 β) Να αποδείξετε ότι το  $x + 2$  είναι παράγοντας του  $P(x)$ .

(Μονάδες 5)

 γ) Να παραγοντοποιήσετε το  $P(x)$ .

(Μονάδες 15)

**ΛΥΣΗ**

 α) Είναι  $P(-2) = (-2)^3 - (-2) + 6 = -8 + 2 + 6 = 0$ .

 β) Αφού ο αριθμός  $-2$  είναι ρίζα του πολυωνύμου  $P(x)$ , άρα το  $x - (-2) = x + 2$  θα είναι παράγοντας του  $P(x)$ .

 γ) Με βάση το β) ερώτημα, η διαίρεση  $P(x) : (x + 2)$  θα είναι τέλεια, αφού το υπόλοιπο αυτής της διαίρεσης είναι το  $P(-2) = 0$ . Εκτελούμε το σχήμα Horner για να βρούμε το πηλίκο της παραπάνω διαίρεσης.

1	0	-1	6	-2
	-2	4	-6	
1	-2	3	0	

 Άρα  $P(x) = (x + 2)(x^2 - 2x + 3)$ . Παρατηρούμε τώρα, ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου  $x^2 - 2x + 3$  είναι  $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -8 < 0$ , άρα δεν αναλύεται σε γινόμενο.

**Έξυπνα & Εύκολα!**

**2. Θέμα 15012 Αρχέτυπο**

Η διαίρεση ενός πολυωνύμου  $P(x)$  με το  $x-3$  έχει πηλίκο  $x^2+2$  και υπόλοιπο 4.

α) Να γράψετε την ταυτότητα της παραπάνω διαίρεσης.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι  $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 2$ .

(Μονάδες 8)

γ) Είναι το  $x=3$  ρίζα του πολυωνύμου  $P(x)$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

**ΛΥΣΗ**

α) Σύμφωνα με την ταυτότητα της διαίρεσης είναι:

$$P(x) = (x-3)(x^2+2) + 4$$

β) Έχουμε  $P(x) = (x-3)(x^2+2) + 4 \Leftrightarrow P(x) = x^3 + 2x - 3x^2 - 6 + 4$ .

Τελικά  $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 2$ .

γ) Ο αριθμός  $x=3$  είναι ρίζα του πολυωνύμου  $P(x)$ , αν η διαίρεσή του με το  $x-3$  έχει υπόλοιπο 0, που δεν συμβαίνει εδώ, αφού  $P(3)=4$ , άρα το  $x=3$  δεν είναι ρίζα του πολυωνύμου.

**Έξυπνα & Εύκολα!**

**3. Θέμα 15096 Αρχέτυπο**

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 1$ .

α) Να αποδείξετε ότι το 1 και το  $-1$  δεν είναι ρίζες του πολυωνύμου.

(Μονάδες 10)

β) Να κάνετε τη διαίρεση του  $P(x)$ :  $(x^2 + x - 1)$  και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

(Μονάδες 15)

**ΛΥΣΗ**

α) Είναι:

$$P(-1) = 2(-1)^3 + (-1)^2 - 3(-1) + 1 = 3 \neq 0 \text{ και}$$

$$P(1) = 2 \cdot 1^3 + 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = 1 \neq 0.$$

Άρα το 1 και το  $-1$  δεν είναι ρίζες του πολυωνύμου.

β) Είναι:

$2x^3 + x^2 - 3x + 1$	$x^2 + x - 1$
$-2x^3 - 2x^2 + 2x$	$2x - 1$
$-x^2 - x + 1$	
$x^2 + x - 1$	
$0$	

Άρα το πηλίκο της διαίρεσης των δύο πολυωνύμων είναι το  $\pi(x) = 2x - 1$  και το υπόλοιπο είναι 0.

Επομένως ισχύει:  $P(x) = (x^2 + x - 1) \cdot (2x - 1)$ .

**Έξυπνα & Εύκολα!**

**4. Θέμα 15642 Αρχέτυπο**

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = 2(x-1)^{20} - 3(x-1)^{10} + 5x^2 - 3x - 2$ .

α) Να δείξετε ότι το πολυώνυμο  $P(x)$  έχει παράγοντα το  $x-1$ .

(Μονάδες 10)

β)

i. Να υπολογίσετε την τιμή  $P(0)$ .

(Μονάδες 5)

ii. Είναι το  $x$  παράγοντας του πολυωνύμου  $P(x)$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

**ΛΥΣΗ**

α) Ένα πολυώνυμο  $P(x)$  έχει παράγοντα το  $x-\rho$  αν και μόνο αν  $P(\rho)=0$ . Έχουμε  $P(1) = 2(1-1)^{20} - 3(1-1)^{10} + 5 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 - 2 = 0$ , άρα το  $x-1$  είναι παράγοντας του  $P(x)$ .

β)

i. Είναι  $P(0) = 2(0-1)^{20} - 3(0-1)^{10} + 5 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 - 2 = 2 - 3 - 2 = -3$ .

ii. Αφού  $P(0) = -3 \neq 0$ , το  $x$  δεν είναι παράγοντας του πολυωνύμου  $P(x)$ .

**Έξυπνα & Εύκολα!**

**5. Θέμα 21997**

Δίδεται το πολυώνυμο  $P(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ .

α) Ποιος είναι ο βαθμός του πολυωνύμου  $P(x)$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

β) Ποιο είναι το πηλίκο  $\pi(x)$  και το υπόλοιπο  $\upsilon(x)$  που προκύπτει από την διαίρεση  $P(x) : (x - 2)$ ;

(Μονάδες 13)

**ΛΥΣΗ**

α) Γνωρίζουμε ότι ο βαθμός του γινομένου (μη-μηδενικών) πολυωνύμων είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών των πολυωνύμων αυτών. Επομένως, ο βαθμός του πολυωνύμου  $P(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$  είναι ίσος με 3, καθώς το  $P(x)$  είναι γινόμενο τριών πολυωνύμων βαθμού 1.

β)  $P(x) : (x - 2) = \frac{P(x)}{x-2} = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{x-2} = (x - 1)(x - 3)$ . Η διαίρεση, επομένως, είναι τέλεια, άρα το υπόλοιπο είναι ίσο με μηδέν.

Συνεπώς,  $P(x) = (x - 2) \cdot \underbrace{(x - 1)(x - 3)}_{\pi(x)} + \underbrace{0}_{\upsilon(x)}$ .

Άρα,  $\pi(x) = (x - 1)(x - 3)$  και  $\upsilon(x) = 0$ .

**Έξυπνα & Εύκολα!**

Σχόλιο:

Το θεώρημα «Ταυτότητα της Διαίρεσης» λέει ότι: για κάθε ζεύγος πολυωνύμων  $\Delta(x)$  και  $\delta(x)$  με  $\delta(x) \neq 0$  υπάρχουν δύο μοναδικά πολυώνυμα  $\pi(x)$  και  $\nu(x)$  τέτοια ώστε  $\Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x) + \nu(x)$ , όπου το  $\nu(x)$  ή είναι το μηδενικό πολυώνυμο ή έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του  $\delta(x)$ .

Από την μοναδικότητα που εγγυάται το θεώρημα για τα πολυώνυμα  $\pi(x)$  και  $\nu(x)$ , προκύπτει ότι και μόνο η παρατήρηση ότι

$$P(x) = (x - 2) \cdot (x - 1)(x - 3) + 0$$

αρκεί για να βγει αμέσως το συμπέρασμα ότι  $\pi(x) = (x - 1)(x - 3)$  και  $\nu(x) = 0$ .

Έξυπνα & Εύκολα!