

Κεφ. 1.1. - Τράπεζα Θεμάτων 2022 - Άλγεβρα Β' Λυκείου**ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ & ΛΥΣΕΙΣ****Θέμα 2 - Κωδικοί:****15006, 15011, 15016, 15195, 15849, 18431, 21227**

Η Τράπεζα Θεμάτων για την Άλγεβρα Β' Λυκείου είναι μία μεγάλη «θάλασσα». Εμείς όμως έχουμε φροντίσει για εσένα, συγκεντρώνοντας εκείνα τα θέματα που αποτελούν τη «βάση» της γνώσης και για τα υπόλοιπα. Μελετώντας και κατανοώντας το μοτίβο σκέψης για τα συγκεκριμένα, μπορείς να λύσεις με επιτυχία και τα υπόλοιπα θέματα. Στην ιστοσελίδα μας www.arnos.gr για το Course της Άλγεβρας, μελετάς και προετοιμάζεσαι με την αναλυτική διδασκαλία σε ασκήσεις και θέματα, στο ύφος της Τράπεζας.

1. Θέμα 15006

α) Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} 2x - 4y = -2 \\ 5x - 10y = 3 \end{cases}$$

(Μονάδες 13)

β) Τι συμπεραίνετε για τη σχετική θέση των ευθειών $\varepsilon_1: 2x - 4y = -2$ και $\varepsilon_2: 5x - 10y = 3$;

(Μονάδες 12)

Έξυπνα & Εύκολα!

ΛΥΣΗ

α) Η ορίζουσα του συστήματος είναι:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 5 & -10 \end{vmatrix} = 2(-10) - 5(-4) = -20 + 20 = 0.$$

Άρα, το σύστημα είναι ή αδύνατο ή έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

Το σύστημα ισοδύναμα γράφεται:

$$\begin{cases} 2x - 4y = -2 \\ 5x - 10y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 1 \\ 5x - 10y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 1 \\ 5(2y - 1) - 10y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 1 \\ -5 = 3 \end{cases}.$$

Άρα, είναι αδύνατο.

β) Από το ερώτημα α), το σύστημα $\begin{cases} 2x - 4y = -2 \\ 5x - 10y = 3 \end{cases}$ είναι αδύνατο, οπότε συμπεραίνουμε ότι

οι ευθείες ε_1 και ε_2 δεν έχουν κανένα κοινό σημείο. Άρα, είναι παράλληλες.

2. Θέμα 15011

Ο Κώστας καταθέτει σε μια τράπεζα 15 χαρτονομίσματα των 20 € και 50€. Συμβολίζουμε με x και y το πλήθος των χαρτονομισμάτων των 20 € και 50€ αντίστοιχα.

α)

i. Δίνονται οι εξισώσεις:

1. $y = 15 - x$

2. $y - x = 15$

Να επιλέξετε ποια από τις δύο παραπάνω εξισώσεις περιγράφει την σχέση των x και y

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

ii. Η συνολική αξία των χρημάτων είναι 480 €.

Δίνονται, ακόμα, οι εξισώσεις:

3. $50y - 20x = 480$

4. $20x + 50y = 480$

Να επιλέξετε ποια από τις δύο παραπάνω εξισώσεις περιγράφει την συνολική αξία των χρημάτων σε σχέση με τα x και y . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

β) Επιλύοντας το σύστημα των δύο εξισώσεων που επιλέξατε στα ερωτήματα αi) και αii) να βρείτε πόσα χαρτονομίσματα των 20 € και 50€ κατάθεσε ο Κώστας.

(Μονάδες 11)

Έξυπνα & Εύκολα!

ΛΥΣΗ

α)

i. Όλα τα χαρτονομίσματα είναι 15, οπότε το άθροισμα των x και y είναι 15, δηλαδή σωστή είναι η εξίσωση 1. $y = 15 - x \Leftrightarrow y + x = 15$.

ii. Τα x χαρτονομίσματα των 20 € έχουν αξία $20x$ €. Αντίστοιχα τα y χαρτονομίσματα των 50 € έχουν αξία $50y$ €. Η συνολική αξία είναι 480 €, οπότε σωστή είναι η εξίσωση 4. $20x + 50y = 480$.

β) Επιλύουμε το σύστημα

$$\begin{cases} y = 15 - x \\ 20x + 50y = 480 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 15 - x \\ 20x + 50(15 - x) = 480 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 15 - x \\ -30x = 480 - 750 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 15 - x \\ x = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 \\ x = 9 \end{cases}$$

Σύμφωνα με την εκφώνηση $x = 9$ είναι τα χαρτονομίσματα των 20 € και $y = 6$ τα χαρτονομίσματα των 50 €.

3. Θέμα 15016 Αρχέτυπο

Δίνεται το γραμμικό σύστημα $\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί το ζεύγος $(0, 4)$ δεν αποτελεί λύση του παραπάνω συστήματος.

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε το παραπάνω σύστημα.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών $(\varepsilon_1): 3x + 2y = 8$ και $(\varepsilon_2): 2x - y = 3$.

(Μονάδες 7)

Έξυπνα & Εύκολα!

ΛΥΣΗ

α) Το ζεύγος $(0,4)$ επαληθεύει μόνο την εξίσωση $3x+2y=8$ και όχι την εξίσωση $2x-y=3$, οπότε δεν αποτελεί λύση του συστήματος.

β) Από τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος έχουμε $2x-y=3 \Leftrightarrow -y=-2x+3 \Leftrightarrow y=2x-3$ και με αντικατάσταση στην εξίσωση $3x+2y=8$ έχουμε:

$$3x+2(2x-3)=8 \Leftrightarrow 3x+4x-6=8 \Leftrightarrow 7x=14 \Leftrightarrow x=2.$$

Για $x=2$ στην εξίσωση $2x-y=3$ έχουμε $y=1$.

Συνεπώς η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(2,1)$.

γ) Οι συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ είναι η λύση του συστήματος

$$\begin{cases} 3x+2y=8 \\ 2x-y=3 \end{cases}, \text{ δηλαδή το ζεύγος } (2,1).$$

4. Θέμα 15195

α) Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} 5x-y=-1 \\ 3x+y=2 \end{cases}$.

(Μονάδες 12)

β) Να σχεδιάσετε τις ευθείες $(\varepsilon_1): 5x-y=-1$ και $(\varepsilon_2): 3x+y=2$ και να ερμηνεύσετε γραφικά το αποτέλεσμα του α) ερωτήματος.

(Μονάδες 13)

Έξυπνα & Εύκολα!

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\begin{cases} 5x - y = -1 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$. Έχουμε $D = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 3 = 8 \neq 0$, ακόμα $D_x = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 2 = 1$ και

$D_y = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 10 + 3 = 13$, επομένως $x = \frac{D_x}{D} = \frac{1}{8}$ και $y = \frac{D_y}{D} = \frac{13}{8}$, δηλαδή λύση είναι η

$$(x, y) = \left(\frac{1}{8}, \frac{13}{8} \right).$$

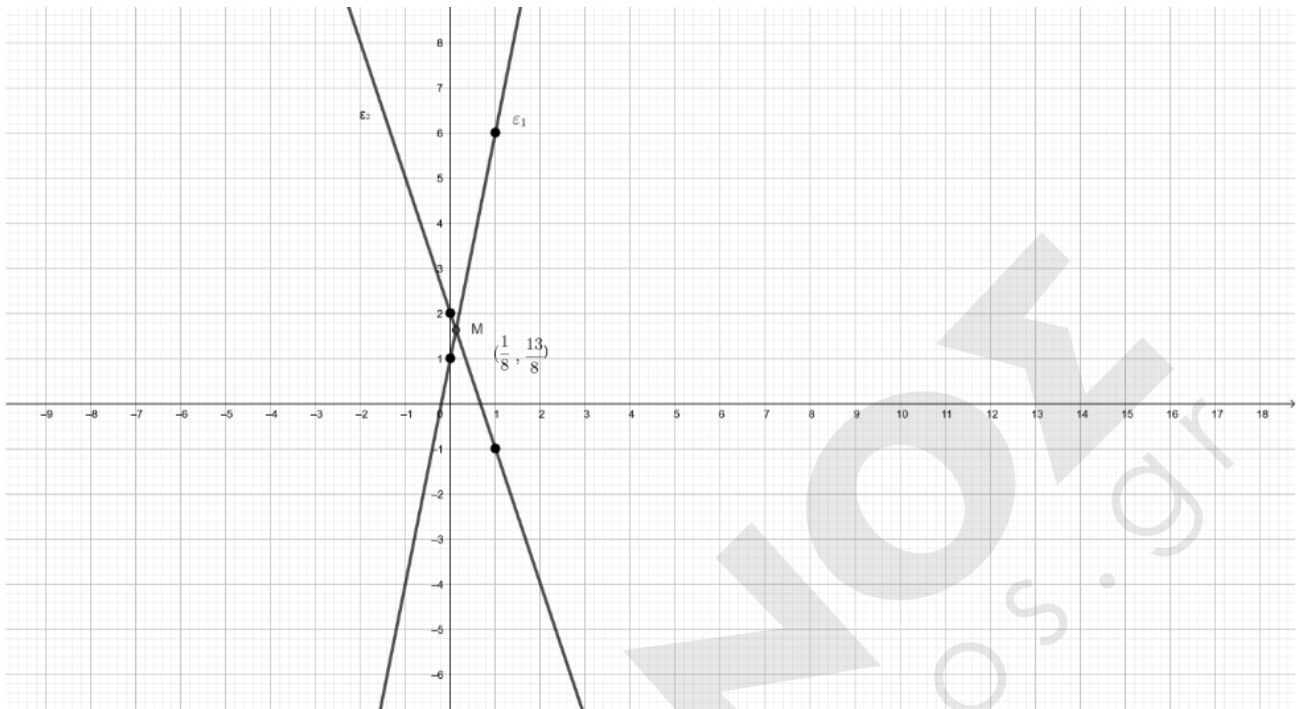
β) Για την ευθεία (ε_1): $5x - y = -1$ έχουμε

x	0	1
y	1	6

Για την ευθεία (ε_2): $3x + y = 2$ έχουμε

x	0	1
y	2	-1

Έξυπνα & Εύκολα!



Οι δύο ευθείες έχουν ένα κοινό σημείο το $M\left(\frac{1}{8}, \frac{13}{8}\right)$ του οποίου οι συντεταγμένες είναι η μοναδική λύση του συστήματος του α) ερωτήματος.

Έξυπνα & Εύκολα!

5. Θέμα 15849 Αρχέτυπο

Σε μια συνεστίαση μεταξύ συγγενών παρευρίσκονται οι γονείς με τα παιδιά τους. Στο τραπέζι υπάρχουν 5 παιδιά επιπλέον από τους γονείς. Κάθε γονιός πλήρωσε 12€ και κάθε παιδί τα μισά. Ο συνολικός λογαριασμός ήταν 300€.

α) Αν x το πλήθος των γονιών και y το πλήθος των παιδιών, να διαλέξετε από τις παρακάτω επιλογές, ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους που εκφράζει τα δεδομένα του παραπάνω προβλήματος.

A.
$$\begin{cases} x + y + 5 = 0 \\ 12x + 6y = 300 \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} x - y = 5 \\ 6x + 12y = 300 \end{cases}$$

Γ.
$$\begin{cases} y = x + 5 \\ 12x + 6y = 300 \end{cases}$$

Δ.
$$\begin{cases} y = x + 5 \\ 6x + 12y = 300 \end{cases}$$

(Μονάδες 10)

β) Από τη λύση του συστήματος που επιλέξατε στο α) ερώτημα να βρείτε πόσοι γονείς και πόσα παιδιά υπήρχαν στο τραπέζι.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Στο τραπέζι υπάρχουν 5 παιδιά επιπλέον από τους γονείς, τότε η εξίσωση που προκύπτει είναι $y = x + 5$ (1).

Επίσης, το ποσό που πλήρωσαν οι γονείς είναι $12x$ και το ποσό που πλήρωσαν τα παιδιά είναι $6y$.

Άρα, η ζητούμενη εξίσωση είναι: $12x + 6y = 300$ (2)

Το σύστημα των δύο εξισώσεων είναι το Γ, δηλαδή $\begin{cases} y = x + 5 \\ 12x + 6y = 300 \end{cases}$.

Έξυπνα & Εύκολα!

β) Λύνουμε το σύστημα Γ των δύο εξισώσεων (1) και (2) του πρώτου ερωτήματος.

Με αντικατάσταση της (1) στην (2) προκύπτει

$12x + 6(x + 5) = 300 \Leftrightarrow 12x + 6x + 30 = 300 \Leftrightarrow 18x = 270 \Leftrightarrow x = 15$ και το y προκύπτει αν στην (1) αντικαταστήσουμε το x , δηλαδή $y = 15 + 5 = 20$.

Άρα, οι γονείς ήταν 15 και τα παιδιά 20.

6. Θέμα 18431 Αρχέτυπο

Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} 3x + y = 11 \\ 6x + ky = 8 \end{cases}$ με αγνώστους x, y και k παράμετρος.

α) Να λύσετε το σύστημα όταν $k = 2$.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε το σύστημα όταν $k = 1$.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Για $k = 2$, το σύστημα γίνεται $\begin{cases} 3x + y = 11 \\ 6x + 2y = 8 \end{cases}$ και διαιρώντας κάθε όρο της δεύτερης

εξίσωσης με το 2 παίρνουμε $\begin{cases} 3x + y = 11 \\ 3x + y = 4 \end{cases}$ οπότε το σύστημα είναι αδύνατο.

β) Για $k = 1$, το σύστημα γίνεται $\begin{cases} 3x + y = 11 \\ 6x + y = 8 \end{cases}$ και πολλαπλασιάζοντας κάθε όρο της

δεύτερης εξίσωσης με το -1 παίρνουμε $\begin{cases} 3x + y = 11 \\ -6x - y = -8 \end{cases}$

Προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε την εξίσωση $-3x = 3 \Leftrightarrow x = -1$.

Τότε από την πρώτη εξίσωση παίρνουμε $3(-1) + y = 11$, οπότε $-3 + y = 11 \Leftrightarrow y = 14$.

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση το ζεύγος $(x, y) = (-1, 14)$

Έξυπνα & Εύκολα!

7. Θέμα 21227

α) Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} 5x - y = 5 \\ -5x + y = 2 \end{cases}$$

(Μονάδες 12)

β) Να σχεδιάσετε τις ευθείες $(\varepsilon_1): 5x - y = 5$ και $(\varepsilon_2): -5x + y = 2$ και να ερμηνεύσετε γραφικά το αποτέλεσμα του α) ερωτήματος.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε
$$\begin{cases} 5x - y = 5 \\ -5x + y = 2 \end{cases} \xrightarrow{(+)} \begin{cases} 0x + 0y = 7 \\ -5x + y = 2 \end{cases}$$
, επομένως το σύστημα είναι αδύνατο.

β) Για την ευθεία $(\varepsilon_1): 5x - y = 5$ έχουμε

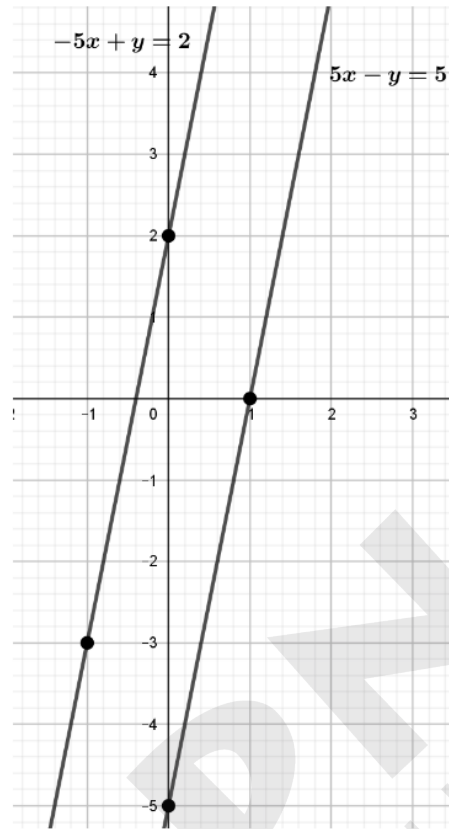
x	0	1
y	-5	0

Για την ευθεία $(\varepsilon_2): -5x + y = 2$ έχουμε

x	0	-1
y	2	-3

Οι δύο ευθείες είναι παράλληλες, δηλαδή δεν έχουν κοινό σημείο, που γραφικά εκφράζει ότι το σύστημα του α) ερωτήματος είναι αδύνατο.

Έξυπνα & Εύκολα!


Θέμα 4 - Κωδικός: 15117
8. Θέμα 15117 Αρχέτυπο

Μια παρέα τεσσάρων φίλων παραγγέλνει σάντουιτς. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η παραγγελία τους. Τα συστατικά των σάντουιτς είναι βιολογικά και το ψωμί είναι ολικής άλεσης (βιολογικό). Το ψωμί για κάθε σάντουιτς έχει κόστος 0,3 ευρώ. Το πρώτο σάντουιτς έχει 2 φέτες ζαμπόν, 4 φέτες τυρί, δεν έχει γαλοπούλα και κοστίζει 3,8 ευρώ. Το δεύτερο έχει 1 φέτα ζαμπόν, 2 φέτες τυρί, 3 φέτες γαλοπούλα και κοστίζει 3,55 ευρώ. Το τρίτο έχει 3 φέτες ζαμπόν, δεν έχει τυρί, έχει 3 φέτες γαλοπούλα και κοστίζει 4,05 ευρώ. Ο σερβιτόρος δεν έχει προλάβει να συμπληρώσει το κόστος του τελευταίου σάντουιτς.

Έξυπνα & Εύκολα!

σάντουιτς	φέτες ζαμπόν	φέτες τυρί	φέτες γαλοπούλα	ψωμί	κόστος
1 ^ο	2	4	0	0,3€	3,8€
2 ^ο	1	2	3	0,3€	3,55€
3 ^ο	3	0	3	0,3€	4,05€
4 ^ο	2	2	1	0,3€	
				Σύνολο	

α) Να εκφράσετε τα δεδομένα του προβλήματος με ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε πόσο κοστίζει η μία φέτα τυρί, η μία φέτα γαλοπούλα και η μία φέτα ζαμπόν.

(Μονάδες 10)

γ) Πόσα χρήματα θα πληρώσουν συνολικά οι τέσσερις φίλοι για την παραγγελία τους;

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Αν η μία φέτα ζαμπόν κοστίζει x ευρώ, η μία φέτα τυρί y ευρώ και η μία φέτα γαλοπούλα z ευρώ, προκύπτει το παρακάτω σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους:

$$\begin{cases} 2x + 4y + 0z + 0,3 = 3,8 \\ x + 2y + 3z + 0,3 = 3,55 \\ 3x + 0y + 3z + 0,3 = 4,05 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4y + 0z = 3,5 \\ x + 2y + 3z = 3,25 \\ 3x + 0y + 3z = 3,75 \end{cases}$$

Έξυπνα & Εύκολα!

β) Θα λύσουμε το παραπάνω σύστημα για να βρούμε τις τιμές των x , y και z . Έχουμε:

$$\begin{cases} 2x+4y = 3,5 \\ x+2y+3z = 3,25 \\ 3x+3z = 3,75 \end{cases} \xrightarrow{\cdot 2} \begin{cases} 2x+4y = 3,5 \\ 2x+4y+6z = 6,5 \\ 3x+3z = 3,75 \end{cases} \xrightarrow{\substack{\text{αφαιρούμε} \\ \text{από την (2) την (1)}}} \begin{cases} 6z = 3 \\ 2x+4y = 3,5 \\ 3x+3z = 3,75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0,5 \\ 2x+4y = 3,5 \\ 3x+3 \cdot 0,5 = 3,75 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} z = 0,5 \\ 2x+4y = 3,5 \\ 3x+1,5 = 3,75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0,5 \\ 2x+4y = 3,5 \\ 3x = 2,25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0,5 \\ 2x+4y = 3,5 \\ x = 0,75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0,5 \\ 2 \cdot 0,75 + 4y = 3,5 \\ x = 0,75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0,5 \\ 1,5 + 4y = 3,5 \\ x = 0,75 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} z = 0,5 \\ y = 0,5 \\ x = 0,75 \end{cases}$$

Τελικά, η μία φέτα ζαμπόν κοστίζει $x = 0,75$ ευρώ, η μία φέτα τυρί κοστίζει $y = 0,5$ ευρώ και η μία φέτα γαλοπούλα κοστίζει $z = 0,5$ ευρώ.

γ) Το τέταρτο σάντουιτς κοστίζει $2 \cdot 0,75 + 2 \cdot 0,5 + 1 \cdot 0,5 + 0,3 = 3,3$ ευρώ. Συνολικά θα πληρώσουν λοιπόν: $3,8 + 3,55 + 4,05 + 3,3 = 14,7$ ευρώ.

Έξυπνα & Εύκολα!